



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

### About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



## A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

## Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

## À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>





3.



QA  
35  
R459  
1736











# ANALYSE DEMONTRÉE,

O U

## LA MÉTHODE DE RÉSOUDRE LES PROBLÈMES DES MATHÉMATIQUES.

E T

D'APPRENDRE FACILEMENT CES SCIENCES;

Expliquée & démontrée dans le premier Volume, & appliquée, dans le second, à découvrir les propriétés des Figures de la Géométrie simple & composée; à résoudre les Problèmes de ces Sciences & les Problèmes des Sciences Physico-mathématiques, en employant le calcul ordinaire de l'Algebre, le calcul différentiel & le calcul intégral. Ces derniers calculs y sont aussi expliqués & démontrés.

DEDIÉE A MONSIEUR LE DUC DE BOURGOGNE.

Par le R. P. REYNEAU, Prêtre de l'Oratoire.

1656-1728  
SECONDE ÉDITION,

Augmentée des Remarques de M. de Varignon.

TOME I.

A PARIS,

Chez QUILLAU, Imprimeur-Juré-Libraire de l'Université, rue Galande,  
près la Place Maubert, à l'Annonciation.

M. DCC. XXXVI.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

THE UNITED STATES OF AMERICA

IN SENATE

January 10, 1901

REPORT

OF THE

COMMISSIONERS OF THE GENERAL LAND OFFICE

IN RESPONSE TO A RESOLUTION PASSED BY THE SENATE

ON MAY 1, 1899

RELATIVE TO THE

LANDS BELONGING TO THE UNITED STATES

AND THE

LANDS BELONGING TO THE SEVERAL STATES



A MONSEIGNEUR  
LE DUC  
DE BOURGOGNE

MONSEIGNEUR,

*L'honneur que vous me faites de permettre  
que cet Ouvrage, composé pour faciliter l'é-*

a ij

CT8500

tude des Mathematiques , & pour les conduire à leur perfection par un progrès rapide , paroisse sous vos Auspices & sous la protection de votre auguste Nom , est le plus u'on puisse avoir de son utilité.  
2 sçait , MONSEIGNEUR ,  
sur toute sorte de Sciences en  
pour les Mathematiques en  
particulier ; que ce goût est plein de discernement ! qu'il est exquis !

On voit avec admiration qu'un jeune Heros qui a sçu conduire des Armées , vaincre l'Ennemi , & emporter les plus fortes Places presque aussi-tôt qu'il a été en âge de manier les armes ; toujours plein d'une noble ardeur , qui ne respire que de nouvelles conquêtes & de nouveaux triomphes ; toujours prêt à s'exposer pour le bien de l'Etat , soit qu'il faille porter la terreur au dehors en fondant sur nos Ennemis , ou rassurer la confiance au dedans du Royaume , en rendant inutile leur irruption sur une de nos Provinces : qui ne neglige aucun des soins qu'un Prince destiné à gouverner un grand Royaume , doit prendre de s'instruire par avance de tout ce qui concerne le bien de l'Etat & les avantages

particuliers de chaque Province, & généralement de tout ce qui peut contribuer au bonheur des Peuples & à la grandeur du Souverain : On voit, dis-je, avec admiration que sans rien prendre sur le temps, qu'une piété solide lui fait un devoir de donner au culte de Dieu & à l'étude assidue des Livres saints, il sçait encore en dérober à ses plaisirs pour développer ce qu'il y a de plus caché dans les Sciences; qu'elles lui servent de délassement; & qu'il honore de sa protection ceux qui les cultivent, après s'être mis en état de juger par lui-même de leurs sciences, & de décider de leurs Ouvrages.

Mais, MONSIEUR, les traits de la plume d'un Geometre n'ont pas assez de délicatesse ni de vivacité pour représenter au naturel le portrait que vous avez tracé vous-même dans tous les esprits & dans tous les cœurs par cette conduite toujours remplie de sagesse & de bonté, formée sur les admirables Exemples & sur les Royales Instructions du plus Sage, du plus Religieux, du plus Magnanime, en un mot du Premier & du plus Grand des Rois votre auguste Ayeul.

*Je puis assurer , MONSEIGNEUR ,  
qu'il n'y a personne en qui il produise de  
plus vifs sentimens de veneration que dans  
celui qui a l'honneur d'être avec un très-pro-  
fond respect ,*

**MONSEIGNEUR,**

Votre très-humble & très-obéissant  
Serviteur CHARLES REYNEAU,  
Prêtre de l'Oratoire.

## P R É F A C E.

**L'**ESPRIT de l'homme est si borné, qu'il ne peut voir distinctement d'une simple vûe beaucoup d'objets à la fois. Les perceptions vives ; comme sont toutes celles des sens & de l'imagination, l'éblouissent, & elles occupent tellement son étendue, qu'il ne peut découvrir les rapports & les propriétés des objets sensibles, qu'en les considérant par parties les unes après les autres avec une application pénible & fatigante ; & quand il est attentif à quelqu'une, il a perdu de vûe les autres, qui lui seroient pourtant nécessaires afin d'en apercevoir les rapports.

C'est une des principales causes du peu de progrès qu'ont fait les sciences sensibles : Mais, pour ne parler ici que des Mathématiques, que leur utilité, leur beauté, leur évidence & leur certitude ont toujours fait cultiver ; pendant que l'on ne s'y est appliqué que par la contemplation des figures mêmes, que l'on a cherché les propriétés

des figures en les regardant, ou en les formant dans son imagination, on n'a pas fait beaucoup de chemin: les découvertes étoient fort bornées: on ne trouvoit avec beaucoup de peine que des résolutions particulieres des Problèmes; on se fatiguoit; on se rebuttoit; & l'on ne pèut assez louer le travail, la patience & la force d'esprit des anciens Geometres, d'avoir porté les Mathematiques par des moyens si difficiles, à l'état où ils nous les ont laissées.

On s'avisa heureusement, dans le dernier siècle, d'exprimer les lignes & les figures par les caracteres familiers de l'alphabet, & de réduire ces expressions à un calcul facile, qui exprimât aussi tous les rapports simples & composés que peuvent avoir ces lignes & ces figures. On forma un Art methodique ( qui est ce que l'on nomme l'*Analyse* ) pour trouver, par les rapports connus qu'ont les grandeurs inconnues que l'on cherche dans les Problèmes avec celles qui sont connues, des *équations* qui exprimassent les conditions & la nature, pour ainsi dire, des Problèmes; & pour découvrir les valeurs des grandeurs inconnues de ces équations; ce qui donne la résolution des Problèmes. *Monsieur Descartes* perfectionna & réduisit à une extrême facilité ces calculs & cette *Analyse* naissante. Il y ajouta l'excellente methode d'employer les expressions indéterminées, qui, quelque simples qu'elles étoient, représentaient pourtant une infinité de grandeurs; & de les déterminer aux grandeurs particulieres de tous les cas auxquels elles peuvent convenir;

convenir : la methode de réduire les lignes courbes à des équations qui en exprimassent les principales proprieté ; & de tirer de ces équations tout esles choses que l'on pouvoit desirer de connoître sur ces courbes : enfin la maniere d'employer les courbes elles-mêmes à la resolution des équations & des Problèmes.

Ces nouvelles methodes, réduisant la Geometrie à un calcul simple & facile, retranchoient ce qu'il y avoit d'embarassant dans les figures, c'est-à-dire, tout ce qui fatiguoit l'imagination, & ce qui remplissoit la capacité de l'esprit. Elles lui laissoient la liberté de penetrer son sujet, & de découvrir avec évidence tout ce qu'il renfermoit. Elles augmentoient même, pour ainsi dire, l'étendue de l'esprit par l'art de lui représenter, comme dans une perspective, sous des expressions simples & abregées, un nombre infini d'objets. Les Mathematiques devinrent par là si faciles, que chaque trait de plume donnoit naissance à des découvertes. Alors le plaisir succeda à la peine, & le cœur dédommagé permit à l'esprit de voir les utilitez & les beautés des Mathematiques, & il s'y rendit. Aussi ces sciences changerent-elles de forme. On vit une Geometrie nouvelle, qui contenoit tout ce que nous avions reçu des anciens, & qui alloit infiniment plus loin : les resolutions étoient generales, & aucun cas particulier ne leur échappoit.

On vit naître de la même source des sciences curieuses & utiles, & presque toutes les autres en tirerent un nouvel éclat ; comme celle qui a

appris à donner aux horloges toute la justesse nécessaire pour les rendre la mesure exacte du temps : celle qui nous a donné les moyens d'étendre notre vûe aux objets qui nous étoient inconnus par leur trop grand éloignement, ou par leur extrême petitesse : celle qui a découvert la maniere de jeter les bombes, & de les faire tomber précisément où l'on voudroit, &c.

Ces methodes étoient assez fécondes pour produire toutes les découvertes ; mais il leur manquoit des expressions, & un calcul qui suivît pas à pas la nature, laquelle, produisant les figures par le mouvement, n'en fait décrire, aux corps mobiles qui les forment, que des parties insensibles plus petites que toutes celles que nous pouvons déterminer, dans chacun des instans qui passent plus vite que tout temps que nous pouvons mesurer. On ne pensoit pas à donner des expressions à ces espaces qui étoient trop petits pour avoir un rapport déterminé avec ceux auxquels convenoient les expressions ordinaires, ni à ces instans que leur petitesse infinie empêchoit d'entrer en comparaison avec le plus petit temps que l'on pût prendre pour la mesure de tous les autres. On pensoit encore moins à réduire ces premiers éléments des grandeurs à un calcul qui leur fût propre, & qui les soumit aux methodes de l'Analyse.

Cependant le principe de ce calcul est si naturel, que les premiers Geometres l'ont fait servir à quelques-unes de leurs démonstrations. La plupart des propositions du *deuxième livre d'Euclide* ne sont démontrées que par ce principe ; & on le voit sup-



posé dans quelques-unes des découvertes d'*Archimede*. On s'aperçut bien du besoin que l'on avoit de ce calcul , pour résoudre des Problèmes qui furent proposez du temps de Monsieur Descartes , & il fut obligé d'exclure de ses methodes les courbes qu'on a nommées après lui. *Mechaniques*, qui sont pourtant un nombre infini de courbes dont les proprieté sont aussi utiles que celles des courbes *Geometriques*, & qui à l'aide de ce calcul , deviennent soumises à ces methodes comme les autres. Les Geometres, qui ont suivi les methodes de Monsieur Descartes, ont été obligez, aussi bien que les plus anciens, de supposer, dans la résolution de plusieurs Problèmes, le principe de ce calcul que l'on touchoit du doigt, pour ainsi dire : mais il falloit que différentes Nations eussent part à la gloire des découvertes. Celles-ci se sont faites en même temps en Allemagne par *Monsieur Leibnitz*, & en Angleterre par *Monsieur Newton*; l'un & l'autre on trouvé des expressions, & un calcul propre à ces premiers élémens des grandeurs d'une petitesse infinie par rapport aux grandeurs entieres dont ils sont les premiers élémens; & l'on a pu par le moyen de ces expressions & de ce nouveau calcul, leur appliquer les methodes de l'Analyse, & remonter de ces élémens infiniment petits aux grandeurs entieres dont ils sont les élémens. Ces nouveaux calculs s'appellent *le calcul différentiel* & *le calcul integral*.

*Monsieur Leibnitz* n'eut pas plutôt rendu publiques ses nouvelles découvertes, dont il cacha pourtant une partie exprès, comme il le dit lui-même, pour

laisser aux autres le plaisir de les trouver, que *Messieurs Bernoulli*, qui en virent toute l'utilité, s'y appliquèrent avec tant de succès, qu'ils les pénétrèrent, se les rendirent propres, y ajouterent de nouvelles methodes, & en firent usage dans la resolution d'une grande quantité de nouveaux Problèmes.

*Monsieur le Marquis de l'Hospital* donna l'excellent Ouvrage de *l'Analyse des infiniment petits*, où le calcul différentiel, & les principaux usages de ce calcul pour toutes les courbes, sont expliquez : & il fit voir qu'il avoit pénétré dans tout ce que le calcul integral pouvoit avoir de plus caché, par les résolutions complètes qu'il trouva des plus difficiles Problèmes, qui furent proposez par ceux qui s'en étoient rendu les maîtres. *Monsieur Varignon* doit bientôt donner une science generale du Mouvement toute nouvelle, qui est le fruit des profondes découvertes qu'il a faites dans ces nouvelles methodes, & dans la Geometrie composée. On doit juger du prix de l'ouvrage par les beaux morceaux qui paroissent tous les ans. Ce sont des pieces achevées, remplies de nouvelles découvertes qui font bien desirer l'ouvrage entier dont elles ne doivent faire que quelques parties. *Monsieur Carré* employa le principe le plus general du calcul integral à la mesure des surfaces, des solides, des distances des centres de pesanteur & d'oscillation. *Monsieur Newton* fit paroître de son côté le sçavant Ouvrage des *Principes Mathematiques de la Philosophie naturelle*, qui est tout fondé sur ces nouvelles methodes qu'il avoit inventées, mais dont il n'a laissé voir que

quelques vestiges , pour donner lieu à ceux qui voudroient entrer dans l'invention même des veritez qu'il y découvre , de se rendre propres les methodes qui en sont la clef. Enfin depuis l'invention de ces nouveaux calculs , on a non-seulement résolu d'une maniere courte & generale les Problèmes les plus difficiles , qui avoient été trouvez par les methodes de Monsieur Descartes appliquées au calcul ordinaire de l'Algebre ; mais on a vû les *Actes de Lipsic* , les *Journaux des Sçavans* & les *Memoires de l'Academie Royale des Sciences* remplis de résolutions de Problèmes , que l'on n'auroit osé tenter auparavant. Elles étoient tirées comme du fond de la nature , & des premiers & plus intimes principes du mouvement , de la courbure même des courbes & des petits angles que forment entr'elles les tangentes de leurs points qui se touchent , que l'on peut bien concevoir , mais que l'on ne sçauroit comparer avec les angles déterminez que nous mesurons ; & l'on s'est ouvert par le moyen de ces nouveaux calculs une voye qui conduit à une nouvelle Geometrie des courbes mechaniques & parcourantes , qui est aussi utile que celle que l'on avoit déjà.

Les resolutions d'un si grand nombre de Problèmes nouveaux , que nous ont donné les illustres Inventeurs des calculs differentiel & integral , & ceux qui après eux se les sont rendu propres par leur travail , sont les fruits que l'Analyse a recueillis de ces calculs ; mais ils ne sont que pour un petit nombre de Sçavans ; c'est le prix de la peine qu'il faut prendre pour inventer soi-même quelques-

unes des methodes qui ont servi à les découvrir. Pour les posséder , il faut se mettre en état de faire de pareilles découvertes ; & ce n'est que depuis peu de temps que l'on a vû des regles du calcul integral dans l'ouvrage de *Monsieur Cheinée* Ecoissois , de *Methodo fluxionum inversâ* , ( les Anglois donnent après Monsieur Newton , au calcul differentiel , le nom de *calcul des fluxions* , ) & dans le petit traité de *quadraturis curvarum* , que Monsieur Newton a mis à la fin de son ouvrage sur les couleurs.

On a toujours regardé les Mathematiques comme très-utiles pour la perfection de la Physique & des Arts , & pour former l'esprit des jeunes gens , en les accoutumant à apporter aux sujets de leurs applications toute l'attention qu'ils demandent , à mettre , dans toutes les démarches que doit faire leur esprit dans la recherche de la verité , l'ordre qu'il faut pour y arriver ; à ne donner leur consentement entier qu'à l'évidence dans les sciences naturelles : en leur rendant familiere la pratique des regles qui font découvrir , dans toutes les occasions où ils peuvent se trouver , le parti le plus raisonnable : & enfin en leur faisant acquérir la sagacité necessaire pour trouver dans les questions difficiles les moyens les plus propres à les résoudre. Cette utilité des Mathematiques , & l'habitude de les mettre à la portée des commençans acquise pendant vingt-deux années de temps que je les ai enseignées publiquement , m'ont porté à mettre toutes les methodes que nous avons reçues de Monsieur Descartes & de ses Disciples , & celles qui ont été découvertes par les sçavans

Geometres de notre temps , dans leur ordre naturel , de maniere qu'elles s'éclaircissent mutuellement , & fussent toutes démontrées dans cet Ouvrage ; que je nomme à cause de cela l'*Analyse démontrée*. Je me suis proposé de rendre , par le moyen de ces methodes , les Mathématiques faciles à ceux qui commencent , & qui veulent les sçavoir à fond ; en leur découvrant les voyes qui les conduiront des premiers principes à tout ce qu'ils peuvent desirer d'en connoître , sans se fatiguer l'imagination , sans être obligez de lire de gros volumes , sans qu'il faille charger leur memoire d'un grand nombre de propositions : en leur ôtant par là ce qu'il y avoit de rebutant & de plus pénible dans l'étude des Mathématiques : en les faisant entrer dans l'invention naturelle de ces sciences , qui les menera sur chaque sujet à des résolutions simples & generales : en les mettant enfin en état d'entendre toutes les nouvelles découvertes ; & de faire eux-mêmes celles qu'ils voudront entreprendre.

Cet Ouvrage est partagé en huit Livres : l'*Analyse* est expliquée & démontrée dans les sept premiers Livres , qui font le premier Volume ; & le huitième , qui est comme une seconde partie de l'Ouvrage , & qui en est le second Volume , fait voir les usages de l'*Analyse* , & apprend aux Lecteurs qui commencent , la maniere d'en appliquer les methodes à la Geometrie simple & composée , & à la resolution des Problèmes des sciences Physico-Mathématiques , en se servant du calcul ordinaire de l'Algebre , du calcul différentiel & du calcul integral : ces nouveaux calculs y sont aussi expliquez & démontrez , comme on

\* P R E F A C E.

Je dira dans la Préface de ce huitième Livre.

Le premier Livre contient l'Analyse simple , & la resolution de plusieurs Problèmes qui n'ont besoin que de l'Analyse simple. Les six Livres suivans expliquent & démontrent l'Analyse composée. Le second & le troisième enseignent les premiers principes de l'Analyse , & les préparations qu'il faut donner aux équations composées pour les résoudre.

La methode de réduire les Problèmes aux équations qui en expriment toutes les conditions , est expliquée dans le second Livre avec plusieurs préparations qu'il faut faire sur les équations , pour en rendre la resolution plus facile ; comme la maniere d'en ôter les fractions & les incommensurables , & la maniere de trouver le plus grand diviseur commun à plusieurs équations d'un même Problème.

On explique dans le troisième Livre la formation des équations : elle sert à faire concevoir clairement leur nature aux Lecteurs qui commencent. On leur apprend à distinguer le nombre & les qualitez des valeurs de l'inconnue de chaque équation ; & on leur enseigne les différentes transformations des équations avec leurs usages. Après avoir appris les premiers principes de l'Analyse dans les trois premiers Livres , qui sont comme des préparations pour résoudre les équations & les Problèmes qu'elles expriment , on enseigne la resolution des équations dans les quatre Livres suivans.

Le quatrième Livre contient plusieurs methodes pour résoudre toutes les équations de quelque degré qu'elles puissent être , lorsque les valeurs de l'inconnue sont commensurables ; & les methodes generales

nerales de réduire les équations composées aux plus simples qu'il est possible. Les règles qu'a données *Monfieur Hudde* dans la lettre intitulée *de reductione equationum*, qui est à la fin du premier Volume de la Geometrie de *Monfieur Descartes*, y sont mises en ordre & démontrées. La methode d'employer les grandeurs indéterminées qui représentent toutes les grandeurs particulieres, pour découvrir celles que l'on cherche, est expliquée dans ce quatrième Livre, & mise en usage dans tous les suivans. Les Lecteurs qui commencent, doivent se rendre familiere cette methode de *Monfieur Descartes*: elle est comme la clef qui ouvre l'entrée presque à toutes les découvertes. On explique dans le même Livre tout ce qui regarde les valeurs égales des inconnues des équations; ce qui est de grand usage dans la resolution de plusieurs Problèmes.

On a mis dans le cinquième Livre les Methodes de resoudre les équations composées en particulier du second degré, du troisième, du quatrième, &c. On tâche de faire entrer les commençans dans ces resolutions, qui sont la plupart de l'invention du *Pere Prestet*, comme s'ils les découvroient eux-mêmes. Ils y remarqueront qu'il y a dans l'Analyse, aussi bien que dans la Geometrie simple, des Problèmes dont l'on n'a pû jusqu'à present démontrer l'impossibilité, ni trouver des methodes qui en donnassent la resolution exacte; qu'on n'a pas laissé cependant de trouver des methodes qui en donnassent des resolutions si approchantes, que les Mathematiques pratiques & les Arts en tirent les

mêmes avantages qu'ils auroient des résolutions exactes : & comme l'on a trouvé dans la Geometrie des valeurs si approchantes de la longueur de la circonférence & de la quadrature du cercle, que leur différence d'avec les valeurs exactes est insensible; on a de même trouvé des méthodes d'approcher de si près des valeurs des inconnues des équations dans les cas où l'Analyse n'en a pas encore pu trouver d'expressions exactes, qu'on en peut rendre la différence plus petite qu'aucune grandeur que l'on voudra. Ces méthodes d'approximation sont le sujet du sixième & du septième Livre.

On explique & l'on démontre dans le sixième Livre la méthode de trouver les grandeurs qui sont les limites des valeurs de l'inconnue dans les équations numériques de tous les degrés ; (*Monsieur Rolle est l'auteur de cette méthode;*) & l'on donne plusieurs manières de trouver, par le moyen de ces limites, les valeurs des inconnues des équations numériques aussi peu différentes des valeurs exactes qu'on le peut désirer.

La manière de faire une formule générale pour élever une grandeur complexe de tant de termes qu'on voudra à une puissance quelconque, dont l'exposant indéterminé représente un nombre quelconque entier ou rompu, positif ou négatif, est expliquée & démontrée pour tous les cas dans le septième Livre. Elle est de grand usage pour former toute sorte de puissances, pour extraire toute sorte de racines, par de simples substitutions; pour faire des formules générales dans la résolution des



Problèmes & dans le calcul integral ; & pour réduire à une extrême facilité la pratique des methodes qui font trouver par *des suites infinies* les valeurs de celles des inconnues que l'on voudra de toutes sortes d'équations qui en ont plusieurs, comme aussi de toutes celles qui contiennent les differentielles de plusieurs grandeurs *changeantes* mêlées ensemble. Ces methodes, découvertes par *Messieurs Leibnitz & Newton*, sont expliquées & démontrées dans ce septième Livre : & comme elles sont de grand usage dans la resolution d'une infinité de beaux Problèmes, & qui sont très-utiles, comme on le verra dans la dernière Section de la seconde Partie du huitième Livre ; on n'a rien oublié pour les faire concevoir clairement aux Lecteurs qui commencent, & pour les leur rendre familières par plusieurs exemples : on les applique aussi, à la fin de ce septième livre, à l'approximation des valeurs des inconnues des équations litterales déterminées de quelque degré qu'elles puissent être.

Ainsi les Lecteurs apprendront, dans les sept premiers Livres, la maniere de réduire en équations les Problèmes des Mathematiques, & surtout de la Geometrie simple & composée, & des sciences Physico-Mathematiques que l'on a eues principalement en vûe dans cet Ouvrage. Ils apprendront les methodes pour résoudre ces équations & les Problèmes dont elles sont les expressions : Elles leur feront trouver des resolutions exactes, quand cela se peut ; & quand elles ne le pourront pas, elles leur donneront des approximations qu'ils

pourront continuer à l'infini. Enfin ils verront dans le huitième Livre les usages de ces methodes ; & ils y apprendront la maniere de les appliquer à découvrir les propriétés des figures de la Geometrie simple & composée ; & à résoudre les Problèmes de ces Sciences , & les Problèmes des Sciences Physico-Mathematiques.

## AVERTISSEMENT.

**P**OUR former une notion de l'Analyse aux Lecteurs qui commencent, on leur fera remarquer, que dans tous les Problèmes des Mathématiques il y a des grandeurs inconnues que l'on cherche, des grandeurs connues, & des rapports connus entre les grandeurs connues & les inconnues: & que c'est par le moyen de ces rapports connus qu'on peut découvrir les grandeurs inconnues que l'on cherche.

L'Analyse est la science qui contient les méthodes pour découvrir les grandeurs inconnues que l'on cherche. Ces méthodes enseignent à marquer par les lettres de l'alphabet les grandeurs inconnues & les grandeurs connues; à trouver, par le moyen des rapports connus qui sont entre les unes & les autres, des équations qui expriment les Problèmes que l'on veut résoudre, & enfin à résoudre ces équations, c'est-à-dire, à faire découvrir les valeurs des lettres qui marquent les grandeurs inconnues que l'on cherche. C'est ainsi que l'Analyse donne la résolution des Problèmes.

Quand les équations, que l'Analyse fait découvrir pour la résolution des Problèmes, contiennent des lettres qui marquent les inconnues qui ne sont point multipliées par elles-mêmes, ni par d'autres lettres qui représentent d'autres inconnues, ces équations s'appellent simples; & l'Analyse, par rapport à ces équations, s'appelle l'Analyse simple. Le premier Livre explique l'Analyse simple.

Quand les lettres des inconnues sont multipliées par elles-mêmes ou par d'autres lettres des inconnues dans les équations, on les nomme des équations composées; & l'Analyse par rapport à ces équations, s'appelle l'Analyse composée: Elle est le sujet des Livres qui suivent le premier.

Quand l'inconnue ne fait qu'un seul terme de l'équation dont tous les autres termes ne contiennent que des grandeurs connues, si elle est multipliée par elle-même, l'équation est composée, & elle se résout par les méthodes des équations composées; mais comme elle se résout aussi par une simple extraction de racines, on peut la regarder comme une équation simple, qui peut être résolue par l'Analyse simple.

Ceux qui voudront profiter de cet Ouvrage, ne doivent le lire que la plume à la main, & faire eux-mêmes les calculs qu'ils y trouveront.

Pour l'entendre avec plus de facilité, & pour se le rendre propre peu à peu sans se rebuter, ils pourront se contenter dans une première lecture de lire le premier, le second & le troisième Livre jusqu'à la page 92 art. 44, passer tout le reste du troisième Livre, & tout le quatrième Livre, & lire la seule première Section du cinquième Livre. Les connaissances, qu'ils auront acquises dans cette première lecture, suffiront à ceux qui savent les premiers éléments de la Geometrie simple, pour entendre la première & la seconde Section du huitième Livre, où ils verront les usages des méthodes de l'Analyse qu'ils auront apprises, dans la Geometrie simple, dans l'art de jeter les bombes, & dans les Problèmes qui font découvrir les centres d'oscillation des pendules composées pour donner la justesse aux horloges. Ils pourront même entendre la troisième Section du huitième Livre. Ils y trouveront les usages de l'Analyse dans la Geometrie composée, & en même tems ils se formeront une idée de cette science & de toutes les lignes courbes qui en sont l'objet, & ils apprendront les propriétés les plus utiles des courbes les plus simples, qu'on appelle les Sections coniques. Ces connaissances les mettront en état d'entendre les Problèmes des articles 498 & 499. Après quoi ils pourront lire la première Section de la seconde Partie du huitième Livre, où est expliqué le calcul différentiel, jusqu'à l'art. 536; passer aux art. 549, 550 & 551, pour voir l'usage de ce calcul dans les Problèmes qui font trouver les tangentes des courbes; & sans s'arrêter au reste de la seconde Partie du huitième Livre, ils pourront lire la première Section de la troisième Partie où sont expliqués les premiers principes du calcul intégral jusqu'à l'art. 666; enfin, pour voir quelques usages faciles de ce calcul, ils passeront tout le reste de la troisième Partie jusqu'à la dernière Section, dont ils pourront lire les deux premiers Exemples, & passer à la seconde Partie de la dernière Section: ils verront, dans le premier Exemple Physico-mathématique, l'invention des Ovaleaux dont parle M<sup>r</sup> Descartes à la fin du second Livre de sa Geometrie, dont il n'a pas donné l'Analyse. Le second Exemple Physico-mathématique leur apprendra la résolution générale du Problème, où il s'agit, après avoir donné à la première surface d'un verre tel figure qu'on aura voulu, de trouver la figure qu'il faut donner à la seconde surface du même verre, afin que les rayons

# AVERTISSEMENT. xxij

qui partent d'un point déterminé, soient disposées par les refractions qu'ils souffriront à l'entrée & au sortir de ce verre, à s'aller réunir dans un même point déterminé. Ils passeront tout le reste.

Les Lecteurs qui commencent, apprendront, par cette première lecture, les premières méthodes de l'Analyse & ils verront les usages de ces méthodes dans la Geometrie simple & composée, & dans la résolution des Problèmes Physico-mathématiques, en employant le calcul ordinaire de l'Algebre, le calcul différentiel & le calcul integral.

Dans une seconde lecture, si les choses qu'ils auront lues dans la première ne leur sont pas assez familières, ils liront les trois premiers Livres, la première Section du quatrième Livre, la troisième jusqu'à l'art. 66, & la quatrième Section, la première Section du cinquième Livre, la seconde Section jusqu'à l'art. 94, la troisième Section jusqu'à l'art. 104; ils liront ensuite toute la première Partie du huitième Livre; les trois premières Sections de la seconde Partie, excepté l'art. 336. & les suivans jusqu'à l'art. 542; ils passeront la quatrième Section, & ils liront dans la troisième Partie la première Section jusqu'à l'art. 666, ils passeront cet article & les suivans jusqu'à l'art. 714, qu'ils pourront lire avec ce qui reste de la première Section; ils ne liront ni la seconde ni la troisième Section, ni le premier Exemple de la quatrième; mais ils liront le reste de la quatrième Section, & ils pourront entendre les six Exemples Physico-mathématiques qui sont à la fin de la cinquième Section.

Dans une troisième lecture, ils ajoutent à la précédente le sixième & le septième Livre, excepté la cinquième & la sixième Section du septième Livre; & il n'y aura plus rien dans le huitième Livre qu'ils ne puissent entendre; & ils seront en état de faire le choix des Méthodes de l'Ouvrage qu'ils doivent se rendre les plus familières.

Pour entendre tout cet Ouvrage, il ne faut sçavoir que les opérations de l'Algebre sur les grandeurs littérales, c'est-à-dire, il ne faut sçavoir que le seul calcul & les proportions & les progressions. Ces choses sont expliquées dans les Traitez d'Algebre, comme dans les Elémens du Pere Prestet, ou dans le Traité de la Grandeur du Pere Lamy; ceux qui ont la Geometrie latine de M<sup>r</sup> Descartes, peuvent se contenter du petit Traité dont le titre est, Principia Mathematica universalis, qui est au commencement du second Volume. Pour entendre le huitième Livre; il suffit de sçavoir les

*Geometrie simple*, c'est-à-dire, ce qui est contenu dans les six premiers Livres d'Euclide. On donnera dans la suite un *Traité d'Algebre & d'une Geometrie simple*.

Le seul calcul qui n'est pas expliqué dans les *Traitez d'Algebre* dont on vient de parler, est celui des exposans des puissances. On le mettra ici en peu de mots pour la commodité des commençans qui pourront le lire quand ils seront arrivés aux endroits de cet Ouvrage où ils en auront besoin.

Lorsqu'une même grandeur  $a$  est multipliée par elle-même une fois, deux fois, trois fois, & ainsi de suite; les produits  $aa$ ,  $aaa$ ,  $aaaa$ , &c. s'appellent les puissances de cette grandeur. Pour abréger ces expressions, l'on écrit au haut de cette grandeur vers la droite en moindre caractère le nombre qui exprime combien de fois chacun des produits contient la lettre  $a$ , de cette manière  $a^2$ ,  $a^3$ ,  $a^4$ ,  $a^5$ , &c. ces nombres s'appellent les exposans des puissances de la grandeur  $a$ ; ainsi  $a^2$  est la seconde puissance de  $a$ , &  $2$  est l'exposant de la seconde puissance de  $a$ ;  $3$  est l'exposant de la troisième puissance; & ainsi des autres: on donne aussi à la grandeur simple  $a$  l'unité pour exposant, de cette sorte  $a^1$ ; ce qui marque la première puissance de  $a$  qui n'est point multipliée par elle-même. Les grandeurs dont les exposans sont des nombres entiers, s'appellent des puissances entières.

Les racines d'une grandeur  $a$  se marquent ordinairement par le signe  $\sqrt{\phantom{x}}$  avec le nombre au-dessus qui marque si c'est la racine quarree ou seconde, la racine cubique ou troisième, la quatrième, &c. de cette sorte  $\sqrt[3]{a}$ ,  $\sqrt[4]{a}$ ,  $\sqrt[5]{a}$ , &c. Mais pour les réduire au même calcul que les puissances entières, on les marque sans le signe  $\sqrt{\phantom{x}}$ , & l'on écrit, pour leur exposant, une fraction dont le numerateur est l'unité & dont le dénominateur est le nombre si c'est la racine seconde; le nombre  $3$ ; quand c'est la racine troisième, &c. de cette sorte  $a^{\frac{1}{2}}$ ,  $a^{\frac{1}{3}}$ ,  $a^{\frac{1}{4}}$ ,  $a^{\frac{1}{5}}$ , &c. Ainsi  $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a}$  marque la racine seconde de  $a$ ; & ainsi des autres. Par le moyen de ces expressions on peut regarder les racines des grandeurs comme des puissances dont les exposans sont des nombres rompus.

La racine quelconque d'une grandeur  $a^2$ ,  $a^3$ , &c. qui est une puissance entière, se marque en donnant pour exposant à cette grandeur une fraction dont le premier terme est l'exposant de la puissance entière de cette grandeur, & dont le second terme est l'exposant de la racine qu'on veut exprimer. Ainsi la racine seconde de  $a^2$  se marque

marque ainsi  $a^{\frac{1}{2}}$  ; la racine cinquième de  $a$  se marque ainsi  $a^{\frac{1}{5}}$ . Il en est de même des autres.

Pour marquer une puissance en general, on prend une lettre pour exposant ; ainsi  $a^n$  marque une puissance quelconque ; l'exposant (n) représente tel nombre qu'on vaudra, soit entier, soit rompu, & on l'appelle, à cause de cela, un exposant indéterminé. On peut aussi marquer une puissance en general, dont l'exposant est une fraction, de cette manière  $a^{\frac{1}{n}}$ , ce qui signifie  $\sqrt[n]{a}$ , c'est-à-dire la racine quelconque représentée par (n) de la grandeur  $a$ . De même  $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$  marque la racine quelconque, représentée par l'indéterminée n, de  $a$  élevée à la puissance entière dont l'exposant, quelque nombre entier qu'il puisse être, est représenté par l'indéterminée m. Ces exposans indéterminés servent à trouver des résolutions générales qui conviennent à toutes les grandeurs particulières dont les puissances peuvent avoir pour exposans quelque nombre que ce puisse être ; tous ces exposans particuliers pouvant être représentés par l'exposant indéterminé. Ces choses supposées, voici le calcul des puissances par le moyen de leurs exposans.

DE CALCUL DES PUISSANCES DES GRANDEURS  
par le moyen de leurs exposans.

**P**OUR multiplier deux puissances d'une grandeur, il ne faut qu'ajouter les deux exposans de ces puissances, & écrire la somme des exposans pour l'exposant du produit.

Pour diviser une puissance d'une grandeur par une autre puissance de la même grandeur, il ne faut qu'ôter l'exposant du diviseur de l'exposant de la puissance à diviser, & écrire la différence des exposans pour l'exposant du quotient.

Pour multiplier  $a^2$  par  $a^3$ , il faut écrire  $a^{2+3}$  ou  $a^5$  pour le produit. Pour multiplier  $a^2$  par  $a^1$ , il faut écrire  $a^{2+1}$  ou  $a^3$  pour le produit. Pour multiplier  $a^2$  par  $a^{\frac{1}{2}}$ , il faut écrire pour le produit  $a^{2+\frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{2}}$ . Pour multiplier  $a^{\frac{1}{2}}$  par  $a^{\frac{1}{4}}$ , il faut écrire pour le produit  $a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = a^{\frac{3}{4}}$ . De même le produit de  $x^m$  par  $x^n$  est  $x^{m+n}$  ; celui de  $x^m$  par  $x^n$  est  $x^{m-n}$  ; celui de  $x^m$  par  $x^{\frac{1}{n}}$  est  $x^{m+\frac{1}{n}}$  ; celui de  $x^m$  par  $x^{\frac{1}{n}}$  est  $x^{m-\frac{1}{n}}$ . Il en est de même des autres.

Pour diviser  $a^3$  par  $a^2$ , il faut écrire pour le quotient  $a^{3-2} = a^1$ , de même le quotient de  $a^3$  par  $a^1$  est  $a^{3-1} = a^2$ , celui de  $a^3$  divisé par  $a^{\frac{1}{2}}$  est  $a^{3-\frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{2}}$ . Le quotient de  $a^{\frac{3}{2}}$  par  $a^{\frac{1}{2}}$  est  $a^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} = a^1$ . De même le quotient de  $x^m$  par  $x^n$  est  $x^{m-n}$ ; celui de  $x^m$  par  $x^{-n}$  est  $x^{m+n}$ ; celui de  $x^m$  par  $x^1$  est  $x^{m-1}$ ; celui de  $x^{-m}$  divisé par  $x^{-\frac{n}{p}}$  est  $x^{-m+\frac{n}{p}}$ . Il en est de même des autres.

On remarquera qu'il suit de ces opérations, 1°. qu'un exposant négatif marque que la puissance, dont il est l'exposant, est un diviseur, & qu'elle est par conséquent au dénominateur; ainsi  $x^{-1}$

$= \frac{1}{x}$ ,  $x^{-m} = \frac{1}{x^m}$ ,  $x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ,  $x^{m-n} = \frac{x^m}{x^n}$ . Il en est de même des autres.

2°. Que l'on peut dans une fraction, faire passer une puissance du dénominateur au numérateur, ou du numérateur au dénominateur, sans changer la valeur de la fraction. Par exemple au lieu de  $\frac{x^1}{y^1}$ , on peut écrire  $ax^2y^{-1}$ . L'on peut encore écrire  $\frac{a}{x^{-1}y^1}$ . Il en est de même des autres. Ces changemens d'expression peuvent être d'usage dans quelques rencontres.

3°. Que quand on multiplie deux puissances dont les exposans sont négatifs, par exemple  $x^{-\frac{1}{2}}$  par  $x^{-\frac{1}{2}}$ , ce qui donne le produit  $x^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = x^{-1}$ ; cette opération revient à la même chose que si l'on divisoit  $x^{-\frac{1}{2}}$  par  $x^{+\frac{1}{2}}$  car le quotient seroit aussi  $x^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = x^{-1}$ .

4°. Que quand on multiplie la même grandeur ou la même puissance plusieurs fois par elle-même, par exemple  $x^{\frac{1}{2}}$  par  $x^{\frac{1}{2}}$  par  $x^{\frac{1}{2}}$  par  $x^{\frac{1}{2}}$ , il faut écrire, pour exposant du produit, le double de l'exposant quand c'est  $x^{\frac{1}{2}}$  par  $x^{\frac{1}{2}}$ ; le triple, quand c'est  $x^{\frac{1}{2}}$  par  $x^{\frac{1}{2}}$  par  $x^{\frac{1}{2}}$ ; le quadruple, quand c'est  $x^{\frac{1}{2}}$  par  $x^{\frac{1}{2}}$  par  $x^{\frac{1}{2}}$  par  $x^{\frac{1}{2}}$ ;



# AVERTISSEMENT.

xxj

Et ainsi des autres. Car  $x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = x^1 = x$ ,  $x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}$ ,  $x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = x^2$ . Il en est de même des autres. D'où l'on voit que pour élever la puissance d'une grandeur à une puissance dont l'exposant est un nombre entier, il n'y a qu'à multiplier l'exposant de cette puissance par l'exposant de la puissance à laquelle on la veut élever, & l'on aura l'exposant que l'on cherche. Par exemple pour élever  $x^{\frac{1}{2}}$  à la quatrième puissance, il faut écrire  $x^{\frac{1}{2}} \times 4 = x^2$ .

D'où il suit que pour avoir la racine d'une puissance quelconque, il n'y a qu'à diviser l'exposant de la puissance par l'exposant du signe radical de la racine, & le quotient sera l'exposant que l'on cherche. Par exemple pour extraire la racine quatrième marquée

par  $\sqrt[4]{\phantom{x}}$  de  $a^{\frac{1}{2}}$ , il faut écrire pour la racine  $a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$ . C'est la même chose des autres.

Mais  $\frac{1}{2}$  divisé par 4 est la même chose que  $\frac{1}{8}$  multiplié par  $\frac{1}{4}$ ; ainsi en regardant les racines comme des puissances, c'est-à-dire, n'employant pas le signe radical  $\sqrt{\phantom{x}}$  pour marquer les racines, mais leur donnant, comme aux puissances, pour exposant des nombres rompus; alors pour élever une puissance comme  $a^{\frac{1}{2}}$  à une puissance dont l'exposant est un nombre rompu, par exemple  $\frac{1}{4}$ , il ne faut que multiplier l'exposant  $\frac{1}{2}$  de la puissance proposée  $a^{\frac{1}{2}}$  par l'exposant  $\frac{1}{4}$  de la puissance à laquelle on veut élever  $a^{\frac{1}{2}}$ , & l'on aura  $a^{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{8}}$ . Ce qui donne cette règle.

Pour élever une puissance quelconque  $a^n$  à une puissance quelconque dont l'exposant est représenté par  $m$ , il ne faut que multiplier l'exposant  $n$  de la puissance proposée  $a^n$  par l'exposant  $m$  de la puissance à laquelle on veut élever  $a^n$ , & écrire  $a^{mn}$  pour la puissance que l'on cherche.

Pour élever  $a^3$  à la puissance dont l'exposant est  $\frac{1}{2}$ , il faut écrire  $a^{3 \times \frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{2}}$ ; pour élever  $x^n$  à la puissance dont l'exposant est  $-\frac{n}{r}$ , il faut écrire  $x^{-\frac{nn}{r}}$ . Il en est de même des autres.

d. ij,

Voilà le calcul des puissances par le moyen de leurs exposans: voici la raison sur laquelle ce calcul est fondé: les Lecteurs qui savent les propriétés des progressions arithmétiques & des progressions géométriques, l'entendront facilement.

A Progression géométrique des puissances de  $a$ .

$\therefore \frac{1}{a^6}, \frac{1}{a^5}, \frac{1}{a^4}, \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a}, 1, \text{ ou } a^0, a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, \&c.$

B La même.

$\therefore a^{-6}, a^{-5}, a^{-4}, a^{-3}, a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, \&c.$

Toutes les puissances d'une grandeur  $a$  mises de suite, de manière que  $a^0$ , ou, ce qui est la même chose, l'unité soit entre celles dont les exposans sont les nombres entiers positifs pris de suite, & celles dont les exposans sont les mêmes nombres négatifs mis aussi de suite; toutes ces puissances, dis-je, font une progression géométrique.

Les exposans de ces puissances font une progression arithmétique, & zéro qui est entre les exposans positifs & les exposans négatifs, est l'exposant de l'unité ou de  $a^0$  dans la progression géométrique: ainsi il y a deux progressions dans l'expression B; la géométrique est celle des puissances; l'arithmétique est celle des exposans.

Outre les termes marquez dans la progression géométrique B, on en peut concevoir une infinité d'autres de cette manière. Entre  $a^0$  ou l'unité &  $a^1$ , on peut concevoir toutes les puissances infinies de  $a$  dont les exposans sont les nombres rompus positifs moindres chacun que l'exposant 1 de  $a^1$ , comme  $a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{1}{4}}, a^{\frac{1}{5}}, a^{\frac{1}{6}}, a^{\frac{1}{7}}, a^{\frac{1}{8}}, \&c.$  & l'on peut concevoir entre  $a^0$  &  $a^{-1}$  toutes les puissances à l'infini de  $a$ , dont les exposans sont les mêmes nombres rompus moindres chacun que l'unité, mais négatifs.

On peut de même concevoir entre  $a^1$  &  $a^2$  un nombre infini de puissances de  $a$  dont les exposans sont de suite tous les nombres rompus positifs sur qui passent l'unité, & sont moindres que 2. On peut aussi concevoir entre  $a^{-1}$  &  $a^{-2}$  le nombre infini de puissances de  $a$ , dont les exposans sont les mêmes nombres rompus dont on vient de parler, mais négatifs.

Ainsi entre chacun des termes de la progression B & celui qui le suit, ou celui qui le précède, il peut y avoir une infinité d'autres termes qui seront tous les puissances de  $a$ , mais leurs exposans seront

## AVERTISSEMENT. xxiij

des nombres rompus positifs en allant de  $a^0$  vers la droite, & négatifs en allant de  $a^0$  vers la gauche.

Pour faire concevoir que les exposans de ce nombre infini de puissances de  $a$  mises de suite en progression geometrique, sont entr'eux une progression arithmetique, dont la difference est le plus petit nombre qu'on puisse imaginer, il n'y a qu'à faire remarquer une maniere simple de trouver ces termes moyens à l'infini entre les termes marquez dans B. Par exemple pour trouver tous les termes entre  $a^0$  &  $a^1$ , ou entre 1 &  $a^1$ , il n'y a qu'à prendre le terme moyen proportional geometrique  $\sqrt[2]{a}$ , & pour avoir son exposant, il n'y a qu'à prendre le moyen arithmetique proportional entre 0 & 1 qui est  $\frac{1}{2}$ . Ainsi l'on aura  $\dots a^0, a^{\frac{1}{2}}, a^1$ .

On prendra de même la moitié de  $0 + \frac{1}{2}$  qui est  $\frac{1}{4}$ , & la moitié de  $\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$ , laquelle moitié est  $\frac{5}{4}$ , & l'on aura  $\dots a^0, a^{\frac{1}{4}}, a^{\frac{3}{4}}, a^1$ . On conçoit clairement qu'on peut ainsi continuer de prendre des termes moyens proportionels, tant les geometriques que les arithmetiques correspondans, & cela à l'infini; & qu'on peut ensuite, au lieu d'un moyen proportional, prendre deux, trois, quatre, &c. moyens proportionels geometriques entre deux termes voisins, & prendre en même temps les moyens proportionels arithmetiques correspondans qui serviront d'exposans aux geometriques.

En imaginant de la même maniere les moyens proportionels geometriques entre tous les termes voisins & les arithmetiques qui leur servent d'exposans, on verra clairement qu'on peut concevoir une progression geometrique infinie de toutes les puissances de suite d'une grandeur, dont les exposans feront aussi une progression arithmetique.

L'on remarquera que toutes les fois qu'on prendra quatre termes, dans la progression geometrique, qui feront entr'eux une proportion geometrique, les quatre exposans de ces quatre termes feront entr'eux une proportion arithmetique: Et que toutes les fois qu'on prendra plusieurs termes, c'est-à-dire tant de termes qu'on voudra, dans la progression geometrique, qui, quoiqu'eloignez les uns des autres, feront pourtant entr'eux une progression geometrique; les exposans de tous ces termes, pris dans le même ordre, feront entr'eux une progression arithmetique; c'est-à-dire, la même difference regnera dans leur progression.

Mais quand zero est le premier terme d'une proportion arithmétique  $0, 1 : 2, 1 + 2 = 3$ , il faut ajouter le second & le troisième terme, & la somme est le quatrième terme. Quand zero est le quatrième terme d'une proportion arithmétique  $3, 2 : 1, 0$ , il faut retrancher le second terme du premier, & la différence est le troisième terme. Enfin quand zero est le premier ou le dernier terme d'une progression arithmétique  $\div 0, 1, 2, 3, 4; \div 4, 3, 2, 1, 0$ , il faut multiplier le terme le plus proche de zero, qui est la différence de la progression, par le nombre des termes depuis zero non compris, par exemple par 4, si l'on veut le quatrième terme depuis zero non compris, & le produit est le terme que l'on cherche.

C'est la raison des règles qu'on a données pour multiplier & pour diviser deux puissances d'une même grandeur l'une par l'autre par le moyen des exposans; & pour élever une puissance d'une grandeur à une autre puissance dont l'exposant est donné. Car pour multiplier par exemple  $a^2$  par  $a^3$ , il y a une proportion géométrique  $a^0$  ou 1.  $a^2 :: a^3. a^5$ , dont l'unité est le premier terme,  $a^2$  &  $a^3$  sont le second & le troisième terme, & le produit  $a^5$  que l'on cherche est le quatrième terme. Les exposans 0, 2, 3,  $3 + 2 = 5$  font aussi une proportion arithmétique dont zero est le premier terme, les exposans 2 & 3 des grandeurs à multiplier,  $a^2, a^3$ , sont le second & le troisième terme: ainsi ajoutant  $2 + 3$ , la somme 5 est l'exposant du terme  $a^5$  que l'on cherchait.

Pour diviser  $a^3$  par  $a^2$ , il y a une proportion géométrique  $a^3. a^1 :: a^2. a^0$  ou 1, dont  $a^3$  est le premier terme; le diviseur  $a^2$  le second terme; le quotient  $a^1$  que l'on cherche est le troisième terme, & l'unité  $a^0$  ou 1 est le quatrième terme. Les exposans 3, 2, 1, 0, font aussi une proportion arithmétique; le premier terme est 3, le second est 2, le troisième 1 est l'exposant du quotient que l'on cherche, & zero est le quatrième terme; ainsi en retranchant le second terme 2 du premier terme 3, la différence 1 est l'exposant du quotient que l'on cherche.

Pour élever la puissance d'une grandeur comme  $a$  à une puissance dont l'exposant est donné, par exemple à la puissance dont l'exposant est 4, il y a une progression géométrique  $\div a^0$  ou 1,  $a^1, a^2, a^3, a^4$ , dont le premier terme est l'unité, la puissance donnée  $a^4$  est le premier terme après l'unité, & la puissance  $a^4$  que l'on cher-

*che est le quatrième terme après l'unité. Les exposans font aussi une progression arithmétique  $- 0, 1, 2, 3, 4$ , depuis zero ; le premier terme après zero est l'unité, & c'est la difference de la progression ; l'exposant que l'on cherche est le quatrième terme après zero ; & dans une progression arithmétique, la difference étant connue, qui est ici 1, & le nombre des termes après zero, qui est ici 4, il n'y a qu'à multiplier la difference par le nombre des termes depuis zero non compris, & le produit, qui est ici 4, est le terme que l'on cherche de la progression arithmétique, & par conséquent l'exposant de la puissance 2<sup>e</sup> que l'on cherchoit,*

---

## AVIS AU LECTEUR.

**L**A première édition de l'Analyse démontrée du Père RIBNAU, étant devenue très-rare depuis plusieurs années, nous avons cru devoir entreprendre cette seconde édition. Nous n'avons rien négligé pour la rendre aussi correcte que la première. On trouvera dans cette nouvelle édition quelques Remarques de M. de Vaisignon sur l'Analyse démontrée ; nous avons jugé à propos de les insérer à la fin du Tome second, afin que ceux qui ont la première édition de l'Analyse puissent les y joindre.

ANALYSE.

# ANALYSE DEMONTRÉE,

## L I V R E I.

DE L'ANALYSE QUI ENSEIGNE  
à résoudre les Problèmes qui se réduisent  
à des équations simples.



### S E C T I O N I.

*La Méthode de réduire un Problème en équations.*

#### P R O B L È M E I.

1. *RÉDUIRE un Problème en équations; c'est-à-dire exprimer par des équations tous les rapports d'un Problème.*

1°.

Il faut distinguer avec beaucoup d'attention les trois choses que renferme le Problème : 1. Les grandeurs connues : 2. Les grandeurs inconnues qu'on cherche, ou qui servent à faire trouver celles qu'on cherche : 3. Les rapports connus entre les grandeurs connues & les inconnues, ou même ceux qui sont entre les inconnues.

2°. Il faut marquer les grandeurs connues par les premières lettres de l'alphabet *a, b, c, &c.* & les inconnues par les dernières *s, t, v, x, y, z.*

Il est bon aussi de marquer les grandeurs connues & in-

## 2 ANALYSE DEMONTREE.

connues par les premières lettres des noms qui les expriment : Par exemple de marquer un nombre en general par  $n$ , une somme par  $s$ , le temps par  $t$ , la vitesse par  $v$ , une tangente par  $t$ , une soutangente par  $s$ , & ainsi des autres ; cela soulage la memoire.

3°. Il faut supposer le problème comme résolu, en regardant les inconnues comme si elles étoient connues, & trouver par le moyen des rapports connus du Problème, autant d'équations qu'on a supposé d'inconnues. Il faut observer autant qu'on peut, l'ordre naturel dans la formation des équations, c'est-à-dire qu'il faut commencer par les rapports les plus simples, & se servir ensuite par ordre des rapports les plus composés.

### E X E M P L E I.

**T**R O U V E R le quatrième terme d'une proportion, dont on connoît les trois premiers termes.

1°. Je remarque les grandeurs connues qui sont les trois premiers termes connus, la grandeur inconnue qui est le quatrième terme, & les rapports connus entre les grandeurs connues & l'inconnue : dans ce Problème, les rapports connus sont le rapport qui est entre la première & la seconde grandeur connue, & le rapport qui est entre la troisième grandeur connue, & la quatrième qui est l'inconnue qu'on cherche, ces deux rapports sont égaux ; par conséquent le produit des extrêmes est égal à celui des moyens.

2°. Je marque les grandeurs connues par les premières lettres de l'alphabet, & l'inconnue par une des dernières ; de cette manière. Soit le premier terme  $= a$ . Le second  $= b$ . Le troisième  $= c$ . Le quatrième  $= x$ .

3°. Par le moyen des rapports connus, j'ai cette proportion  $a, b :: c, x$ .

Et le produit des extrêmes étant égal à celui des moyens, l'on aura cette équation  $ax = bc$ , qui est celle du Problème,

### E X E M P L E I I.

**T**R O U V E R la somme de tous les termes infinis d'une progression géométrique qui va en diminuant, dont on connoît le premier & le second terme.



1°. Je remarque les grandeurs connues, qui sont le premier terme de la progression qui est le plus grand, & le second terme, la grandeur inconnue qui est la somme de tous les termes infinis de la progression: Je remarque de plus que par la propriété des rapports égaux qui sont entre tous les termes de la progression, la somme de tous les antécédents, qui est ici la somme de tous les termes infinis de la progression, parceque zero est le dernier terme, est à la somme de tous les conséquents, qui est la somme de tous les termes moins le premier, comme le premier terme est au second.

2°. Je marque les grandeurs connues & l'inconnue de cette manière.

Soit le premier terme connu  $= a$ .

Le second  $= b$ .

La somme inconnue de tous les termes infinis  $= s$ .

3°. Je me sers ainsi du rapport connu pour former l'équation du Problème.

La somme de tous les antécédents de la progression qui est égale à  $s - 0$ , c'est-à-dire la somme  $s$ , est à la somme de tous les conséquents qui est  $s - a$ ; comme le premier terme  $a$  est au second  $b$ , & j'ai cette proportion

$$s : s - a :: a : b.$$

Et le produit des extrêmes étant égal à celui des moyens, l'on aura cette équation  $bs = as - aa$  qui est celle du Problème.

### E X E M P L E I I I.

**T**R O U V E R deux grandeurs dont on connoît la somme & la différence.

1°. Soit la somme connue des deux grandeurs inconnues  $= a$ .

Soit leur différence connue  $= d$ .

Soit la première & la plus grande des deux grandeurs inconnues  $= x$ .

La seconde  $= y$ .

2°. Il y a deux rapports connus, le premier est que la somme des deux inconnues est égale à  $a$ , ce qui donne cette première équation  $x + y = a$ .

Le second rapport connu est que la différence des deux

4 ANALYSE DEMONTREE.  
inconnues est égale à  $d$ , ce qui donne cette seconde équation  $x - y = d$ .

L'on a ainsi les deux équations du Problème.

#### R E M A R Q U E.

LORSQU'IL n'y a pas assez de rapports connus pour trouver autant d'équations qu'on a supposé d'inconnues, le Problème a plusieurs résolutions, comme on le fera voir dans la suite, & on l'appelle *indéterminé*.

#### D E F I N I T I O N.

LES grandeurs qui sont des deux côtés du signe  $=$  dans une équation, sont nommées les deux membres de l'équation,  $x - y$  est le premier membre de l'équation  $x - y = d$ , &  $d$  en est le second membre.

#### A V E R T I S S E M E N T.

APRÈS avoir réduit un Problème en équations, il faut faire en sorte que les inconnues des équations se trouvent seules dans le premier membre, & qu'il n'y ait que des grandeurs connues dans le second; ce qui donne la résolution du Problème.

Le dégagement des inconnues des équations, & les préparations pour y arriver, se font par l'addition, la soustraction, la multiplication, la division, l'extraction des racines, &c.

---

## S E C T I O N II.

La Méthode de dégager les inconnues des équations, & de préparer les équations à ce dégagement.

*Usage de l'addition & de la soustraction pour le dégagement des inconnues, & pour y préparer les équations.*

2. L'ADDITION & la soustraction servent à faire passer une ou plusieurs grandeurs d'un membre de l'équation dans l'autre.

Il faut effacer la grandeur qu'on veut faire passer dans le membre où elle est, & l'écrire dans l'autre membre avec un signe contraire à celui qu'elle avoit.

Par exemple, dans l'équation  $bs = as - aa$ , on fera passer  $-aa$  du second membre dans le premier, en l'effaçant dans le second membre, & l'écrivant dans le premier avec le signe  $+$ , & l'on aura  $bs + aa = as$ .

On fera passer de même dans l'équation  $bs + aa = as$ , la grandeur  $+bs$  du premier membre dans le second, en l'effaçant dans le premier, & en l'écrivant avec le signe  $-$  dans le second, & l'on aura  $aa = as - bs$ .

D E M O N S T R A T I O N .

L'ON ne fait dans cette transposition qu'ajouter ou retrancher des grandeurs égales dans chaque membre de l'équation: car en ajoutant  $+aa$  dans chaque membre de l'équation  $bs = as - aa$ , l'on trouve  $aa + bs = as - aa + aa$ , &  $-aa + aa$  étant égale à zero, on l'efface, & il reste  $aa + bs = as$ . Et en retranchant  $+bs$  dans chaque membre de  $aa + bs = as$ , l'on trouve  $aa + bs - bs = as - bs$ , &  $+bs - bs$  étant égal à zero, on l'efface, & il reste  $aa = as - bs$ . Par conséquent les deux membres demeurent toujours égaux après cette transposition.

*Usage de la transposition.*

1. ON peut mettre par transposition toutes les quantités où est l'inconnue dans un membre, & toutes les quantités connues dans l'autre, comme on le voit dans la dernière équation; ce qui servira au dégagement des inconnues.

2. On peut mettre par transposition toutes les quantités d'une équation dans un membre, & zero dans l'autre; ce qui servira dans les Livres suivans. Car en effaçant toutes les quantités d'un membre, & les écrivant avec des signes contraires dans l'autre membre, l'égalité demeure toujours, & zero se trouve seul dans le membre où l'on a effacé toutes les quantités. Par exemple, si l'on a  $xx - ax = ab$ , l'on aura par transposition  $xx - ax - ab = 0$ .

3. On peut rendre positives par le moyen de la transposition, les grandeurs negatives de l'équation, les ôtant du membre où elles sont negatives, & les mettant dans l'autre

avec le signe +, ce qui sert à rendre l'inconnue positive, quand elle est négative, & à faire trouver la valeur positive de l'inconnue.

4. Lorsque la même grandeur se trouve avec le même signe dans chaque membre de l'équation, comme dans cet exemple  $ax + ab = +ab + bc$ , il faut l'effacer, & l'on aura  $ax = bc$ .

*Usages de la multiplication pour préparer les équations, pour en ôter les fractions, & pour en dégager les inconnues.*

3. 1. **L**ORSQUE l'inconnue est divisée par une grandeur connue, comme dans cet exemple  $\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$ , on peut dégager l'inconnue de cette grandeur connue, en multipliant chaque membre par la grandeur  $a$ , par laquelle l'inconnue  $x$  est divisée, & l'on aura  $x = \frac{ab}{c}$ .

2. On peut encore ôter par la multiplication, toutes les fractions d'une équation.

Il faut multiplier les deux membres de l'équation par le dénominateur de la première fraction, & multiplier la nouvelle équation par le dénominateur de la seconde fraction, & ainsi de suite, & l'on trouvera une équation où il n'y aura plus de fractions.

*Exemple.* Il faut ôter les fractions de l'équation  $\frac{x}{a} + \frac{b}{c} = \frac{d}{e}$ .

Je multiplie chaque membre par  $a$ , & je trouve l'équation  $x + \frac{ab}{c} = \frac{ad}{e}$ .

Je multiplie ensuite chaque membre de cette équation par le dénominateur  $c$ , & je trouve  $cx + ab = \frac{acd}{e}$ .

Enfin je multiplie chaque membre de cette équation par le dénominateur  $e$ , & je trouve  $cecx + abe = acd$  où il n'y a plus de fractions.

On peut ôter tout d'un coup toutes les fractions d'une équation, en multipliant chaque membre par le produit de tous les dénominateurs.

Dans l'exemple précédent en multipliant  $\frac{x}{a} + \frac{b}{c} = \frac{d}{e}$  par  $ace$  produit de tous les dénominateurs, l'on trouve l'équation  $\frac{acex}{a} + \frac{abce}{c} = \frac{acd}{e}$ ; dans laquelle effaçant les lettres communes au numérateur & au dénominateur de chaque fraction, l'on aura l'équation sans fractions  $cecx + abe = acd$ , comme on l'avoit trouvée.

D'où l'on voit que si toutes les quantités d'une équation étoient divisées par une même grandeur, il n'y auroit qu'à effacer cette grandeur, & l'équation seroit sans fractions.

3. On peut aussi faire en sorte par la multiplication, qu'une des grandeurs connues, laquelle on voudra, devienne un carré ou une puissance parfaite, en multipliant chaque membre de l'équation par cette même grandeur, ou par sa racine; par exemple, dans cette équation  $axx + abc = c^3$ , on peut rendre la grandeur  $c$  carrée en multipliant chaque membre par  $c$ , & l'on aura  $acxx + abcx = c^4$ .

On peut aussi par ce moyen faire en sorte dans quelques équations, où la plus haute puissance de l'inconnue est multipliée par quelque grandeur connue, que cette grandeur devienne carrée ou une puissance parfaite.

Par exemple, si l'on a l'équation  $axx + abx = bbc$ , on rendra carrée la grandeur  $axx$ , en multipliant chaque membre par la grandeur connue  $a$ , & l'on aura  $aaxx + aabx = abbc$ .

Enfin on pourroit ôter toutes les grandeurs incommensurables d'une équation, lorsqu'elle en a, par le moyen de la multiplication; mais cet usage n'étant que pour les équations composées, il sera mieux placé dans le Livre suivant.

*Démonstration de tous ces usages.*

IL est évident que dans toutes les opérations précédentes, on multiplie les deux membres de l'équation par des grandeurs égales; par conséquent ils sont encore égaux après la multiplication.

*Usages de la division pour préparer les équations, & pour dégager les inconnues.*

4. 1. **L**ORSQUE l'inconnue est multipliée par une grandeur connue dans une équation, comme dans le premier exemple de la première Section, où l'on a trouvé  $ax = bc$ , on dégagera l'inconnue en divisant chaque membre par cette grandeur connue.

Ainsi divisant chaque membre par  $a$ , l'on aura  $x = \frac{bc}{a}$ , ce qui donne la résolution du Problème, où l'on voit que le 4<sup>e</sup> terme d'une proportion étant inconnu, & les trois premiers étant connus, l'on trouvera le 4<sup>e</sup> en divisant le produit du second & du troisième par le premier.

On dégagera de même l'inconnue dans l'équation du second exemple  $bs = as - aa$ ; car par transposition l'on aura  $aa = as - bs$ ; & divisant chaque membre par  $a - b$ , l'on aura  $\frac{aa}{a-b} = s$ . C'est-à-dire si l'on divise le carré du premier terme d'une progression géométrique qui va en diminuant, par le premier terme moins le second, le quotient sera égal à la somme de tous les termes infinis de la progression.

2. Lorsque toutes les quantités d'une équation sont multipliées par une même lettre ou par une même grandeur, on rendra l'équation plus simple, en divisant toutes les quantités qui la composent par cette grandeur commune.

Par exemple, si l'on a l'équation  $axx - abx = bcx$ , en divisant toutes les quantités par  $x$ , l'on aura l'équation plus simple  $ax - ab = bc$ .

3. Lorsque les deux membres d'une équation ont un diviseur commun, on la réduira à une équation plus simple, en divisant chaque membre par leur commun diviseur.

Par exemple, les deux membres de  $axx - aax = abx - aab$ , ont le diviseur commun  $ax - aa$ ; en divisant chacun par  $ax - aa$ , l'on aura l'équation simple  $x = b$ , où l'inconnue est entièrement dégagée.

*Démonstration de tous ces usages.*

IL est évident que dans toutes les opérations précédentes, on divise les deux membres égaux d'une équation par des grandeurs égales; par conséquent ils sont encore égaux après la division.

*Usages de l'extraction des racines pour préparer les équations, & pour dégager les inconnues.*

5. 1. **LORSQUE** le second membre d'une équation ne contient que des grandeurs connues, & que le premier membre où est l'inconnue contient une puissance parfaite, il faut extraire la racine de ces deux membres, & l'on aura une équation plus simple.

L'on a par exemple l'équation  $xx = aa$ , il faut extraire la racine carrée de chaque membre, & l'on aura  $x = a$ . De la même manière en tirant la racine cubique de chaque membre de l'équation  $x^3 = aab$ , l'on aura  $x = \sqrt[3]{aab}$ .

Le

Le premier membre de l'équation  $xx - 2ax + aa = bc$ , est un quarré parfait; ainsi en tirant la racine quarrée de chaque membre, on aura l'équation simple  $x - a = \sqrt{bc}$ , & par transposition  $x = a + \sqrt{bc}$ .

Le premier membre de l'équation  $x^3 - 3axx + 3aax - a^3 = abc$ , est un cube parfait; ainsi en tirant la racine cubique de chaque membre, l'on aura l'équation simple  $x - a = \sqrt[3]{abc}$ , & par transposition  $x = a + \sqrt[3]{abc}$ .

2. Il y a plusieurs équations dont le premier membre deviendroit une puissance parfaite, si on lui ajoutoit une grandeur connue; par exemple, si l'on ajoutoit  $+aa$  au premier membre de l'équation  $xx - 2ax = bc$ , le premier membre seroit le quarré  $xx - 2ax + aa$ ; dans ce cas il faut ajouter à chaque membre la grandeur connue qui rend le premier membre une puissance parfaite, & l'on aura  $xx - 2ax + aa = aa + bc$ ; il faut ensuite tirer la racine de chaque membre, & l'on aura  $x - a = \sqrt{aa + bc}$ , qui est une équation simple, où l'on aura par transposition  $x = a + \sqrt{aa + bc}$ .

De la même maniere si l'on retranche  $b'$  de chaque membre de l'équation  $x^3 - 3bxx + 3bbx = c^3$ , l'on aura l'équation  $x^3 - 3bxx + 3bbx - b^3 = c^3 - b^3$ , dont le premier membre est un cube parfait; ainsi en tirant la racine cubique de chaque membre, on aura l'équation simple  $x - b = \sqrt[3]{c^3 - b^3}$ , & par transposition  $x = b + \sqrt[3]{c^3 - b^3}$ .

Le second usage de l'extraction des racines sert à réduire à des équations simples, toutes les équations où l'inconnue est élevée au quarré dans une des grandeurs de l'équation, & lineaire dans quelqu'autre grandeur, comme l'équation  $xx - ax = ab$ .

Ces équations sont nommées *du second degré*, & l'on y distingue trois termes: le premier est  $xx$ , c'est-à-dire le quarré de l'inconnue; le second est celui où l'inconnue est lineaire, comme  $-ax$ ; le troisiéme & dernier terme est celui qui ne contient que des grandeurs connues, comme  $ab$ .

*La méthode de réduire toutes les équations du second degré à des équations simples: ce qui en donne la résolution.*

6. **P**OUR réduire les équations du second degré à des équations simples, 1°. il faut faire passer les grandeurs tou-

tes connues dans le second membre. 2°. Il faut prendre la moitié de la grandeur connue qui multiplie l'inconnue linéaire dans le second terme. 3°. Ajouter le quarré de cette moitié à chaque membre de l'équation, & le premier membre deviendra un quarré parfait. 4°. Il faut tirer la racine quarrée de chaque membre, & l'on aura une équation simple.

*Exemple.* Il faut réduire l'équation  $xx - ax - ab = 0$  à une équation simple.

1°. Je fais passer la grandeur connue  $-ab$  dans le second membre, & je trouve  $xx - ax = ab$ .

2°. Je prens  $\frac{1}{2}a$ , qui est la moitié de la grandeur connue  $a$  du second terme.

3°. J'ajoute  $\frac{1}{4}aa$ , qui est le quarré de cette moitié, à chaque membre, & je trouve  $xx - ax + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa + ab$ , dont le premier membre est un quarré parfait, qui a pour sa racine  $x - \frac{1}{2}a$ .

4°. Je tire la racine quarrée de chaque membre, & je trouve l'équation simple  $x - \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}aa + ab}$ , & par transposition  $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + ab}$ .

*Troisième usage de l'extraction des racines.*

7. L'ON trouve dans la résolution de quelques Problèmes deux équations, qui étant jointes ensemble, ou retranchées l'une de l'autre, font trouver une équation dont le premier membre où est l'inconnue, est une puissance parfaite; ou bien ces équations étant élevées au quarré, au cube, &c. & ensuite jointes ensemble ou retranchées l'une de l'autre, l'on trouve une équation dont le premier membre où est l'inconnue, est une puissance parfaite: dans ce cas il faut extraire la racine de chaque membre de la dernière équation que l'on a trouvée, & l'on aura une équation plus simple.

*Exemple I.* Si l'on a les deux équations  $x^3 + 3a^2x = b^3$ , &  $3axx + a^3 = c^3$ .

Les ajoutant l'une à l'autre, l'on aura  $x^3 + 3axx + 3a^2x + a^3 = b^3 + c^3$ , dont le premier membre est le cube de  $x + a$ , il faut extraire la racine cubique de chaque membre, & l'on aura l'équation simple  $x + a = \sqrt[3]{b^3 + c^3}$ , & par transposition  $x = -a + \sqrt[3]{b^3 + c^3}$ .



*Exemple II.* L'on a les deux équations  $xx - yy = \frac{1}{3}p$ ,  
&  $x^3 + 3xyy = \frac{1}{2}q$ .

Si l'on élève la première à la troisième puissance, & la seconde au quarré, l'on aura  $x^6 - 3x^4yy + 3xxy^2 - y^6 = \frac{1}{27}p^3$ ,  
&  $x^6 + 6x^4yy + 9xxy^2 = \frac{1}{4}qq$ .

Retranchant le premier membre de la première du premier membre de la seconde, & le second membre de la première du second membre de la seconde, l'on trouve  $9x^4yy + 6xxy^2 + y^6 = \frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3$ , dont le premier membre est le quarré de  $3xxy + y^3$ .

C'est pourquoi tirant la racine quarrée de chaque membre, l'on trouve  $3xxy + y^3 = \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$ .

Enfin ajoutant cette équation à l'équation  $x^3 + 3xyy = \frac{1}{2}q$ , l'on trouve  $x^3 + 3xxy + 3xyy + y^3 = \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$ , dont le premier membre est le cube de  $x + y$ .

C'est pourquoi tirant la racine cubique de chaque membre, l'on trouve l'équation simple  $x + y = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$ .

*Démonstration de tous ces usages.*

**L**ES racines quarrées, ou cubiques, ou quatrièmes, &c. de grandeurs égales, sont égales: or il est évident que dans toutes les opérations précédentes, on tire des racines quarrées, ou cubiques, &c. de grandeurs égales, les grandeurs que l'on trouve sont donc encore égales, & elles font une équation, mais elle est plus simple.

A V E R T I S S E M E N T.

**L**ES opérations précédentes suffisent pour dégager l'inconnue des équations simples, lorsqu'il n'y en a qu'une seule, mais l'on a encore besoin des substitutions, lorsqu'on trouve plusieurs équations simples dans la résolution d'un Problème, qui contiennent plusieurs inconnues.

D E S S U B S T I T U T I O N S.

8. **L**ORSQU'IL n'y a qu'une inconnue dans le premier membre d'une équation, les quantités dont le second membre est composé, sont la valeur de cette inconnue.

Dans l'équation  $x = a + b$ ,  $a + b$  est la valeur de  $x$ .

Substituer la valeur d'une inconnue dans une équation,

c'est y mettre cette valeur à la place de l'inconnue, ou les puissances, ou les racines de cette valeur à la place des semblables puissances, ou des semblables racines de l'inconnue.

D'où il suit, 1<sup>o</sup>, que si l'inconnue est dans l'équation avec le signe + ou —, il faut l'ôter de l'équation, & mettre sa valeur en sa place avec ses signes si l'inconnue a le signe +, avec des signes contraires si l'inconnue a le signe —.

2<sup>o</sup>. Si l'inconnue est multipliée ou divisée dans l'équation par quelqu'autre grandeur, il faut multiplier ou diviser la valeur de l'inconnue par cette grandeur, & la mettre dans l'équation à la place de la grandeur où étoit l'inconnue: ce qui se doit aussi entendre des puissances de l'inconnue, ou de ses racines.

Enfin de quelque maniere que soit l'inconnue dans une équation, il faut y mettre de la même maniere sa valeur à sa place. Tout ceci s'entendra mieux par des exemples.

## E X E M P L E I,

P O U R substituer la valeur de  $y$ , qu'on suppose  $= a - x$ , dans l'équation  $x - y = d$ ; il faut ôter  $-y$  de cette équation, & mettre en sa place sa valeur  $a - x$ , en changeant \* 2 les signes de cette valeur \*, & l'on aura  $x - a + x = d$ ; & en abrégant l'on aura  $2x - a = d$ , & par transposition  $2x = a + d$ , & en divisant chaque membre par deux, l'on aura  $x = \frac{a+d}{2}$ ; ce qui fait voir l'usage des substitutions.

## E X E M P L E II.

P O U R substituer la valeur de  $x$ , qu'on suppose  $= y + 1$ , dans l'équation  $xx - 2x - 3 = 0$ ; il faut, 1<sup>o</sup>, élever chaque membre de  $x = y + 1$  au quarré, & l'on aura  $xx = yy + 2y + 1$ .

2<sup>o</sup>. Multiplier  $y + 1$  valeur de  $x$  par  $-2$ , & l'on aura  $-2x = -2y - 2$ .

3<sup>o</sup>. Il faut mettre dans l'équation  $xx - 2x - 3 = 0$ , à la place de  $xx$  & de  $-2x$ , leurs valeurs, & l'on aura  $yy - 4 = 0$ , au lieu de  $xx - 2x - 3 = 0$ , & par transposition l'on aura  $yy = 4$ , &  $y = 2$ , l'on aura la valeur de  $x$  toute connue, en mettant à la place de  $y$  dans l'équation  $x = y + 1$ , sa valeur 2, car l'on trouvera  $x = 3$ ,

L'operation se fait de cette maniere.

L'équation proposée est  $xx - 2x - 3 = 0$ , l'on suppose  $x = y + 1$ .

L'on aura donc

$$xx = yy + 2y + 1.$$

$$- 2x = - 2y - 2.$$

$$- 3 = - 3.$$

$$\text{Donc } xx - 2x - 3 = 0 = yy - 4 = 0.$$

E X E M P L E III.

ON propose de substituer dans l'équation  $x = \frac{a-1}{c+1}$  la valeur de  $x$  prise dans l'équation  $x = -1 + \frac{\sqrt{ab+a+b+1}}{\sqrt{c+1}}$ , l'on trouve en mettant au lieu de  $x$  sa valeur,

$$x = \frac{a+1 - \frac{\sqrt{ab+a+b+1}}{\sqrt{c+1}}}{-1 + \frac{\sqrt{ab+a+b+1}}{\sqrt{c+1}}} + 1$$

Il faut ensuite abreger cette expression par les operations ordinaires de l'Algebre de cette maniere,

$$\begin{aligned} x &= \frac{a+1 - \frac{\sqrt{ab+a+b+1}}{\sqrt{c+1}}}{-1 + \frac{\sqrt{ab+a+b+1}}{\sqrt{c+1}}} + 1 \\ &= \frac{a+1 \times \sqrt{c+1} - \sqrt{ab+a+b+1}}{-1 + \frac{\sqrt{ab+a+b+1}}{\sqrt{c+1}}} + 1 \\ &= \frac{a+1 \times \sqrt{c+1}}{\sqrt{ab+a+b+1}} - 1 = \frac{\sqrt{a+1} \times \sqrt{a+1} \times \sqrt{c+1}}{\sqrt{a+1} \times \sqrt{b+1}} - 1 \\ &= \frac{\sqrt{a+1} \times \sqrt{c+1}}{\sqrt{b+1}} - 1 = -1 + \frac{\sqrt{ac+a+c+1}}{\sqrt{b+1}}. \end{aligned}$$

L'on aura donc l'expression la plus simple  $x = -1 + \frac{\sqrt{ac+a+c+1}}{\sqrt{b+1}}$ .

*Démonstration des substitutions.*

L'ON met par la substitution des grandeurs égales dans une équation, à la place d'autres grandeurs qu'on en ôte, par conséquent les deux membres de l'équation demeurent toujours égaux,

## SECTION III.

*Où l'on explique la maniere de résoudre entierement les Problèmes simples ou du premier degré, & l'on en apporte plusieurs exemples.*

## PROBLÈME II.

9. *A P R È S avoir réduit un Problème en autant d'équations qu'on a pris d'inconnues; trouver la valeur connue de toutes les inconnues, c'est-à-dire trouver la résolution du Problème.*

*Premiere maniere.*

1°. **O**N écrira toutes les équations du Problème qui expriment tous les rapports connus qui sont entre les inconnues & les connues, & on les nommera les premières équations.

2°. On en prendra une, qu'on écrira à part, l'on prendra la valeur de l'une des inconnues qu'elle contient, & l'on substituera cette valeur à sa place dans toutes celles des premières équations où se trouve cette inconnue, excepté celle où on l'a dégagée; après quoi cette inconnue ne se trouvera plus dans les équations où sa valeur a été substituée; on écrira toutes ces nouvelles équations, & l'on y ajoutera celles des premières équations où l'inconnue qu'on a ôtée, n'étoit point, s'il s'en trouve quelque'une, & on les nommera les secondes équations.

3°. On prendra une de ces équations, que l'on écrira avec celle qu'on a déjà mise à part, on prendra la valeur de l'une des inconnues qu'elle contient, & on la substituera à sa place dans toutes celles des secondes équations où se trouve cette inconnue, ce qui donnera de nouvelles équations où cette inconnue ne se trouve plus. On les écrira, & l'on y ajoutera celles des secondes équations où ne se trouvoit pas cette inconnue, & on les nommera les troisièmes équations, sur lesquelles on operera comme l'on a fait sur les équations précédentes, & l'on continuera l'operation jusqu'à ce qu'on trouve une équation où il n'y ait qu'une seule inconnue.

4°. On prendra la valeur de l'inconnue de cette équation, & on la substituera dans celle des équations mises à part, où il n'y a que cette inconnue & une autre, & il n'y restera que cette autre inconnue, dont on prendra la valeur, qu'on substituera dans une des équations mises à part où il n'y a que cette inconnue avec une autre. En continuant d'opérer de cette manière, on trouvera les valeurs connues de toutes les inconnues, & l'on aura la résolution du Problème.

*Seconde maniere.*

1°. **A**P R È s avoir écrit les premières équations, on prendra toutes les valeurs d'une même inconnue dans toutes celles des premières équations où elle se trouve, & l'on en écrira une à part.

2°. On comparera toutes ces valeurs les unes avec les autres; ce qui donnera de nouvelles équations, qu'on écrira, & l'on y ajoutera celles des premières où n'étoit point cette inconnue, s'il s'en trouve, & l'on aura les secondes équations.

3°. On opérera sur celles-ci comme on a fait sur les premières, & l'on continuera jusqu'à ce qu'on soit arrivé à une équation où il n'y ait qu'une inconnue.

4°. On en prendra la valeur, & on la substituera dans celles des équations mises à part où elle se trouve avec une seule autre inconnue, & l'on continuera, comme dans la méthode précédente, jusqu'à ce qu'on ait les valeurs connues de toutes les inconnues.

R E M A R Q U E.

**L**ORSQU'ON a trouvé la valeur toute connue d'une seule inconnue, si l'on n'avoit pas mis à part les équations dont on a parlé, on trouveroit néanmoins la valeur de toutes les inconnues en substituant la valeur toute connue dans une des équations où il n'y a que l'inconnue qui a cette valeur avec une seconde inconnue, & après la substitution on prendroit la valeur toute connue de la seconde inconnue, & on la substituerait avec la valeur de la première inconnue dans une des équations où il n'y a que les deux premières inconnues avec une troisième; & en continuant cette opération, on trouveroit les valeurs connues de toutes les inconnues.

*Troisième maniere qui sert à abréger les opérations dans plusieurs cas.*

IL arrive quelquefois qu'on trouve tout d'un coup la valeur toute connue de chacune des inconnues du Problème, en ajoutant ensemble deux ou plusieurs des valeurs d'une même inconnue prises dans les premières équations, ou bien en les retranchant les unes des autres. Il faut seulement observer de joindre ensemble les valeurs d'une même inconnue qui forment une équation où les autres inconnues se détruisent par des signes contraires, ou toutes, ou la plupart, comme on le verra dans l'exemple suivant, auquel on appliquera ces trois méthodes.

*Application de la première méthode à un exemple.*

ON suppose qu'en réduisant un Problème en équations, on a trouvé les quatre suivantes.

<i>Premières équations.</i>	<i>Equations mises à part.</i>
1 <sup>o</sup> . $v + x + y = z + a.$	$v = z - x - y + a.$
$v + x + z = y + b.$	$2z = 2y - a + b.$
$v + y + z = x + c.$	$2y = 2x - b + c.$
$x + y + z = v + d.$	

2<sup>o</sup>. On prendra la valeur d'une inconnue, par exemple de  $v$ , dans laquelle on voudra de ces équations comme dans \* 2 la première, & l'on trouvera \*  $v = z - x - y + a$ , qu'on écrira à part, & l'on substituera cette valeur dans les autres équations à la place de  $v$ , & l'on aura les secondes équations où  $v$  ne se trouvera plus.

*Secondes équations abrégées.*

$$2z - 2y + a = b. \quad 2z - 2x + a = c. \quad 2x + 2y = a + d.$$

3<sup>o</sup>. On prendra la valeur d'une inconnue de ces secondes \* 2 équations, comme de  $z$ , & l'on trouvera \*  $2z = 2y - a + b$ ; on l'écrira dans l'ordre des équations mises à part, & l'on substituera cette valeur dans celles des secondes équations où se trouve  $z$ , c'est-à-dire dans la seconde, & l'on aura la première des troisièmes équations, & y ajoutant l'équation  $2x + 2y = a + d$ , les troisièmes équations seront les deux suivantes.

*Troisièmes*

*Troisièmes équations abrégées.*

$$2y - 2x + b = c.$$

$$2x + 2y = a + d.$$

40. On prendra la valeur d'une inconnue de ces troisièmes équations, comme de  $y$ , & l'on trouvera  $ay = 2x - b + c$ . On écrira cette équation dans l'ordre des équations mises à part, & l'on substituera la valeur de  $2y$  dans l'équation  $2x + 2y = a + d$ , & l'on trouvera  $4x = a + b - c + d$ .

Comme l'on est arrivé à une équation qui ne contient qu'une seule inconnue  $x$ , on la dégagera, & l'on trouvera  $x = \frac{a+b-c+d}{4}$ .

On substituera la valeur connue de  $x$  dans l'équation mise à part  $2y = 2x - b + c$ , qui n'a d'inconnues que  $y$  &  $x$ , & l'on trouvera  $2y = \frac{a+b-c+d}{2} - b + c = \frac{a-b+c+d}{2}$ , & en divisant chaque membre de  $2y = \frac{a-b+c+d}{2}$  par 2, l'on aura  $y = \frac{a-b+c+d}{4}$ .

On substituera cette valeur de  $y$  dans l'équation mise à part  $2x = 2y - a + b$ , & après avoir abrégé l'équation qui en viendra, & dégagé l'inconnue  $x$ , on trouvera  $x = \frac{a+b+c+d}{4}$ . Enfin on substituera les valeurs connues de  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , dans l'équation mise à part  $v = z - x - y + a$ , & après avoir abrégé l'équation qui en viendra, & dégagé l'inconnue  $v$ , on trouvera  $v = \frac{a+b+c+d}{4}$ .

Le Problème est entièrement résolu, & l'on a toutes les valeurs connues des grandeurs inconnues,  $x = \frac{a+b+c+d}{4}$ ,  $y = \frac{a-b+c+d}{4}$ ,  $z = \frac{a+b+c+d}{4}$ ,  $v = \frac{a+b+c+d}{4}$ .

*Application de la seconde méthode au même exemple.**Premières équations.*

$$v + x + y = z + a.$$

$$v + x + z = y + b.$$

$$v + y + z = x + c.$$

$$x + y + z = v + d.$$

*Equations mises à part.*

$$v = z - x - y + a.$$

$$2z = 2y + b - a.$$

$$2x = 2y + b - c.$$

1°. On prendra dans les premières équations toutes les valeurs d'une même inconnue, comme de  $v$ , & l'on en mettra une à part. Ces valeurs sont,

$$v = z - x - y + a, \quad v = y - x - z + b, \quad v = x - y - z + c, \quad v = x + y + z - d.$$

2°. On comparera ces valeurs égales les unes avec les autres, & l'on aura les secondes équations.

*Secondes équations abrégées.*

$$2x - 2y = b - a. \quad 2x - 2x = c - a. \quad 2x + 2y = a + d.$$

Les autres équations qu'on pourroit faire des quatre valeurs de  $v$ , sont inutiles, ces trois équations contenant toutes les inconnues du Problème excepté  $v$ , & toutes les connues.

3°. L'on prendra dans les secondes équations toutes les valeurs d'une même inconnue comme de  $x$ , & l'on aura,

$$2x = 2y + b - a. \quad 2x = 2x + c - a.$$

On en écrira une dans l'ordre des équations mises à part, on comparera ces valeurs les unes avec les autres, & on aura les troisièmes équations en y ajoutant l'équation  $2x + 2y = a + d$ , dans laquelle  $x$  ne se trouve point.

*Troisièmes équations abrégées.*

$$2x - 2y = b - c. \quad 2x + 2y = a + d.$$

4°. On dégagera l'inconnue  $x$  dans ces troisièmes équations, & l'on aura  $2x = 2y + b - c. \quad 2x = -2y + a + d.$

On en écrira une dans l'ordre des équations mises à part, & on fera une équation de ces deux valeurs de  $2x$ , & l'on aura l'équation  $4y = a - b + c + d$ , où il n'y a que la seule inconnue  $y$ , en divisant chaque membre par 4, l'on aura  $y = \frac{a-b+c+d}{4}$ .

Enfin on substituera la valeur de  $y$  dans les équations mises à part, & l'on trouvera la valeur de  $x$ , & avec ces deux valeurs, celle de  $x$ , & enfin celle de  $v$ , qui sont,

$$x = \frac{a+b-c+d}{4}, \quad x = \frac{-a+b+c+d}{4}, \quad v = \frac{a+b+c-d}{4}.$$

*Application de la troisième méthode au même exemple.*

*Equations du Problème.*

$$v + x + y = z + a. \quad v + x + z = y + b. \quad v + y + z = x + c. \\ x + y + z = v + d.$$

*Valeurs de v.*

$$v = z - x - y + a.$$

$$v = y - x - z + b.$$

$$v = x - y - z + c.$$

$$v = x + y + z - d.$$

$$\text{Somme } 4v = a + b + c - d.$$

*abrégée.*

*Valeurs de x.*

$$x = z - v - y + a.$$

$$x = y - v - z + b.$$

$$x = v + y + z - c.$$

$$x = v - y - z + d.$$

$$\text{Somme } 4x = a + b - c + d.$$

*abrégée.*



Divisant par 4,  $v = \frac{a+b+c+d}{4}$ . Divisant par 4,  $x = \frac{a+b+c+d}{4}$ .

*Valeurs de y.*

$$y = x - v - x + a.$$

$$y = v + x + z - b.$$

$$y = x - v - z + c.$$

$$y = v - x - z + d.$$

$$\text{Somme } 4y = a - b + c + d.$$

*abregée.*

*Valeurs de z.*

$$z = v + x + y - a.$$

$$z = y - v - x + b.$$

$$z = x - v - y + c.$$

$$z = v - x - y + d.$$

$$\text{Somme } 4z = -a + b + c + d.$$

*abregée.*

Divisant par 4,  $y = \frac{a-b+c+d}{4}$ . Divisant par 4,  $z = \frac{-a+b+c+d}{4}$ .

### A. V E R T I S S E M E N T.

COMME il arrive rarement qu'en joignant ainsi toutes les valeurs d'une même inconnue, l'on trouve sa valeur toute connue, il est bon de remarquer qu'en les joignant deux à deux dans les cas où cela se peut faire, ou trois à trois, &c. il faut choisir celles où les autres inconnues se détruisent par des signes contraires, ou toutes, ou en partie.

### Démonstration de ces trois méthodes.

IL est évident que dans toutes les opérations de ces méthodes, l'égalité se conserve toujours entre les deux membres des équations qu'elles font trouver, & que les inconnues se dégagent les unes après les autres; par conséquent il y a égalité entre les membres des dernières équations où conduisent ces méthodes; ainsi les dernières équations donnent les valeurs toutes connues de toutes les inconnues du Problème.

### R E M A R Q U E.

10. I. LORSQU'ON ne peut pas dégager toutes les inconnues, ce qui arrive lorsqu'on n'a pas pu former autant d'équations qu'on a été obligé de prendre d'inconnues, le Problème est indéterminé, & il peut avoir différentes résolutions; car en mettant des grandeurs arbitraires à la place des inconnues qu'on n'a pas pu dégager, on aura différentes résolutions: il arrive néanmoins quelquefois que les grandeurs arbitraires doivent être entre certaines limites, autrement on trouveroit des résolutions négatives, ou même impossibles; les équations où se trouvent les inconnues à la place.

desquelles on peut mettre des grandeurs arbitraires, feront connoître ces limites.

Par exemple, si en résolvant un Problème, on ne peut trouver d'autre équation que celle-ci,  $y = \frac{ax}{x-b}$ , ce Problème est indéterminé, & en mettant différentes grandeurs arbitraires à la place de  $x$ , on aura différentes résolutions. Cependant il est évident que pour avoir des valeurs positives de  $y$ , il faut que chaque grandeur arbitraire qu'on mettra à la place de  $x$ , soit plus grande que  $b$ .

2. Lorsqu'au contraire on a plus d'équations que d'inconnues, après avoir trouvé les valeurs toutes connues de toutes les inconnues, il faut qu'en mettant ces valeurs dans les équations qui restent, on ne trouve pas d'impossibilité, c'est à-dire qu'on ne trouve pas dans les deux membres de ces équations des grandeurs toutes connues inégales entr'elles; car ce seroit une marque que l'on a supposé quelque impossibilité dans les rapports du Problème qui ont fourni ces équations; comme si dans l'exemple auquel on a appliqué les méthodes, l'on avoit encore eu cette équation de plus que celles qui y sont,  $x + y = e$ . L'on auroit trouvé en substituant dans cette équation, les valeurs toutes connues de  $x$  & de  $y$ , l'égalité  $\frac{a+d}{2} = e$ ; & si la grandeur  $e$  n'étoit pas égale à  $\frac{a+d}{2}$ , on auroit supposé dans le Problème une chose impossible.

*Exemples où l'on résout plusieurs Problèmes simples ou du 1<sup>er</sup> degré.*

I.

11. LA somme  $a$  de deux grandeurs inconnues  $x$  &  $y$ , dont  $x$  est la plus grande, étant connue avec leur différence  $d$ , trouver chacune de ces grandeurs.

Par la supposition  $x + y = a$ , &  $x - y = d$ ; donc  $x = a - y$ , &  $x = d + y$ ; donc  $a - y = d + y$ , & par transposition  $2y = a - d$ , & en divisant chaque membre par 2, l'on aura  $y = \frac{a-d}{2}$ ; substituant cette valeur dans laquelle on voudra des équations précédentes comme dans  $x = a - y$ , l'on trouvera  $x = \frac{a+d}{2}$ .

L'on a donc trouvé que la moitié de la somme de deux grandeurs avec la moitié de leur différence, est égale à la plus grande, & la moitié de la somme moins la moitié de la différence, est égale à la moindre. Ce qu'il faut bien retenir.

## I I.

On propose de trouver trois grandeurs inconnues  $x, y, z$ , qui soient telles qu'en ajoutant une grandeur connue  $a$  à la première  $x$ , elle soit égale aux deux autres, en ajoutant la même grandeur  $a$  à la seconde  $y$ , elle soit égale au produit des deux autres  $x + z$  par un nombre connu  $b$ ; enfin en ajoutant  $a$  à la troisième  $z$ , elle soit égale au produit des deux autres par un autre nombre connu  $c$ . Par la supposition

$$\begin{array}{ll} x + a = y + z & \text{Equations mises à part.} \\ y + a = bx + bz & x = y + z - a. \\ z + a = cx + cy & y = \frac{-2bz + ab + a}{b-1}. \end{array}$$

Donc  $x = y + z - a$ ,  $x = \frac{z}{b} - z + \frac{a}{b}$ ,  $x = \frac{z}{b} - y + \frac{a}{b}$ , en comparant la première de ces valeurs de l'inconnue  $x$  avec les deux autres, l'on aura,

*Secondes équations abrégées.*

$$2z + \frac{b^2 - 1}{b} = \frac{ab + a}{b}, \quad 2y + \frac{a-1}{c} = \frac{a+a}{c}; \text{ en dégageant } y \text{ dans l'une \& dans l'autre, on aura } y = \frac{-2bz + ab + a}{b-1}, y = \frac{-cx + ac + a}{2c}.$$

Comparant ces deux valeurs de  $y$ , on trouvera  $\frac{-2bz + ab + a}{b-1} = \frac{-cx + ac + a}{2c}$ , où dégageant  $z$ , l'on trouvera  $z = \frac{abc + 3ac - ab + a}{3bc + b + c - 1}$ , mettant cette valeur de  $z$  dans  $y = \frac{-2bz + ab + a}{b-1}$ , l'on trouve après avoir abrégé  $y = \frac{abc + 3ac - ab + a}{3bc + b + c - 1}$ , substituant les valeurs connues de  $z$  & de  $y$  dans  $x = y + z - a$ , l'on trouve après avoir abrégé  $x = \frac{-abc + ab + ac + 3a}{3bc + b + c - 1}$ .

Si l'on suppose  $a = 10$ ,  $b = 2$ ,  $c = 3$ , l'on aura  $x = \frac{10}{11}$ ,  $y = 4 \frac{6}{11}$ ,  $z = 6 \frac{4}{11}$ .

## I I I.

Deux nombres qu'on exprimera généralement par  $a$  &  $b$ , étant donnés, trouver un troisième nombre inconnu  $x$ , par lequel les deux  $a$  &  $b$  étant divisés, si l'on ajoute à chaque quotient  $\frac{a}{x}$ ,  $\frac{b}{x}$ , un nombre donné  $c$ , les sommes  $\frac{a}{x} + c$ ,  $\frac{b}{x} + c$ , soient entr'elles comme deux nombres donnés  $m$  &  $n$ , l'on suppose  $a$  moindre que  $b$ , &  $m$  moindre que  $n$ .

Par la supposition  $\frac{a}{x} + c :: \frac{b}{x} + c :: m : n$ ; ce qui donne cette équation  $\frac{an}{x} + cn = \frac{bm}{x} + cm$ ; multipliant toutes les quantités par  $x$ , l'on aura  $an + cnx = bm + cmx$ , & dégageant  $x$ , l'on aura  $x = \frac{bm - an}{cn - cm}$ .

Si l'on suppose  $a = 12$ ,  $b = 36$ ,  $c = 8$ ,  $m = 3$ ,  $n = 5$ , l'on aura  $x = 3$ .

## REMARQUE.

**I**L faut prendre garde en dégageant les inconnues, de faire en sorte que les valeurs toutes connues que l'on trouve, soient positives lorsque cela est possible.

## I V.

On prendra pour quatrième exemple le Problème de la couronne mêlée d'or & d'argent, dont Archimede trouva le mélange sans endomager la couronne. Un ouvrage paroît être d'or, il faut trouver premierement s'il n'y a point d'argent mêlé avec l'or; secondement s'il se trouve du mélange, il faut trouver combien il y a d'or, & combien il y a d'argent dans l'ouvrage sans l'endomager.

On suppose comme une chose démontrée par l'expérience, & dont on donne la raison dans l'Hydrostatique, que les métaux perdent une partie de leur poids dans l'eau, & que l'or en perd moins que l'argent, & que les autres métaux.

Ainsi le poids de l'ouvrage étant connu & nommé  $p$ , il faut prendre un lingot d'or pur, & un lingot d'argent, chacun du poids  $p$  de l'ouvrage, & peser ces trois corps égaux dans l'eau, pour voir la quantité qu'ils y perdent de leur poids; si l'ouvrage en perd plus que l'or & moins que l'argent, l'on est assuré par là qu'il y a du mélange.

Pour le trouver soit nommé  $a$  la quantité que l'argent perd de son poids dans l'eau;  $b$  la quantité qu'y perd l'or pur, &  $c$  la quantité qu'y perd l'ouvrage, & l'on suppose  $c$  plus grand que  $b$ , & moindre que  $a$ .

Soit la quantité inconnue du poids d'argent mêlé dans l'ouvrage  $= x$ .

La quantité inconnue du poids d'or mêlé dans l'ouvrage  $= y$ .

L'on a déjà cette première équation  $x + y = p$ , puisque les deux parties font ensemble la quantité  $p$  du poids de l'ouvrage.

Pour avoir une seconde équation, il faut auparavant faire ces deux proportions.

Le poids  $p$  du lingot d'argent est à la quantité  $x$  du poids d'argent mêlé dans l'ouvrage, comme la perte  $a$  que fait le lingot d'argent de son poids, étant mis dans l'eau, à la perte que fait la partie  $x$  d'argent qui est dans l'ouvrage lorsqu'on le pèse dans l'eau.

$p. x :: a. \frac{ax}{p}$ . ainsi  $\frac{ax}{p}$  est la perte que fait la quantité  $x$  du poids d'argent qui est dans l'ouvrage.

Par un raisonnement semblable à celui qui précède, le poids du lingot d'or pur  $p. y :: b. \frac{by}{p}$ . ainsi  $\frac{by}{p}$  est la perte que fait la quantité  $y$  du poids d'or qui est dans l'ouvrage; mais ces deux quantités de perte  $\frac{ax}{p}$  &  $\frac{by}{p}$  doivent être ensemble égales à la perte  $c$  que fait l'ouvrage étant pesé dans l'eau.

L'on a donc cette seconde équation  $\frac{ax}{p} + \frac{by}{p} = c$ .

Il faut substituer la valeur de  $x$  prise dans la première équation, qui est  $x = p - y$ , dans cette seconde équation, & l'on aura  $\frac{a(p-y)+by}{p} = c$ , où l'on trouvera  $y = \frac{ap-cp}{a-b}$ .

Substituant cette valeur dans  $x = p - y$ , on trouvera  $x = \frac{cp-bp}{a-b}$ .

Si l'on résout chacune de ces égalités en proportion, on trouvera  $a - b. p :: a - c. y.$   $a - b. p :: c - b. x.$

Ce sont les proportions que donne la règle d'alliage.

Si l'on suppose le poids de l'ouvrage  $p = 10$  livres, que l'argent perd la dixième partie de son poids dans l'eau, c'est-à-dire que 10 livres d'argent perdent une livre, l'on aura  $a = 1$  que l'or  $y$  perd la dix-huitième partie de son poids, l'on aura  $b = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$ , que l'ouvrage perd  $\frac{1}{3}$  d'une livre de son poids dans l'eau, c'est-à-dire  $c = \frac{1}{3}$ .

On trouvera que la quantité d'argent mêlé dans l'ouvrage est  $x = 2$  liv.  $\frac{1}{3}$ ; la quantité d'or est  $y = 7$  liv.  $\frac{1}{3}$ .

V.

Trouver entre deux grandeurs données  $a$  &  $b$ , autant de moyennes proportionnelles qu'on voudra, ce nombre de moyennes proportionnelles soit nommé  $n$ .

Il suffit de trouver le premier terme moyen proportionnel, car par la règle de trois, on aura tous les autres.

Soit ce premier moyen  $= x$ .

Suivant ce qui est démontré dans les rapports composés  $a^{n+1}. x^{n+1} :: a. b$ . d'où l'on déduit  $ax^{n+1} = a^{n+1} b$ , divisant chaque membre par  $a$ , l'on aura  $x^{n+1} = a^n b$ ; en tirant la racine dont l'exposant est  $n+1$  de chaque membre, l'on aura  $x = \sqrt[n+1]{a^n b}$ .

Si on demande un seul moyen proportionnel, l'on aura  $n = 1$ , &  $n+1 = 2$ , ainsi  $x = \sqrt{ab}$ .

Si on demande deux moyens, l'on aura  $n = 2$ , &  $n+1 = 3$ , ainsi  $x = \sqrt[3]{a^2 b}$ .

Si on en demande trois, l'on aura  $x = \sqrt[4]{a^3 b}$ , &c.

On prendra un exemple de Physique sur le ressort de l'air pour le sixième.

Soit supposé un tuyau de verre d'une longueur déterminée telle qu'on voudra, comme de 30 pouces, fermé d'un bout, & ouvert de l'autre, qu'on remplisse de mercure à la réserve d'une certaine quantité d'air grossier qu'on y laisse telle qu'on voudra, par exemple de huit pouces: l'on demande après avoir renversé le tuyau, & mis l'ouverture dans un vaisseau plein de mercure, quelle sera la quantité du tuyau qu'occupera l'air qu'on y a laissé après s'être étendu par son ressort, & à quelle hauteur le mercure demeurera suspendu.

On suppose que l'expérience demontre, 1°. que le mercure demeure suspendu à la hauteur de 28 pouces, lorsqu'il n'y a point d'air grossier dans le tuyau; par conséquent l'air extérieur presse le mercure qui est dans le tuyau, & l'empêche de descendre avec une force égale au poids de 28 pouces de mercure. Il presse avec la même force tous les corps qu'il environne, & une portion d'air grossier même est pressée avec la même force par l'air qui l'environne, de manière que s'il arrivoit qu'elle en fût moins pressée, elle s'étendrait par son ressort, & occuperoit un plus grand espace.

2. Que lorsqu'une portion d'air est pressée par deux forces inégales, dont l'une est par exemple double de l'autre, l'espace qu'elle occupe étant pressée par la plus grande, est à celui auquel elle s'étend par son ressort, étant pressée par la moindre, comme réciproquement cette moindre force est à la plus grande; dans cet exemple comme 1 à 2. Ces choses supposées,

Soit la longueur connue du tuyau  $= l$ .

La quantité connue d'air laissé dans le tuyau  $= a$ .

La force entière avec laquelle l'air extérieur presse le mercure, qui est connue & ordinairement égale au poids de 28 pouces de mercure  $= f$ .

La hauteur inconnue de la colonne de mercure qui demeurera dans le tuyau où l'on a laissé l'air  $a$ ,  $= x$ .

La quantité inconnue de l'espace qu'occupera l'air  $a$  laissé dans le tuyau  $= y$ .

Les

Les deux quantités  $x$  &  $y$  des espaces qu'occuperont le mercure & l'air dans le tuyau, seront égales à la longueur du tuyau  $l$ ; ce qui donne cette première équation  $x + y = l$ .

L'air  $a$  laissé dans le tuyau qui occupoit l'espace  $a$  lorsqu'il étoit pressé par la force entière  $f$  de l'air qui l'enviroinnoit, doit s'étendre lorsqu'il n'est plus pressé que par la force  $f - x$ , moindre que  $f$ , c'est-à-dire lorsqu'il est pressé par la force  $f$  de l'air extérieur diminuée par le poids de la colonne de mercure  $x$  qui restera dans le tuyau, car l'air extérieur pressant le mercure  $x$  & l'air qui sont dans le tuyau avec la force  $f$ , le poids du mercure  $x$  diminue l'action de la force  $f$  sur l'air resté dans le tuyau, qui n'y est plus pressé que par la force  $f - x$ .

Or l'espace  $y$  qu'occupera l'air laissé dans le tuyau après s'être étendu, n'étant pressé que par la force  $f - x$ , doit être à l'espace  $a$  qu'il occupoit étant pressé par la force entière  $f$ ; comme réciproquement la force  $f$  est à la force  $f - x$ , ce qui donne cette proportion  $y : a :: f : f - x$ , d'où l'on déduit la seconde équation  $fy - xy = af$ .

Il faut prendre la valeur de  $x$  dans la première équation  $x + y = l$ , & l'on aura  $x = l - y$ .

Il faut substituer cette valeur de  $x$  dans la seconde équation  $fy - xy = af$ , & l'on aura  $fy - ly + yy = af$ , qu'on écrira de cette manière  $yy + fy - ly = af$ .

Pour abréger on supposera  $f - l = -b$ , lorsque  $l$  surpasse  $f$ ; &  $f - l = +b$ , lorsque  $f$  surpasse  $l$ ; & on mettra  $-b$  à la place de  $f - l$  dans le premier cas, & l'on aura  $yy - by = af$ .

Il faut ajouter à chaque membre  $\frac{1}{4}bb$ , & l'on aura  $yy - by + \frac{1}{4}bb = \frac{1}{4}bb + af$ , dont le premier membre est un carré parfait, qui a pour sa racine  $y - \frac{1}{2}b$ ; ainsi en tirant la racine quarrée de chaque membre, l'on aura  $y - \frac{1}{2}b = \sqrt{\frac{1}{4}bb + af}$ , & par transposition  $y = \frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}bb + af}$ . En mettant cette valeur de  $y$  dans  $x = l - y$ , l'on aura  $x = l - \frac{1}{2}b - \sqrt{\frac{1}{4}bb + af}$ , & le Problème est résolu.

Supposant  $30 = l$ ,  $28 = f$ ,  $8 = a$ , &  $28 - 30 = -2 = -b$ , l'on trouvera  $y = 16$ , &  $x = 14$ .

## R É M A R Q U E.

**L'**ON peut souvent abréger les résolutions des Problèmes en se servant de quelques-uns de leurs rapports, pour diminuer le nombre des inconnues, & par conséquent celui des équations. Dans l'exemple précédent, au lieu de prendre la seconde inconnue  $y$ , on auroit pu raisonner ainsi: La longueur du tuyau  $l$  moins la hauteur inconnue de la colonne du mercure  $x$ , est précisément la quantité inconnue de l'espace qu'occupera l'air  $x$  laissé dans le tuyau, ainsi cet espace est  $l - x$ ; ce qui est cause qu'on n'a pas besoin de la première équation, & qu'une seule équation suffit pour la résolution du Problème.



## ANALYSE COMPOSÉE,

O U

ANALYSE QUI ENSEIGNE A RESOUDRE  
les Problèmes qui se réduisent à des équations  
composées.

## L I V R E II.

*Où l'on explique la maniere de réduire les Problèmes en équations, & toutes les équations d'un même Problème à une seule qui en contienne toutes les conditions, & quelques préparations generales des équations composées, pour les résoudre plus facilement, comme les manieres d'en ôter les fractions, les incommensurables, & de trouver leur plus grand diviseur commun.*

## S E C T I O N I.

*Où l'on explique la maniere de réduire un Problème composé sur les nombres ou de Geometrie en équations, & la maniere de réduire toutes les équations d'un Problème à une seule qui ne contienne qu'une inconnue lorsque le Problème est déterminé, ou plusieurs lorsqu'il est indéterminé.*

## A V E R T I S S E M E N T.

CE Traité d'Analyse est principalement pour la Geometrie, où les équations composées sont nécessaires pour résoudre les Problèmes les plus composés, d'une maniere generale & si simple, que les expressions n'occupent point l'esprit, & lui laissent toute son étendue pour découvrir

D ij

tout ce qu'ils ont de plus difficile. Cela oblige de marquer ici en general la maniere de réduire en équations les Problèmes de Geometrie.

## P R O B L È M E I.

12. *REDUIRE un Problème composé en équations, & réduire ensuite toutes les équations d'un Problème à une seule qui contienne tous les rapports du Problème, & dont la résolution donne celle du Problème.*

### P R E M I E R E P A R T I E D U P R O B L È M E.

- \* 1. **S**I le Problème est numerique, on suivra la méthode qui est au commencement du premier Livre\*, c'est-à-dire, on marquera les connues & les inconnues par les lettres qui leur conviennent, & par le moyen des rapports du Problème, on formera autant d'équations qu'on a supposé d'inconnues, lorsque cela se peut.

Si le Problème est de Geometrie, il faut faire la figure propre au Problème, & qui l'exprime comme s'il étoit résolu, c'est-à-dire, il faut y marquer les lignes inconnues comme si elles étoient connues; il faut ensuite tracer dans cette figure des lignes perpendiculaires, parallèles, & autres, selon qu'on les jugera nécessaires pour former des triangles rectangles, des triangles semblables, ou d'autres figures propres à découvrir ce qu'on cherche.

Parmi les lignes de la figure il y en a qui sont connues par la construction ou par la supposition, on les marquera par les premieres lettres de l'alphabet; il y en a d'inconnues qui sont celles qu'on cherche, ou celles qu'on juge pouvoir servir à les trouver; on les marquera par les dernieres lettres de l'alphabet, ou par les premieres lettres de leurs noms.

Les propriétés de la figure, les propositions de la Geometrie sur les triangles semblables, sur les triangles rectangles, &c. & les conditions énoncées dans le Problème, feront connoître les rapports qui sont entre les inconnues & les connues, & l'on s'en servira par ordre pour former autant d'équations qu'on a supposé d'inconnues, lorsque

cela est possible ; & après cela le Problème sera réduit en équations.

Lorsqu'on ne peut former autant d'équations qu'on a supposé d'inconnues, le Problème est indéterminé, & peut recevoir plusieurs résolutions, & souvent même une infinité.

Il est bon de remarquer qu'on peut aussi se servir de quelques-uns des rapports du Problème ou de la figure, pour diminuer le nombre des inconnues, ce qu'il faut toujours faire afin d'abréger.

On concevra mieux ce qu'on vient de dire lorsqu'on en verra l'application dans la Géométrie.

## SECONDE PARTIE DU PROBLÈME.

13. *REDUIRE toutes les équations d'un Problème à une seule qui n'ait qu'une inconnue, lorsque cela se peut.*

**P** A R M I les inconnues qu'on a supposées pour former les équations d'un Problème, il y en a d'ordinaire une principale dont dépend la résolution, & pour laquelle les autres inconnues ont été supposées. Cette principale inconnue doit être celle de l'équation à laquelle on doit réduire toutes les équations du Problème, & il ne faut point la dégager dans les dégagemens particuliers des autres inconnues.

On se servira des deux premières méthodes de la troisième Section du premier Livre, \* pour réduire toutes les équations du Problème à une seule, c'est-à-dire, on prendra dans une des équations du Problème la valeur d'une inconnue qui n'est pas la principale, on la substituera dans les autres, & les nouvelles équations qu'on trouvera n'auront plus cette inconnue ; on ôtera de même de celles-ci une seconde inconnue, & on continuera d'ôter une troisième inconnue, & toutes les autres ensuite, jusqu'à ce qu'on soit arrivé à une équation qui n'ait que la principale inconnue ; ce sera l'équation qu'on cherche.

Ou bien on prendra dans les équations du Problème toutes les valeurs, ou du moins deux valeurs d'une inconnue qui n'est pas la principale ; on comparera ces valeurs égales, ce qui donnera de nouvelles équations qui n'auront plus cette inconnue ; on opérera de même sur ces secondes équations, ce qui en fera trouver de troisièmes où deux in-

nues ne se trouveront plus; enfin on continuera cette operation jusqu'à ce qu'on soit arrivé à une équation qui n'ait que la principale inconnue; ce sera l'équation qu'on cherche.

Dans les Problèmes indéterminés, la dernière équation qui renferme toutes les conditions ou rapports du Problème, aura plusieurs inconnues.

*Application de ces méthodes à un exemple.*

ON suppose qu'on a réduit un Problème à ces trois premières équations qui en expriment tous les rapports, & dont  $y$  est la principale inconnue qui doit se trouver dans la dernière équation qu'on cherche.

*Premieres équations.*

$$x - yy + v = -p. \quad -xy + vy = -q. \quad vx = r.$$

Pour les réduire à une seule équation dont  $y$  soit l'inconnue, je prens par la première méthode la valeur de  $x$  dans

\* 2. la première équation, & je trouve \*  $x = yy - v - p$ .

\* 8. Je substitue \* cette valeur de  $x$  dans les deux autres équations, & je trouve les secondes équations dans lesquelles  $x$  n'est plus.

*Secondes équations abrégées.*

$$2vy = y^3 - py - q. \quad vyy - vv - pv = r.$$

Je prens dans la première de ces équations la valeur

\* 4. de  $v$ , & je trouve \*  $v = \frac{y^3 - py - q}{2y}$ , dont le quarré est  $vv = \frac{y^6 - 2py^4 - 2qy^3 + pp^2y + 2pqy + qq}{4y^2}$ .

\* 8. Je substitue \* les valeurs de  $v$  & de  $vv$  dans l'équation  $vyy - vv - pv = r$ , & je trouve l'équation  $+\frac{y^3 - py^3 - qq}{2y} - \frac{y^6 - 2py^4 - 2qy^3 + pp^2y + 2pqy + qq}{4y^2} - \frac{y^3 + pp^2y + pq}{2y} = r$ , dans laquelle il n'y a plus d'autre inconnue que la principale  $y$ ; ainsi c'est l'équation qu'il falloit trouver.

*Autrement.*

*Premieres équations.*

$$x - yy + v = -p. \quad -xy + vy = -q. \quad vx = r.$$

\* 2 & 4. Je prens \* deux valeurs de la même inconnue  $v$  dans les deux premières équations, & je trouve  $v = yy - x - p$ .

$$v = \frac{y^2 - 1}{2}.$$

Je fais une équation de ces deux valeurs, & je trouve  $yy - x - p = \frac{y^2 - 1}{2}$ , où l'inconnue  $v$  n'est plus.

Je multiplie chaque terme par  $y$ , & je trouve  $y' - py + q = 2xy$ . \* 3.

Je prens la valeur de  $z$ , & j'ai  $z = \frac{y' - py + q}{2y}$ . \* 2.

Je prens dans l'équation  $vz = r$ , dont je ne me suis pas encore servi, la valeur de  $z$ , & j'ai  $z = \frac{r}{v}$ . \* 4.

Je fais des deux valeurs de  $z$ , l'équation  $\frac{y' - py + q}{2y} = \frac{r}{v}$ .

Je réduis les deux membres au même dénominateur, & après avoir effacé le dénominateur commun, je trouve  $vy' - pvy + qv = 2ry$ .

Je prens la valeur de  $v$ , & j'ai  $v = \frac{2ry}{y' - py + q}$ . \* 4.

Je substitue les valeurs de  $z$  & de  $v$ ,  $z = \frac{y' - py + q}{2y}$ ,  $v = \frac{2ry}{y' - py + q}$ , qui n'ont point d'autres inconnues que la principale  $y$  dans la première, ou dans la seconde des premières équations, il n'importe laquelle. Je la substitue, dis-je, dans la première  $z - yy' + v = -p$ , & je trouve  $\frac{y' - py + q}{2y} - yy' + \frac{2ry}{y' - py + q} = -p$ , qui est l'équation qu'il falloit trouver. \* 8.

On auroit pu prendre dans les trois premières équations les trois valeurs de la même inconnue  $v$ , & les comparant ensemble, en faire deux équations, où il n'y auroit eu d'inconnue que  $z$  avec la principale  $y$ , & prendre dans ces deux équations, deux valeurs de  $z$ , qui étant comparées, auroient donné l'équation où il n'y auroit eu que l'inconnue principale  $y$ ; mais le calcul en auroit été un peu plus embarrassé.

On ne met pas d'autres exemples, on en verra assez dans la suite, & dans la Geometrie.

### DEMONSTRATION.

IL est évident que l'on conserve toujours l'égalité dans toutes les opérations du Problème, & qu'ayant employé toutes les équations du Problème à former la dernière, cette dernière équation renferme tous les rapports exprimés par toutes les équations du Problème. Enfin il est évident que la résolution de cette dernière équation donnera celle de toutes les équations du Problème.

## SECTION II.

Où l'on explique la maniere d'ôter toutes les fractions de l'équation du Problème. L'on y explique aussi toutes les définitions des équations composées.

## PROBLÈME II.

14. ÔTER toutes les fractions d'une équation composée.

IL faut réduire toutes les grandeurs de l'équation à un même dénominateur, & ensuite effacer le commun dénominateur, & abréger l'équation en effaçant les grandeurs qui se détruisent par des signes contraires, en joignant ensemble les mêmes grandeurs, & en divisant toutes les grandeurs par les lettres communes, & l'on aura l'équation sans fractions.

Par exemple, pour ôter les fractions de l'équation  $\frac{y^3 - py + 1}{2y} - yy + \frac{2y^2}{y^2 - py + 1} = -p$ , on réduira toutes les grandeurs de l'équation au dénominateur commun  $2y^4 - 2p yy + 2qy$ , & l'on aura,

$$\frac{y^5 - py^4 + qy^3 - py^4 + pp yy - p^2 y + qy^3 - p^2 y + qy - 2y^5 + 2p y^4 - 2q y^3 + 4q y}{2y^4 - 2p yy + 2qy} = \frac{-2p y^4 + 2pp yy - 2p^2 y}{2y^4 - 2p yy + 2qy}.$$

On effacera le dénominateur commun, & toutes les quantités qui se détruisent par des signes contraires, & l'on joindra ensemble les mêmes quantités, & on aura  $-y^4 + 2py^4 - ppyy + 4ryy + qq = 0$ ; & en faisant passer toutes les quantités dans le second membre, afin que  $y^4$  soit positive, on aura  $0 = y^4 - 2py^4 + ppyy - 4ryy - qq$ .

On a démontré ces opérations dans le premier Livre.

On ôtera de la même maniere les fractions de l'équation  $\frac{y^3 - py^3 - qyy}{2y} - \frac{y^4 + 2p y^4 + 2q y^3 - ppyy - 2p^2 y - qy}{4y^3} - \frac{py^3 + ppy + pq}{2y} = r$ , en multipliant les numérateurs  $y^3 - py^3 - qyy$ , &  $-py^3 + ppy + pq$  par  $2y$ , &  $r$  par  $4yy$ ; & après avoir effacé le commun dénominateur,  $4yy$ , & abrége l'équation, on trouvera la même équation  $y^4 - 2py^4 + ppyy - 4ryy - qq = 0$ .

DÉFINITIONS.

## DEFINITIONS.

## I.

15. UNE équation *ordonnée* est celle où la plus haute puissance de l'inconnue est la première, & les autres puissances de la même inconnue sont de suite, selon leurs degrez; ainsi  $x^4 - ax^3 + abxx - aacx + c^4 = 0$ , est une équation ordonnée.

## I I.

On appelle les *termes* d'une équation, les grandeurs où l'inconnue a différens degrez; & un seul *terme*, les grandeurs où l'inconnue est élevée à un même degré. Quand il y a plusieurs grandeurs dans un même terme, on les écrit toutes les unes sous les autres. Les grandeurs connues qui multiplient l'inconnue dans les termes, s'appellent les *coëfficients*.

Le premier terme est celui où se trouve la plus haute puissance de l'inconnue; le second est celui où se trouve la puissance suivante de l'inconnue, & ainsi de suite jusqu'au dernier terme, qui est toujours celui où il n'y a que des grandeurs toutes connues, comme dans cet exemple,

$$\begin{array}{r} x^3 - axx + abx - abc = 0. \\ -b \quad + ac. \\ -c \quad + bc. \end{array}$$

Le premier terme est  $x^3$ ; le second est  $-a - b - c \times xx$ ; le troisième est  $ab + ac + bc \times x$ ; le dernier terme est  $-abc$ .  $-a - b - c$  sont le coëfficient du second terme;  $+ab + ac + bc$  sont le coëfficient du troisième terme: L'unité est le coëfficient du premier terme  $x^3 = 1 \times x^3$ , lorsqu'il ne contient que la plus haute puissance de l'inconnue; pour abréger, on n'écrit ordinairement qu'une seule fois l'inconnue dans un terme lorsqu'il renferme plusieurs grandeurs.

Lorsqu'il y a de l'interruption dans la suite des puissances de l'inconnue, comme dans  $x^3 - abx + abc = 0$ , on dit que les termes où se trouve l'interruption, manquent dans l'équation, ou sont évanouis; ainsi le second terme manque dans  $x^3 - abx + abc = 0$ , &  $-abx$  demeure toujours le troisième terme.

Le troisième terme est évanoui dans  $x^3 - axx + abc = 0$ .

## I I I.

16. On distingue les équations en différens degrez. Les

équations simples, ou du premier degré, ou lineaires, sont celles où l'inconnue est au premier degré; ainsi  $x - a = 0$  est du premier degré. Les équations du second degré sont celles où la plus haute puissance de l'inconnue est élevée au quarré,  $xx - ax + ab = 0$ , est une équation du second degré.

Les équations du 3<sup>e</sup>, du 4<sup>e</sup>, du 5<sup>e</sup> degré, &c. sont celles où la plus haute puissance de l'inconnue est une 3<sup>e</sup>, ou une 4<sup>e</sup>, ou une 5<sup>e</sup> puissance, &c.

## I V.

La plus haute puissance de l'inconnue, & toutes ses autres puissances dans les termes suivans, peuvent être les puissances exactes du moindre degré de l'inconnue qui est dans le penultième terme; par exemple, dans l'équation  $x^5 - ax^4 + abxx - aabc = 0$ , en regardant le moindre degré de l'inconnue dans le penultième terme qui est  $xx$ , comme lineaire,  $x^5$  est sa troisième puissance,  $x^4$  est sa seconde puissance. Dans ce cas le degré de l'équation est celui de la plus haute puissance du moindre degré  $xx$  de l'inconnue; ainsi l'équation  $x^5 - ax^4 + abxx - aabc = 0$ , n'est que du troisième degré, parceque  $x^5$  n'est que la troisième puissance du moindre degré  $xx$  de l'inconnue.

Ainsi  $x^{2p} - aax^p + aab^p = 0$ , est une équation du second degré, parceque  $x^{2p}$  est le quarré de  $x^p$ .

De même  $x^{3p} - aax^{2p} + aabx^p - a^3b^p = 0$ , est du troisième degré, parceque  $x^{3p}$  est le cube, &  $x^{2p}$  le quarré de  $x^p$ .

Mais  $x^5 - ax^4 + abcxx - a^3bcc = 0$ , est du sixième degré, parceque les puissances exactes du moindre degré  $xx$ , ne sont pas de suite.

## C O R O L L A I R E.

**L**O R S Q U' I L ne manque aucun terme dans une équation, il y a autant de termes plus un, que l'équation a de degrez; ainsi il y a deux termes dans une équation du premier degré; il y en a trois dans une équation du second degré; quatre dans une équation du troisième degré, &c.

Car tous les degrez de l'inconnue font autant de termes que la plus haute puissance de l'inconnue a de degrez, & les grandeurs toutes connues en font une autre qui est le dernier terme.



## D E F I N I T I O N V.

17. SI tous les termes d'une équation ont chacun le même nombre de dimensions, on dit qu'ils sont *homogenes*; ainsi tous les termes de  $x^4 - ax^3 + abxx - a^2cx + a^3d = 0$ , sont homogenes, parceque chaque terme est de quatre dimensions: mais les termes de  $x^4 - ax^3 + bxx - cx + d = 0$ , ne sont pas homogenes; & l'on dit alors que *la loi des homogenes n'est pas observée*.

Cette loi des homogenes doit être observée autant qu'il est possible dans les équations des Problèmes de Geometrie, parcequ'on ne compare pas, par exemple, des grandeurs planes ou de deux dimensions, quand elles expriment des surfaces, avec des grandeurs solides ou de trois dimensions, lorsqu'elles expriment des figures solides.

## R E M A R Q U E I.

C E P E N D A N T lorsque les produits qui sont les termes des équations, n'expriment que des lignes dont les rapports composez avec l'unité ou avec d'autres lignes, sont exprimez par le produit de plusieurs grandeurs, l'on peut comparer des rapports plus composez entre des lignes, avec des rapports moins composez, & même simples, entre d'autres lignes; ainsi l'on peut comparer ensemble des grandeurs de différentes dimensions, & où la loi des homogenes n'est pas observée.

On peut aussi dans ce cas conserver toujours, si l'on veut, la loi des homogenes, en concevant les moindres produits multipliez par l'unité autant de fois qu'il le faut, pour les rendre homogenes avec les produits d'un plus grand nombre de dimensions; ainsi on rendra  $+ bxx$  homogene avec  $- ax^3$  en écrivant  $+ 1xbxx$ . De même on pourra écrire  $- 1 \times 1 \times cx$ , &  $1 \times 1 \times 1 \times d$ , pour rendre les termes  $- cx + d$ , homogenes avec les autres.

On verra dans la Geometrie les moyens de rendre homogenes tous les termes d'une équation, en conservant leur même valeur.

## R E M A R Q U E I I.

U N des grands avantages de l'Analyse est de ne pas partager inutilement l'esprit; c'est pourquoi elle réduit les

Problèmes les plus composez à des expressions si simples; que toute l'attention de l'esprit n'est qu'aux grandeurs inconnues qu'il cherche: ainsi pour empêcher que les grandeurs connues sur lesquelles il ne reste plus rien à découvrir, ne partagent l'attention, on exprime par une seule lettre toutes les grandeurs connues d'un même terme,

Par exemple, on abrégera l'équation

$$x^3 - axx + abx - abc = 0,$$

$$-b \quad + ac.$$

$$-c \quad + bc.$$

En supposant toutes les grandeurs connues  $-a - b - c$  du second terme égales à une seule lettre  $-n$ ; en supposant toutes les grandeurs connues  $+ab + ac + bc$  du troisième terme égales à une seule lettre  $+p$ ; & toutes les connues  $-abc$  du quatrième terme à une seule lettre  $-q$ , l'on aura  $x^3 - nxx + px - q = 0$ , au lieu de l'équation proposée.

L'on voit bien que la loi des homogènes n'est pas moins observée dans cette expression simple, que dans l'expression composée, parceque la lettre  $p$ , par exemple, est dans le troisième terme à la place d'une grandeur connue de deux dimensions, &  $q$  dans le quatrième à la place d'une grandeur connue de trois dimensions.

#### DEFINITION VI.

UNE équation ainsi abrégée s'appelle une *formule*, c'est-à-dire une expression générale & abrégée de toutes les équations du même degré, qui auroient le même nombre de termes, & la même diversité dans leurs signes.

#### COROLLAIRE I.

18. TOUTE la diversité des équations d'un même degré ne pouvant venir que de ces deux choses: 1. de ce qu'il manque quelques termes dans les unes qui ne manquent pas dans les autres; 2. de la diversité des signes  $+$  &  $-$  qui précèdent les termes, on peut réduire toutes les équations d'un même degré à un nombre déterminé de formules.

Par exemple, en supposant que le premier terme a toujours le signe  $+$ , toutes les équations du second degré se peuvent réduire aux suivantes.

$$xx - p = 0. \quad xx + p = 0. \quad xx - nx + p = 0. \quad xx + nx + p = 0. \quad xx - nx - p = 0. \quad xx + nx - p = 0.$$

Dans ces équations  $n$  marque la quantité connue du second terme, &  $p$  la quantité connue du troisième.

L'avantage de ces formules est que leur résolution donnera la résolution de toutes les équations particulières du second degré, en mettant dans la résolution à la place de  $n$  & de  $p$ , les grandeurs connues du second & du troisième terme des équations particulières.

On peut de même réduire les équations du troisième degré, du quatrième, &c. à un nombre déterminé de formules.

## C O R O L L A I R E I I.

ON peut même réduire toutes les équations d'un même degré à une seule formule, pour abréger tous les cas; par exemple, la seule formule  $xx + nx + p = 0$ , peut représenter toutes les équations du second degré,  $x^3 + nxx + px + q = 0$  peut représenter toutes les équations du troisième degré, &  $x^4 + nx^3 + pxx + qx + r = 0$ , toutes celles du quatrième degré, & ainsi des autres; & cela, en supposant deux choses, 1<sup>o</sup>. que quelques termes de la formule sont nuls ou égaux à zéro, lorsqu'elle représente les équations où il manque des termes; 2<sup>o</sup>. Que quand quelques termes des équations ont +, & les autres —, il faut donner aux termes de la formule qui leur répondent, les mêmes signes.

Par exemple, afin que la formule  $x^3 + nxx + px + q = 0$  représente l'équation  $x^3 - abx + abc = 0$ , il faut, 1<sup>o</sup>. supposer dans la formule, le second terme  $+nxx = 0$ . 2<sup>o</sup>. Il faut supposer que  $px$  dans la formule a le signe —, &  $q$  le signe +: il en est de même des autres.

Enfin on peut se servir d'une seule formule pour chaque degré où tous les termes aient le signe +; par exemple  $xx + nx + p = 0$ , sera la formule générale du second degré;  $x^3 + nxx + px + q = 0$ , celle du troisième, & ainsi des autres: En supposant ces deux choses, 1<sup>o</sup>. que lorsqu'elle représente des équations où il manque des termes, ces mêmes termes sont nuls ou égaux à zéro dans la formule. 2<sup>o</sup>. Que le signe + de chaque terme de la formule représente le signe + ou — du même terme de chaque équation particulière du même degré, selon qu'il se trouve dans chaque équation.

Ainsi  $x^3 + nxx + px + q = 0$ , représente l'équation particulière  $x^3 - abx - abc = 0$ , en supposant, 1<sup>o</sup>. le second terme de la formule  $+nxx = 0$ , & 2<sup>o</sup>. que les signes + devant  $+px + q$ , représentent les signes — qui sont devant  $-abx - abc$ .

Et dans la formule que donnera la résolution de  $x^3 + nxx + px + q = 0$ , on supposera les grandeurs où sera  $n$ , égales à zero, & on donnera aux grandeurs où seront  $p$  &  $q$ , des signes oppoiez ; mais on laissera les signes + devant les puissances paires de  $p$  & de  $q$ , & on les changera devant leurs puissances impaires.

Après cela il ne faudra plus que substituer dans la formule de la résolution de  $x^3 + nxx + px + q = 0$ , les grandeurs de l'équation particulière, à la place de  $n, p, q$ , qui les représentent dans la formule generale.

Cette maniere abregé les cas, & rend les résolutions generales, comme on le verra dans le cinquième Livre, où l'on expliquera la résolution particulière des équations de chaque degré.

## SECTION III.

*Où l'on explique la maniere d'ôter les incommensurables des équations des Problèmes composéz, lorsqu'elles en ont.*

### AVERTISSEMENT.

**L**ORSQUE l'inconnue de l'équation est incommensurable, c'est-à-dire lorsqu'elle est sous le signe radical, il est nécessaire de la rendre commensurable pour connoître de quel degré est l'équation ; lorsqu'il n'y a d'incommensurables que les grandeurs connues de l'équation, & que l'inconnue ne l'est pas, on connoît alors de quel degré est l'équation, sans ôter les incommensurables, & l'on pourroit résoudre l'équation sans les ôter ; néanmoins comme il est ordinairement plus facile de résoudre l'équation, lorsqu'il n'y a point d'incommensurables, les méthodes qui suivent peuvent servir à les ôter toutes.

## PROBLÈME III.

19. *OSTER les incommensurables d'une équation lorsqu'il y en a  
Première manière.*

1<sup>o</sup>. **I**L faut mettre une des grandeurs incommensurables seule dans le premier membre, & toutes les autres quantitez dans le second, & élever chaque membre à la puissance marquée par l'exposant du signe radical du premier membre, & la grandeur du premier membre deviendra commensurable. S'il reste des incommensurables dans le second membre, 2<sup>o</sup>. il faut en mettre une seule dans le premier membre, & toutes les autres quantitez dans le second, & faire sur cette équation l'opération précédente, qui ôtera une seconde incommensurable. En continuant cette opération, on ôtera toutes les incommensurables.

Lorsqu'il y a plusieurs incommensurables de différens degrez, on mettra une lettre seule pour chaque incommensurable; ce qui abregera le calcul, comme on le verra dans les exemples.

On abregera encore le calcul, en mettant après chaque opération une lettre à la place de toutes les grandeurs devenues commensurables, & dans la dernière opération on restituera les valeurs des lettres qu'on a mises pour débarrasser le calcul.

## E X E M P L E S.

I.

**P**OUR ôter les incommensurables de  $\sqrt{xx} = \sqrt{ax + bb}$ , on élèvera chaque membre au quarré, & l'on aura  $xx = ax + bb$ , où il n'y a plus d'incommensurables.

II.

Pour ôter les incommensurables de  $x + \sqrt[3]{aax} = b$ , on fera 1<sup>o</sup>.  $\sqrt[3]{aax} = b - x$ . 2<sup>o</sup>. On élèvera chaque membre à la troisième puissance, parceque l'exposant de  $\sqrt[3]{}$  est 3, & l'on aura  $aax = b^3 - 3bbx + 3bxx - x^3$ , où il n'y a plus d'incommensurables.

III.

Pour ôter les incommensurables de  $\sqrt[3]{aax + \sqrt{a^3x^3}} = x - c$ , 1<sup>o</sup>. il faut élever chaque membre à la troisième puissance & l'on aura  $aax + \sqrt{a^3x^3} = x^3 - 3cxx + 3ccx - c^3$ .

2°. Après avoir mis  $\sqrt{a^3x}$  seule dans le premier membre,  $\sqrt{a^3x} = x' - 3cx + 3ccx - c^2 - aax$ , il faut élever chaque membre au quarré, & l'on aura  $a^3x' = x^2 - 6cx^2$ , &c. où il n'y a plus d'incommensurables.

## I V.

Pour ôter les incommensurables de  $x + \sqrt[3]{aax} = \sqrt{ax}$ , on supposera  $n = \sqrt[3]{aax}$ , ce qui donne  $n^3 = aax$ , &  $m = \sqrt{ax}$ , ce qui donne  $mm = ax$ , & l'on aura  $x + n = m$ , au lieu de  $x + \sqrt[3]{aax} = \sqrt{ax}$ .

Ensuite on fera par transposition  $n = m - x$ , & on élèvera chaque membre à la troisième puissance marquée par l'exposant  $\sqrt[3]{}$  du signe radical de  $\sqrt[3]{aax} = n$ , & l'on aura  $n^3 = m^3 - 3mmx + 3mxx - x^3$ , & par transposition  $n^3 + 3mmx + x^3 = m^3 + 3mxx$ , où  $n^3 + 3mmx$ , &  $+x^3$  sont commensurables.

Pour débarasser le calcul, on supposera les grandeurs commensurables  $n^3 + 3mmx + x^3 = f^3$ , afin de n'avoir attention qu'aux seules incommensurables  $m^3 + 3mxx$ , & l'on aura  $m^3 + 3mxx = f^3$ . On élèvera chaque membre au quarré, parce que l'exposant de l'incommensurable  $m = \sqrt{ax}$  est 2, & l'on aura  $m^6 + 6m^4xx + 9mmx^2 = f^6$ , où il n'y a plus d'incommensurables. Enfin on substituera à la place de  $f, m, n$ , leurs valeurs, & l'on aura  $a^3xx + 6a^3x^3 + 9aax^4 + 2aax^4 + 6ax^5 + x^6 = a^3x^3 + 6aax^4 + 9ax^5$ ; & en l'abregeant on aura  $x^6 - 3ax^5 + 5aax^4 + 5a^3x^3 + a^4xx = 0$ , ou bien  $x^6 - 3ax^5 + 5aax^4 + 5a^3x^3 + a^4 = 0$ , où il n'y a plus d'incommensurables.

*Seconde maniere, lorsque l'équation contient plusieurs incommensurables.*

1°. IL faut supposer une lettre égale à chaque grandeur incommensurable, ce qui donnera autant d'équations qu'il y a d'incommensurables. Il faut en ôter les incommensurables par la premiere maniere, & l'on aura de nouvelles équations où les puissances des lettres supposées seront égales à des grandeurs commensurables; on les appellera les équations commensurables.

2°. Il faut mettre les mêmes lettres dans l'équation proposée; & après avoir mis dans le premier membre la seule lettre, qu'on a supposée égale à l'incommensurable, dont l'exposant est le plus grand, on élèvera chaque membre de cette équation à la puissance de cet exposant.

Enfin

Enfin on substituera les valeurs commensurables des lettres supposées à leur place dans l'équation précédente, & ces valeurs seront prises dans les équations commensurables; & en continuant les substitutions, on arrivera enfin à une équation où les lettres supposées ne seront plus, & qui n'aura plus d'incommensurables.

Par exemple, pour ôter les incommensurables de  $x + \sqrt[3]{aax} = \sqrt{ax}$ : 1°. je suppose  $n = \sqrt[3]{aax}$ , &  $m = \sqrt{ax}$ ; & ôtant les incommensurables, je trouve  $n^3 = aax$ , &  $mm = ax$ , ce sont les équations commensurables.

2°. Je mets  $n$  &  $m$  dans l'équation proposée  $x + \sqrt[3]{aax} = \sqrt{ax}$ , à la place des incommensurables, & je trouve  $x + n = m$ .

Je fais par transposition  $n = m - x$ , & j'éleve chaque membre à la troisième puissance, parceque l'exposant de  $\sqrt[3]{aax} = n$ , qui est le plus grand, est 3, & je trouve  $n^3 = m^3 - 3mmx + 3mxx - x^3$ .

3°. Je substitue dans cette équation les valeurs commensurables de  $n^3$  & de  $mm$ , prises dans les équations commensurables, & je trouve  $aax = m^3 - 3axx + 3mxx - x^3$ .

Pour substituer la valeur de  $m^3$  dans cette équation, je multiplie chaque membre de  $mm = ax$  par  $m$ , & j'ai  $m^3 = amx$ ; & je substitue  $amx$  à la place de  $m^3$  dans  $aax = m^3 - 3axx + 3mxx - x^3$ , & je trouve  $aax = amx + 3mxx - 3axx - x^3$ , ou bien  $aa = am + 3mx - 3ax - xx$ ; je mets par transposition les quantitez où est  $m$  dans le premier membre, & les autres dans le second, & j'ai  $am + 3mx = 3ax + aa + xx$ ; divisant le tout par  $a + 3x$ , je trouve  $m = \frac{ax + aa + xx}{a + 3x}$ .

Pour substituer la valeur commensurable de  $m$  dans cette équation, j'éleve chaque membre à la seconde puissance, parceque l'exposant de  $\sqrt{ax} = m$  est 2, & je trouve  $mm = \frac{9aaxx + 6a^3x + a^4 + 6ax^3 + 2aaxx + x^4}{aa + 6ax + 9xx}$ .

Je substitue dans cette équation la valeur de  $mm$  prise dans l'équation  $mm = ax$ , & je trouve

$$ax = \frac{9aaxx + 6a^3x + a^4 + 6ax^3 + 2aaxx + x^4}{aa + 6ax + 9xx}$$

En réduisant chaque membre au même dénominateur, que j'efface ensuite, & en abregeant & ordonnant l'équation, je trouve  $x^4 - 3ax^3 + 5aaxx + 5a^3x + a^4 = 0$ , où il n'y a plus d'incommensurables. Ce qui étoit proposé.

Fin I.

F

## DEMONSTRATION.

IL est évident que par les opérations de ces deux méthodes du Problème, on ôte les incommensurables les uns après les autres, & que l'égalité se conserve toujours.

## SECTION IV.

*Où l'on explique la maniere de trouver le plus grand diviseur commun de deux ou de plusieurs équations composées qui ont la même inconnue.*

## AVERTISSEMENT.

IL est très-utile pour la résolution des équations composées, de pouvoir trouver le plus grand diviseur commun de celles qui ont la même inconnue ; & cela sert aussi quand on a plus de rapports d'un Problème que d'inconnues, à former l'équation la plus simple qui en donne la résolution.

## PROBLÈME IV.

20. *TROUVER le plus grand diviseur commun des deux équations qui ont la même inconnue,*

1°. **S**I toutes les quantitez de chaque équation étoient multipliées par une grandeur commune, on les diviserait toutes par cette grandeur commune, & il faudroit ensuite chercher le plus grand diviseur commun des deux quotiens ; & après l'avoir trouvé, le multiplier par cette grandeur commune, & le produit seroit le plus grand diviseur commun qu'on cherchoit.

2°. Si toutes les quantitez d'une seule des deux équations, & sur-tout de celle qui servira de diviseur, étoient multipliées par une même grandeur, il faudroit les diviser par cette grandeur, qui ne doit point entrer dans le commun diviseur, & operer ensuite avec le quotient. Ces choses supposées.

*Premiere maniere,*

1. **A**PRES avoir nommé la premiere équation celle du degré plus élevé, & l'autre la seconde, (si elles sont du même degré,



on nommera laquelle on voudra la premiere, & l'autre la seconde, ) il faut diviser la premiere par la seconde ; & si la division se fait juste , la seconde est le plus grand diviseur commun.

Si la division ne peut se faire exactement , lorsqu'on sera arrivé à un reste où l'inconnue a moins de degrez que dans la seconde équation , sans avoir égard au quotient , on divisera la seconde par le reste , qu'on nommera premier reste.

Si la division se fait exactement , le premier reste est le plus grand diviseur commun.

Mais si elle n'est pas exacte , & qu'elle donne un reste , on divisera le premier reste par ce second reste ; & si cette division donne un troisieme reste , on divisera le second reste par le troisieme , & on continuera jusqu'à ce qu'on ait trouvé un reste qui soit un diviseur exacte du précédent , & ce reste sera le plus grand diviseur commun.

2. Quand en faisant les divisions de cette methode , on trouve une fraction pour quotient , il faut dans ce cas multiplier la grandeur à diviser par la grandeur connue , qui est le coefficient du premier terme du diviseur , ou par le dénominateur de la fraction trouvée pour quotient ; & la grandeur à diviser étant ainsi préparée , la division donnera pour quotient une grandeur entiere.

## E X E M P L E I.

P O U R trouver le plus grand diviseur commun des deux équations  $x^{12} - 13x^{10} + 65x^8 - 157x^6 + 189x^4 - 105xx + 21 = 0$ .  $x^{10} - 12x^8 + 54x^6 - 112x^4 + 105xx - 35 = 0$ .

Je remarque qu'il n'y a aucune grandeur commune qui multiplie toutes les quantitez de chacune de ces deux équations , ni aucune grandeur commune qui multiplie tous les termes de la seconde ; ainsi j'opere immédiatement sur ces deux équations.

Je divise la premiere par la seconde , & je trouve le quotient  $xx - 1$  , que je néglige , & le reste  $-x^2 + 9x^6 - 28x^4 + 35xx - 14$  , qui ne peut plus être divisé par la seconde équation , puisque  $-x^2$  est moindre que  $x^{10}$ .

Je divise la seconde équation  $x^{10} - 12x^8 + 54x^6 - 112x^4 + 105xx - 35 = 0$  , par ce premier reste  $-x^2 + 9x^6 - 28x^4 + 35xx - 14$  , & je trouve le quotient  $-xx + 3$  , que je néglige , & le reste  $-x^6 + 7x^4 - 14xx + 7$ .

Je divise le premier reste  $-x^4 + 9x^3 - 28x^2 + 35xx - 14$ , par ce second reste  $-x^4 + 7x^3 - 14xx + 7$ , & la division se fait exactement : ainsi  $-x^4 + 7x^3 - 14xx + 7 = 0$ , ou bien en rendant la plus haute puissance  $-x^4$  positive,  $x^4 - 7x^3 + 14xx - 7 = 0$ , est le plus grand diviseur commun des deux équations proposées.

## E X E M P L E I I.

P O U R trouver le plus grand diviseur commun des deux équations  $3x^3 - 12xx + 15x - 6 = 0$ .  $-12xx + 30x - 18 = 0$  : 1°. Je remarque que tous les termes des deux équations sont multipliez par 3, ou peuvent être divisez par 3 ; je les divise par 3, & je trouve les deux quotiens  $x^3 - 4xx + 5x - 2 = 0$ , &  $-4xx + 10x - 6 = 0$ .

Il faut à présent chercher le plus grand diviseur commun de ces deux quotiens, & quand on l'aura trouvé, le multiplier par 3, & le produit sera le plus grand diviseur commun des deux équations proposées.

2°. Je remarque que tous les termes de la seconde équation  $-4xx + 10x - 6 = 0$ , qui doit servir de diviseur, peuvent être divisez par 2 ; je les divise donc par 2, & je trouve l'équation  $-2xx + 5x - 3 = 0$ , qui est celle qui doit servir de diviseur.

Mais il faut remarquer que quand on aura trouvé le plus grand diviseur commun, il ne faudra pas le multiplier par 2, parceque 2 n'est pas un diviseur commun des deux équations  $x^3 - 4xx + 5x - 2 = 0$ ,  $-4xx + 10x - 6 = 0$ .

Pour trouver maintenant le plus grand diviseur commun de  $x^3 - 4xx + 5x - 2 = 0$ , & de  $-2xx + 5x - 3 = 0$ , je divise la première par la seconde, & je trouve pour quotient la fraction  $\frac{x}{2}$  ; cela me fait voir qu'il faut préparer la grandeur à diviser  $x^3 - 4xx + 5x - 2$ , en la multipliant par le dénominateur de la fraction  $\frac{x}{2}$ , qui est  $-2$ , & j'aurai le produit  $-2x^3 + 8xx - 10x + 4$ , qu'il faut diviser par la seconde grandeur  $-2xx + 5x - 3$ .

En faisant la division, je trouve d'abord le quotient  $x$ , & le reste  $+3xx - 7x + 4$ , qu'il faut continuer de diviser par  $-2xx + 5x - 3$ , parceque la plus haute puissance de l'inconnue  $x$ , n'est pas dans le reste  $+3xx - 7x + 4$ , moindre que la plus haute puissance de la même  $x$  dans le diviseur  $-2xx + 5x - 3$ .

Mais en continuant de diviser  $+3xx - 7x + 4$ , par  $-2xx + 5x - 3$ , je trouve pour quotient la fraction  $\frac{-1}{2}$ ; cela fait voir qu'il faut préparer la grandeur à diviser  $+3xx - 7x + 4$ , en la multipliant par le dénominateur  $-2$ ; cela me donne la grandeur à diviser  $-6xx + 14x - 8$ ; je la divise par le diviseur  $-2xx + 5x - 3$ , & je trouve le quotient  $3$ , & le reste  $-x + 1 = 0$ .

Je divise maintenant  $-2xx + 5x - 3 = 0$ , qui a servi jusqu'ici de diviseur, par ce reste  $-x + 1 = 0$ , & je trouve que la division se fait exactement.

Ainsi  $-x + 1 = 0$ , ou  $+x - 1 = 0$ , est le plus grand commun diviseur de  $x^3 - 4xx + 5x - 2 = 0$ , & de  $-4xx + 10x - 6 = 0$ .

Et en multipliant  $-x + 1 = 0$ , ou  $+x - 1 = 0$  par  $3$ , je trouve  $-3x + 3 = 0$ , ou  $+3x - 3 = 0$ , pour le plus grand diviseur commun des deux équations proposées  $3x^3 - 12xx + 15x - 6 = 0$ ,  $-12xx + 30x - 18 = 0$ . Ce qui étoit proposé.

## A V E R T I S S E M E N T.

ON a mis dans cet exemple qui n'est pas fort composé, toutes les difficultez qu'on peut trouver dans la recherche du plus grand diviseur commun; c'est pourquoi ceux qui commencent, doivent se le rendre très-familier.

## E X E M P L E I I I.

POUR trouver le plus grand diviseur commun de ces deux équations  $x^4 - 4ax^3 + 11a^2xx - 20a^3x + 12a^4 = 0$ ,

$$x^4 - 3ax^3 + 12a^2xx - 16a^3x + 24a^4 = 0,$$

je divise la première par la seconde, & je trouve le quotient  $1$ , que je néglige, & le reste  $-ax^3 + a^2xx - 4a^3x + 12a^4$ , qui étant divisé par  $-a$ , donne  $x^3 + axx + 4a^2x + 12a^3$  pour le premier reste.

Je divise la seconde équation  $x^4 - 3ax^3 + 12a^2xx - 16a^3x + 24a^4 = 0$ , par  $x^3 + axx + 4a^2x + 12a^3$ .

Je trouve le quotient  $x - 4a$ , que je néglige, & le reste  $+12a^2xx - 12a^3x + 72a^4$ , que je divise par  $12a^2$ , & je trouve pour le second reste  $xx - ax + 6aa$ .

Je divise le premier reste  $x^3 + axx + 4a^2x + 12a^3$ , par le second reste  $xx - ax + 6aa$ , & la division est exacte.

Ainsi  $xx - ax + 6aa = 0$ , est le plus grand diviseur commun des deux équations proposées.

## E X E M P L E I V.

**P**OUR trouver le plus grand diviseur commun des deux équations  $x^3 - 2axx + aax - aab = 0$ ,

$$- bxx + 2abx.$$

$$\&c \quad - 2axx + 2aax - 3aab = 0.$$

$$- bxx + 4abx.$$

je divise la premiere par la seconde; & en divisant le premier terme  $x^3$  par le premier terme  $- 2axx - bxx$  du diviseur, je trouve la fraction  $\frac{-x}{2a-b}$ . Cela me fait voir qu'il faut préparer la premiere équation, qui est la grandeur à diviser, en la multipliant par le dénominateur  $- 2a - b$ ; & je trouve pour produit la premiere équation préparée.

$$- 2ax^3 + 4aaxx - 2a^2x + 2a^2b = 0.$$

$$- bxx^3 + 4abxx - 5aabx + aabb + b^2xx - 2abbx.$$

Je la divise par la seconde équation

$$- 2axx + 2aax - 3aab = 0.$$

$$- bxx + 4abx,$$

& je trouve le quotient  $x$ , que je néglige, & le reste

$$+ 2aaxx - 2a^2x + 2a^2b$$

$$+ b^2xx - 2aabx + aabb$$

$$- 2abbx.$$

qu'il faut continuer de diviser par le même diviseur

$$- 2axx + 2aax - 3aab = 0.$$

$$- bxx + 4abx,$$

parceque la plus haute puissance  $xx$  de l'inconnue n'est pas moindre dans le reste, que dans le diviseur.

Mais en faisant la division de ce reste par le diviseur, je trouve la fraction  $\frac{2aa+bb}{2a-b}$ ; ce qui me fait voir qu'il faut préparer le reste  $+ 2aaxx - 2a^2x$ , &c.

$$+ b^2xx,$$

en le multipliant par le dénominateur  $- 2a - b$ , & je trouve le reste préparé  $- 4a^2xx + 4a^2x - 4a^2b$

$$- 2aabxx + 6a^2bx - 4a^2bb$$

$$- 2abbxx + 6aabbx - aab^2$$

$$- b^3xx + 2ab^2x.$$

Je continue de le diviser par le même diviseur

$$- 2axx + 2aax - 3aab = 0.$$

$$- bxx + 4abx,$$

& je trouve le quotient  $2aa + bb$ , que je néglige, & le reste

$$- 2a^3bx + 2a^3b$$

$$+ 4aabbx - 4a^3bb$$

$$- 2ab^3x + 2aab^3,$$

dont chaque terme peut être exactement divisé par  $- 2a^3b + 4aabb - 2ab^3$ .

Ainsi je divise ce reste par  $- 2a^3b + 4aabb - 2ab^3$ , & je trouve pour quotient  $x - a$ , que je prens pour le dernier reste.

Je divise maintenant la seconde équation qui a servi de diviseur jusqu'ici, par le reste  $x - a$ , & la division est exacte.

Par conséquent  $x - a = 0$ , est le plus grand diviseur commun des deux équations proposées.

*Préparation pour la démonstration.*

LA démonstration n'est pas différente de celle qu'on a coutume de donner dans l'Arithmetique & l'Algebre, pour la méthode de trouver le plus grand diviseur commun de deux grandeurs complexes, & elle est fondée sur ces axiomes.

A X I O M E I.

UN diviseur exact d'une grandeur, est aussi un diviseur exact d'un multiple de cette grandeur; par exemple, un diviseur exact d'une grandeur  $A$ , est un diviseur exact de  $3A$ , ou en general de  $mA$ .

A X I O M E II.

UN diviseur exact d'une grandeur entiere  $A$ , qui a deux parties  $B$  &  $C$ , & de l'une de ces deux parties comme de  $B$ , l'est aussi de la seconde partie  $C$ .

A X I O M E III.

LE plus grand diviseur commun de deux grandeurs  $A$  &  $B$ , contient les autres communs diviseurs moindres des mêmes grandeurs, & il est un multiple de chacun de ces diviseurs moindres. Ces choses supposées.

*Première.*      *Seconde.*      Soit nommée  $A$  la première équation, &  $B$  la seconde, on suppose que  $A$  étant divisée par  $B$ , on trouve le quotient  $m$ , & le reste  $C$ ; ainsi

A.      B.       $A = mB + C.$   
 $A = mB + C.$   
 $B = nC + D.$   
 $C = pD.$        $A = mB + C.$

En divisant la seconde équation  $B$  par le premier reste  $C$ , qu'on trouve le quotient  $n$ , & le reste  $D$ ; ainsi  $B = nC + D.$

Enfin, qu'en divisant le premier reste  $C$  par le second  $D$ , la division soit exacte, & qu'on trouve le quotient  $p$ , ainsi  $C = pD.$

Il faut démontrer que  $D$  est le plus grand diviseur commun de  $A$  & de  $B.$

#### D É M O N S T R A T I O N.

1. IL est évident que  $D$  est diviseur commun de  $A$  & de  $B$ , car par la supposition il l'est de  $C$ ; donc il l'est de  $nC + D = B$  par le 1<sup>er</sup> axiome; donc  $D$  est diviseur de  $mB + C = A$  par le 1<sup>er</sup> axiome. 2<sup>o</sup>.  $D$  est aussi le plus grand diviseur commun de  $A$  & de  $B$ ; car leur plus grand diviseur commun doit être diviseur de  $mB$  multiple de  $B$ ; & étant aussi diviseur de la grandeur entière  $mB + C = A$ , il est diviseur de la 2<sup>e</sup> partie  $C$  par le 2<sup>o</sup> axiome; donc le plus grand diviseur commun de  $A$  & de  $B$ , est diviseur de  $nC$  multiple de  $C$  par le 1<sup>er</sup> axiome; & étant aussi diviseur de la grandeur entière  $nC + D = B$ , il est diviseur de  $D$  par le 2<sup>o</sup> axiome: Mais  $D$  est diviseur commun de  $A$  & de  $B$  par la première partie de cette démonstration; ainsi le plus grand diviseur commun de  $A$  & de  $B$ , étant aussi diviseur de  $D$ , il faut que  $D$  soit lui même ce plus grand commun diviseur: autrement  $D$  seroit un diviseur commun de  $A$  & de  $B$ , qui surpasseroit le plus grand; ce qui seroit contre la supposition.

*Démonstration pour le cas où il faut préparer la grandeur à diviser.*

SI en divisant la première grandeur  $A$  par la seconde  $B$ , on trouve une fraction dont le dénominateur soit  $f$ , il faut préparer  $A$  en la multipliant par  $f$ ; on suppose qu'en divisant ensuite  $fA$  par  $B$ , on trouve le quotient  $m$  & le reste  $C$ , ainsi  $fA = mB + C.$

Divisant

Divisant ensuite  $B$  par le reste  $C$ , si l'on trouve une fraction dont le dénominateur est  $g$ , il faut préparer  $B$  en la multipliant par  $g$ , & l'on aura  $gB$ ; on suppose qu'en divisant  $gB$  par le premier reste  $C$ , on trouve le quotient  $n$ , & le reste  $D$ ; ainsi  $gB = nC + D$ .

<i>Premiere.</i> $A.$ $fA = mB + C.$ $gB = nC + D.$ $C = pD.$	<i>Seconde.</i> $B.$
---	-------------------------

Enfin on suppose qu'en divisant le premier reste  $C$ , par le second  $D$ , la division est exacte, & que  $C = pD$ . Cela supposé.

Il est évident que le plus grand diviseur commun de  $A$  & de  $B$ , est diviseur de  $fA$  par le premier axiome, & par conséquent de  $mB + C = fA$ . Il est de même évident que le plus grand diviseur commun de  $A$  & de  $B$ , est diviseur de  $mB$  & de  $gB$ , multiples de  $B$ ; il est par conséquent diviseur de  $C$ , seconde partie de  $mB + C$ , par le 2<sup>e</sup> axiome, & de  $nC + D = gB$ ; il l'est aussi de  $nC$  multiple de  $C$ ; par conséquent étant diviseur de  $nC + D$ , & de la première partie  $nC$ , il l'est aussi de l'autre partie  $D$ .

Ainsi  $D$  étant diviseur exact de  $C$ , il est le plus grand commun diviseur de  $A$  & de  $B$ , ou du moins il le contient, & il en est le multiple.

Mais quand les plus hautes puissances de l'inconnue  $x$  ne sont point multipliées par d'autres grandeurs connues dans  $A$  & dans  $B$ , la puissance la plus élevée de  $x$  dans le plus grand diviseur commun, doit être seule; c'est pourquoi en divisant le dernier reste  $D$ , diviseur exact du précédent, par le coefficient de la plus haute puissance de son inconnue  $x$ , le quotient doit être le plus grand diviseur commun de  $A$  & de  $B$ .

*Seconde maniere de trouver le plus grand diviseur commun.*

21. **O**N nommera la première équation  $A$ , pour rendre la chose plus claire, & la seconde  $B$ .

Il faut prendre la valeur de la plus haute puissance de l'inconnue  $x$ , qui est le premier terme de  $B$ , & substituer cette valeur au lieu de  $x$  dans  $A$ , (observant d'élever auparavant  $B$  au degré de  $A$ , en multipliant l'équation  $B$  par  $x$ , ou  $xx$ , &c. si le premier terme de  $B$  étoit moindre que le premier terme de  $A$ .)

Il faut continuer cette substitution jusqu'à ce qu'on ait réduit  $A$  à un moindre degré que  $B$ , & on appellera  $C$  l'équation où l'on aura réduit  $A$  par ces substitutions.

Il faut ensuite prendre la valeur du premier terme de  $C$ , & la substituer dans  $B$ , & continuer la substitution jusqu'à ce qu'on ait réduit  $B$  à une équation  $D$  d'un moindre degré que  $C$ .

L'on prendra ensuite la valeur du premier terme de  $D$ , qu'on substituera dans  $C$ , & l'on continuera ces opérations jusqu'à ce qu'on trouve une équation  $E$ , d'où la valeur du premier terme étant substituée dans la précédente  $D$ , tous les termes se détruisent par des signes contraires.

L'équation  $E$  fera le plus grand diviseur commun de  $A$  & de  $B$ .

Lorsqu'il arrive que les premiers termes des équations  $A$  &  $B$ , ou  $B$  &  $C$ , ou  $C$  &  $D$ , &c. ont des coefficients, il faut préparer les deux équations en multipliant  $A$  par le coefficient du premier terme de  $B$ ; &  $B$  par celui du premier terme de  $A$ , & faire la même chose pour  $B$  &  $C$ , &c. comme on le verra dans les exemples.

*Premier exemple qui est le troisième qui précède.*

**P**OUR trouver le plus grand diviseur commun des deux équations  $A. x^4 - 4ax^3 + 11a^2xx - 10a^3x + 12a^4 = 0.$

$B. x^4 - 3ax^3 + 12a^2xx - 16a^3x + 24a^4 = 0,$   
je prens la valeur de  $x^4$  dans la seconde, & je trouve  $x^4 = 3ax^3 - 12a^2xx + 16a^3x - 24a^4.$

Je substitue cette valeur de  $x^4$  dans la première équation, & après la substitution je trouve au lieu de la première équation, celle-ci  $-ax^3 - a^2xx - 4a^3x - 12a^4 = 0$ , dont tous les termes peuvent se diviser par  $-a$ ; & après la division, je trouve  $C. x^3 + axx + 4a^2x + 12a^3 = 0.$

Cette équation  $C$  étant d'un moindre degré que la seconde  $B$ , je la multiplie par  $x$ , & j'ai l'équation  $x^4 + ax^3 + 4a^2xx + 12a^3x = 0.$

Je prens dans cette équation la valeur de  $x^4$ , qui est  $x^4 = -ax^3 - 4a^2xx - 12a^3x$ , & je la substitue dans  $B$ , & après la substitution, je trouve l'équation  $-4ax^3 + 8a^2xx - 18a^3x + 24a^4 = 0.$



Comme elle n'est pas d'un degré inférieur à celui de l'équation  $C$ , il faut prendre dans l'équation  $C$  la valeur de  $x$  pour la substituer dans l'équation précédente.

Mais le premier terme de la précédente, qui est  $-4ax^2$  ayant  $-4a$  pour coefficient, il faut préparer l'équation  $C$  en la multipliant par  $-4a$ , & je trouve  $-4ax^2 - 4aaxx - 16a^2x - 48a^3 = 0$ .

Je prens dans cette équation préparée la valeur de  $-4ax^2$  qui est  $-4ax^2 = 4aaxx + 16a^2x + 48a^3$ .

Je la substitue dans l'équation  $-4ax^2 + 8aaxx - 28a^2x + 24a^3 = 0$ , & je trouve après la substitution l'équation  $4aaxx - 12a^2x + 72a^3 = 0$ , dont tous les termes peuvent se diviser par  $4a$ ; & après avoir fait la division, je trouve l'équation  $D. xx - ax + 6aa = 0$ .

J'éleve cette équation  $D$  au troisième degré en la multipliant par  $x$ , afin de pouvoir substituer la valeur de  $x$  dans l'équation  $C$ , & je trouve  $x^3 - axx + 6aax = 0$ .

Je prens la valeur de  $x^3$  dans cette équation, qui est  $x^3 = +axx - 6aax$ , & je la substitue dans l'équation  $C$ , ce qui me donne  $2axx - 2aax + 12a^3 = 0$ .

Je substitue encore la valeur de  $xx$  prise de l'équation  $D$ , dans  $2axx - 2aax + 12a^3 = 0$ , mais auparavant je multiplie l'équation  $D$  par le coefficient  $2a$ ; & ayant trouvé  $2axx = 2aax - 12a^3$ , je substitue la valeur de  $2axx$  dans  $2axx - 2aax + 12a^3 = 0$ , & je trouve  $-2aax + 12a^3 = 0$ .

$$+ 2aax - 12a^3,$$

où toutes les quantitez se détruisent par des signes contraires; ainsi l'équation  $D. xx - ax + 6aa = 0$ , est le plus grand diviseur commun des deux proposées.

*Second exemple qui est le quatrième qui précède.*

ON mettra les opérations de la première & de la seconde manière sur cet exemple, à côté les unes des autres, afin qu'on voye que ces deux méthodes de trouver le plus grand diviseur commun, reviennent à une même méthode; ainsi la première étant démontrée, la seconde l'est aussi.

## E X E M P L E I I.

*Premiere maniere de trouver le plus grand diviseur commun.*

*Premiere équation.*

$$\begin{aligned} x^3 - 2axx + aax - aab &= 0. \\ - bxx + 2abx. \\ x - \frac{2a - b}{1}. \end{aligned}$$

*Seconde équation.*

$$\begin{aligned} - 2axx + 2aax - 3aab &= 0. \\ - bxx + 4abx. \end{aligned}$$

*Premiere équation préparée.*

$$\begin{aligned} - 2ax^3 + 4aaxx - 2a^3x + 2a^3b &= 0. \\ - bx^3 + 4abxx - 5aabx + aabb \\ + bbbx - 2abbx. \end{aligned}$$

*Seconde équation qui sert de diviseur.*

$$\begin{aligned} - 2axx + 2aax - 3aab &= 0. \\ - bxx + 4abx. \end{aligned}$$

*x quotient,*

$$\begin{aligned} + 2ax^3 - 2aaxx + 3aabx \\ + bx^3 - 4abxx. \end{aligned}$$

*Reste qu'il faut continuer de diviser par le même diviseur.*

$$\begin{aligned} + 2aaxx - 2a^3x + 2a^3b &= 0. \\ + bbbx - 2aabx + aabb \\ - 2abbx. \\ x - \frac{2a - b}{1}. \end{aligned}$$

*Reste préparé.*

$$\begin{aligned} - 4a^3xx + 4a^4x - 4a^4b &= 0. \\ - 2aabxx + 6a^3bx - 4a^3bb \\ - 2abbxx + 6aabbx - aab^3 \\ - b^3xx + 2ab^3x \end{aligned}$$

*Seconde équation qui sert de diviseur.*

$$\begin{aligned} - 2axx + 2aax - 3aab &= 0. \\ - bxx + 4abx. \end{aligned}$$

*2aa + bb quotient,*

$$\begin{aligned} + 4a^3xx - 4a^4x + 6a^4b \\ + 2aabxx - 8a^3bx + 3aab^3 \\ + 2abbxx - 2aabbx \\ + b^3xx - 4ab^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - 2a^3bx + 2a^3b &= 0. \\ \text{Reste.} \quad + 4aabbx - 4a^3bb \\ - 2ab^3x + 2aab^3. \end{aligned}$$

## EXEMPLE I.

Seconde maniere de trouver le plus grand diviseur commun.

Premiere équation.

$$\begin{array}{r} x^3 - 2axx + aax - aab = 0. \\ - bxx + 2abx. \\ \hline x - 2a - b. \end{array}$$

Premiere équation préparée.

$$\begin{array}{r} - 2ax^3 + 4aaxx - 2a^3x + 2a^3b = 0. \\ - bx^3 + 4abxx - 5aabbx + aabb \\ + bbxx - 2abbx. \end{array}$$

Substitution.

$$\begin{array}{r} - 2ax^3 = - 2aaxx + 3aabbx \\ - bx^3 = - 4abxx. \end{array}$$

Somme où il faut encore substituer la valeur de  $xx$  prise dans la seconde équation.

$$\begin{array}{r} + 2aaxx - 2a^3x + 2a^3b = 0. \\ + bbxx - 2aabbx + aabb \\ - 2abbx \\ \hline x - 2a - b. \end{array}$$

Somme préparée.

$$\begin{array}{r} - 4a^3xx + 4a^3x - 4a^3b = 0. \\ - 2aabbxx + 6a^3bx - 4a^3bb \\ - 2abbxx + 6aabbx - aab^3 \\ - b^3xx + 2ab^3x. \end{array}$$

Substitution.

$$\begin{array}{r} - 4a^3xx = - 4a^3x + 6a^3b \\ - 2aabbxx = 8a^3bx + 3aabb^3 \\ - 2abbxx = 2aabbx \\ - b^3xx = 4ab^3x. \end{array}$$

Somme.

$$\begin{array}{r} - 2a^3bx + 2a^3b \\ - 4aabbx - 4a^3bb \\ - 2ab^3x + 2aabb^3 \end{array}$$

Seconde équation.

$$\begin{array}{r} - 2axx + 2aax - 3aab = 0. \\ - bxx + 4abx. \end{array}$$

ou bien

$$\begin{array}{r} - 2axx = - 2aax + 3aab \\ - bxx = - 4abx \\ \hline x \quad x \quad \quad x \quad x \end{array}$$

Seconde équation multipliée par  $x$ .

$$\begin{array}{r} - 2ax^3 \} = - 2aaxx + 3aabbx \\ - bx^3 \} = - 4abxx. \end{array}$$

Seconde équation.

$$\begin{array}{r} - 2axx \} = - 2aax + 3aab \\ - bxx \} = - 4abx. \\ \hline x \ 2aa + bb. \quad x \ 2aa + bb. \end{array}$$

Seconde équation préparée.

$$\begin{array}{r} - 4a^3xx \} = - 4a^3x + 6a^3b \\ - 2aabbxx \} = - 8a^3bx + 3aabb^3 \\ - 2abbxx \} = - 2aabbx \\ - b^3xx \} = - 4ab^3x. \end{array}$$

*Continuation de la premiere maniere.*

Divisant chaque terme par  $-2a'b$   
 $+4aabb - 2ab'$ , on trouve pour le  
 reste l'équation  $x - a = 0$ .

Il faut diviser la seconde équation  
 par ce reste  $x - a = 0$ .

*Seconde équation.*

$$\begin{aligned} -2axx + 2aax - 3aab &= 0. \\ -bxx + 4abx & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} +2axx - 2aax \\ +bxx - abx. \end{aligned}$$

$$0 \quad +3abx - 3aab$$

$$-3abx + 3aab.$$

$$0 \quad 0.$$

*Reste qui sert de diviseur.*

$$x - a = 0.$$

$$\begin{aligned} -2ax + 3ab &\text{ quotient.} \\ -bx. & \end{aligned}$$

La division est exacte: ainsi  $x - a = 0$  est le plus grand divi-  
 seur commun.

## REMARQUES.

### I.

IL est évident qu'on peut négliger le premier terme dans les  
 cas où il faut préparer la grandeur à diviser; ce qui abrége le  
 calcul.

### II.

S'il falloit trouver le plus grand diviseur commun de trois,  
 ou d'un plus grand nombre d'équations, on chercheroit d'abord  
 le plus grand diviseur commun des deux premières, & ensuite  
 le plus grand diviseur commun de la troisième équation, & du  
 plus

Continuation de la seconde maniere.

Divisant chaque terme par  $-2a^2b$   
 $+4aabb - 2ab^3$ , on trouve l'équa-  
 tion  $x - a = 0$ , ou  $x = a$ .

Il faut substituer dans la seconde  
 équation les valeurs de  $x$ ,  $xx$  prises  
 dans  $x - a = 0$ .

Seconde équation.

$$\begin{aligned} -2axx + 2aax - 3aab &= 0. \\ -bxx + 4abx. \end{aligned}$$

Substitution.

$$\begin{aligned} -2axx &= -2aax \\ -bxx &= -abx. \end{aligned}$$

Somme.

$$+3abx - 3aab = 0.$$

$$\text{Substitution. } +3abx = +3aab.$$

$$\text{Somme. } 0.$$

$$x - a = 0.$$

$$x = a.$$

$$x \ x \ x \ x.$$

$$xx = ax$$

$$x - 2ax - 2a.$$

$$-2axx = -2aax.$$

$$xx = ax.$$

$$x - b \ x - b.$$

$$-bxx = -abx.$$

$$x = a.$$

$$x + 3ab \ x + 3ab.$$

$$+3abx = +3aab.$$

La substitution des valeurs de  $x$ ,  $xx$  prises de  $x - a = 0$ ,  
 dans la seconde équation, faisant détruire tous les termes par  
 des signes contraires,  $x - a = 0$  est le plus grand diviseur  
 commun.

plus grand diviseur commun des deux premieres, & ainsi de  
 suite.

### III.

Lorsqu'il y a plus de rapports connus dans un Problème  
 composé, qu'il n'y a d'inconnues, on peut dans ce cas, trou-  
 ver plusieurs équations qui ayent la même inconnue, dont  
 chacune exprime le Problème; il faut ensuite trouver le plus  
 grand diviseur commun de ces équations, & il sera l'équation  
 la plus simple du Problème, & la résolution en sera plus  
 facile.



## ANALYSE COMPOSÉE,

O U

ANALYSE QUI ENSEIGNE A RESOUDRE  
les Problèmes qui se réduisent à des équations  
composées.

## L I V R E I I I.

*Où l'on explique la nature des équations composées,  
le nombre & les qualitez de leurs racines,  
& leurs transformations.*

## A V E R T I S S E M E N T.

ON suppose dans ce Livre, 1<sup>o</sup>. que le second membre d'une équation composée est zero. 2<sup>o</sup>. Que la plus haute puissance de l'inconnue, c'est-à-dire le premier terme, a toujours le signe +. 3<sup>o</sup>. Qu'elle n'a ni fractions, ni incommensurables.

On a enseigné dans les Livres précédens, les manieres de lui donner ces préparations.

On suppose aussi que dans son premier terme, la plus haute puissance de l'inconnue n'a pas d'autre coefficient que l'unité; on enseignera la maniere de lui donner cette préparation dans les transformations.

Cela supposé, pour concevoir clairement la nature des équations composées, il faut voir la maniere dont elles peuvent être formées.

## S E C T I O N I.

*Où l'on explique la maniere dont se forment les équations  
composées.*

## D É F I N I T I O N I.

21. **L**A valeur de l'inconnue dans une équation simple  $x = a$ , s'appelle *la racine* de cette équation.

Ainsi

Ainsi  $a$  qui est la valeur de l'inconnue  $x$ , dans  $x - a = 0$ , puisque  $x = a$ , s'appelle la racine de l'équation  $x - a = 0$ .

Lorsque cette valeur est complexe, comme dans  $x - a + b - c = 0$ , la grandeur complexe  $+a - b + c$ , (qui est la valeur de  $x$ , puisque  $x = a - b + c$ ,) n'est pas moins la seule racine de l'équation  $x - a + b - c = 0$ , & on peut l'abréger en mettant une seule lettre  $d = a - b + c$ , dans l'équation; ce qui donneroit  $x - d = 0$ , ou bien  $x = d$ .

Lorsque mettant l'inconnue seule dans le premier membre, sa valeur qui est seule dans le second, est positive, on dit que la racine est *positive*; ainsi dans  $x = a$ , la racine  $a$  est positive; mais lorsque la valeur de l'inconnue est négative, comme dans  $x = -b$ , on dit que la racine est *négative*.

D'où il suit que lorsque zero est le second membre de l'équation simple, la *racine positive* a le signe négatif  $-$ , comme dans  $x - a = 0$ ; & la *racine négative* a le signe  $+$ , comme dans  $x + b = 0$ .

La racine d'une équation simple ou lineaire, peut être ou commensurable, comme dans  $x - a = 0$ , ou incommensurable, comme dans  $x - \sqrt{ab} = 0$ , ou mixte, comme dans  $x - a + \sqrt{ab} = 0$ . Ces trois sortes de racines s'appellent *réelles*.

Ou bien elle peut être une grandeur impossible, & qui marque que le Problème renferme une contradiction, comme dans  $x - \sqrt{-aa} = 0$ .

Car  $\sqrt{-aa}$  est une grandeur impossible, n'étant pas possible qu'il y ait de quarré qui soit précédé du signe négatif  $-$ , dont la racine soit possible; parceque si la racine  $a$  d'un quarré  $aa$ , a le signe  $+$ , ou le signe  $-$ , le quarré aura toujours nécessairement le signe  $+$ , le produit de  $+$  par  $+$ , & de  $-$  par  $-$ , ayant toujours  $+$ ; par conséquent la racine quarrée d'un quarré négatif, comme  $\sqrt{-aa}$ , est une grandeur impossible.

Ces sortes de grandeurs impossibles s'appellent *imaginaires*; & lorsque la valeur de l'inconnue  $x$ , dans une équation simple  $x - \sqrt{-aa} = 0$ , est imaginaire, la racine de cette équation, qui est  $+\sqrt{-aa}$ , s'appelle *imaginaire*.

Enfin la racine d'une équation simple peut être composée d'une grandeur réelle, & d'une imaginaire, comme dans  $x - a + \sqrt{-aa} = 0$ , où la valeur de  $x$  est  $a - \sqrt{-aa}$ ,

puisque  $x = a - \sqrt{-aa}$ . Cette racine  $a - \sqrt{-aa}$ , s'appelle *mixte imaginaire*.

*Remarques sur les grandeurs imaginaires.*

23. LA racine, dont l'exposant est un nombre pair, d'une grandeur négative, est toujours une grandeur imaginaire; ainsi  $\sqrt{-aa}$ ,  $\sqrt[4]{-a^4}$ ,  $\sqrt[6]{-a^6}$ , &c. sont des grandeurs imaginaires: car une grandeur  $a$ , soit qu'elle ait le signe  $-$ , ou le signe  $+$ , étant multipliée par elle-même autant de fois qu'on voudra, pourvu que ce nombre de fois soit pair, le produit aura toujours le signe  $+$ ; par conséquent une puissance négative dont l'exposant est pair, comme  $-aa$ ,  $-a^4 - a^6$ , &c. est une grandeur dont la racine est impossible ou imaginaire, puisque si cette racine étoit possible, la puissance auroit toujours le signe  $+$ , & elle ne sçauroit avoir le signe  $-$ .

Mais si l'exposant du signe radical  $\sqrt{\phantom{x}}$  d'une grandeur négative est impair, la racine est une grandeur réelle; ainsi  $\sqrt[3]{-a^3}$ ,  $\sqrt[5]{-a^5}$ ,  $\sqrt[7]{-a^7}$ , &c. sont des grandeurs réelles, parce que la racine négative  $-a$ , étant multipliée par elle-même un nombre de fois qui soit impair, la puissance qui en sera le produit, sera négative; car  $-a \times -a = +aa$ , &  $+aa \times -a = -a^3$ , & ainsi des autres.

#### THEOREME. I.

24. TOUTE équation composée peut être conçue comme étant formée par la multiplication d'autant d'équations simples, que l'équation composée a de degrez.

Ainsi toute équation de deux degrez, peut être conçue comme formée par la multiplication de deux équations simples.

Toute équation du 3<sup>e</sup> degré, peut être conçue formée par la multiplication de trois équations simples; & ainsi des autres.

*Démonstration pour les équations du second degré.*

TOUTES les équations du second degré peuvent être exprimées par ces six formules.

Première,  $xx + nx + p = 0.$

Seconde,  $xx + nx - p = 0.$

Troisième,  $xx - nx + p = 0.$

Quatrième,  $xx - nx - p = 0.$

Cinquième,  $xx - p = 0.$

Sixième,  $xx + p = 0.$

Or toutes ces équations peuvent être conçues formées par la multiplication de deux équations simples.



Car, 1<sup>o</sup>. si l'on multiplie les deux équations simples  $x+a=0$ , &  $x+b=0$ , leur produit  $xx+ax+ab=0$ .

$$+bx,$$

donnera la 1<sup>re</sup> formule, en supposant  $a+b=n$ , &  $ab=p$ .

2<sup>o</sup>. Si l'on multiplie les deux équations simples  $x+a=0$ , &  $x-b=0$ , leur produit  $xx+ax-ab=0$ .

$$-bx,$$

donnera la seconde formule, en supposant, 1<sup>o</sup>.  $a$  plus grand que  $b$ , & 2<sup>o</sup>.  $a-b=n$ , &  $-ab=-p$ .

3<sup>o</sup>. Si on multiplie  $x-a=0$ , par  $x-b=0$ , leur produit  $xx-ax+ab=0$ . donnera la troisième formule, en

$$-bx,$$

supposant  $-a-b=-n$ , &  $+ab=+p$ .

4<sup>o</sup>. Si on multiplie  $x-a=0$ , par  $x+b=0$ , leur produit  $xx-ax-ab=0$ . donnera la quatrième formule, en sup-

$$+bx,$$

posant, 1<sup>o</sup>.  $a$  plus grand que  $b$ , & 2<sup>o</sup>.  $-a+b=-n$ , &  $-ab=-p$ .

5<sup>o</sup>. Si on multiplie  $x+a=0$ , par  $x-a=0$ , leur produit  $xx-aa=0$ , donnera la cinquième formule, en supposant  $-aa=-p$ .

6<sup>o</sup>. Enfin si on multiplie  $x+\sqrt{-aa}=0$ , par  $x-\sqrt{-aa}=0$ , leur produit  $xx+aa=0$ , donnera la sixième formule, en supposant  $+aa=+p$ ; par conséquent toutes les équations du second degré peuvent être conçues formées par le produit de deux équations simples.

*Démonstration pour les équations du troisième degré.*

TOUTES les équations du 3<sup>e</sup> degré peuvent être rapportées à ces quatre formules pour abréger.

Première,  $x^3 + nxx + px + q = 0$ .

Seconde,  $x^3 + px + q = 0$ .

Troisième,  $x^3 + nxx + q = 0$ .

Quatrième,  $x^3 + q = 0$ .

Or toutes les équations représentées par ces quatre formules, peuvent être conçues formées par la multiplication de trois équations simples.

Car 1<sup>o</sup>. si l'on multiplie les trois équations simples  $x+a=0$ ,  $x+b=0$ ,  $x+c=0$ , leur produit  $x^3+axx+abx+abc=0$ ,

$$+bxx+acx$$

$$+cxx+bcx,$$

H ij

donnera la première formule, en supposant  $\pm a \pm b \pm c = \pm n$ ,  $\pm ab \pm ac \pm bc = \pm p$ ,  $\pm abc = \pm q$ .

2°. Si l'on suppose que la racine de l'une des trois équations simples, par exemple  $c$  dans la troisième  $x \pm c = 0$ , est égale à la somme des deux autres  $a + b$ , & qu'elle a un signe opposé au leur, c'est-à-dire que  $c$  est négative, si  $a$  &  $b$  sont positives; & que  $c$  est positive, si  $a$  &  $b$  sont négatives, on aura la seconde formule, en supposant les grandeurs connues du troisième terme du produit des trois équations simples, égales à  $\pm p$ , & la grandeur connue du quatrième terme du produit des trois équations simples, égale à  $\pm q$ ; & à cause de  $-c = a + b$ , ou de  $+c = -a - b$ , le second terme sera détruit par des signes contraires.

3°. Si l'on suppose la même racine  $c$  avec un signe contraire à ceux des deux autres  $a$  &  $b$ , mais qu'elle leur soit inégale, on aura la troisième formule, en supposant les produits  $ac$ ,  $bc$ , avec des signes contraires à celui de  $ab$ , égaux ensemble à  $ab$ , & en supposant toujours les coefficients du deuxième & quatrième terme du produit des trois équations simples, égaux à ceux du deuxième & quatrième terme de la troisième formule.

4°. Si on multiplie les trois équations simples  $x + \frac{1}{2}a + \sqrt{-\frac{3}{4}aa} = 0$ ,  $x + \frac{1}{2}a - \sqrt{-\frac{3}{4}aa} = 0$ ,  $x - a = 0$ , leur produit  $x^3 - a^3 = 0$ , donnera la quatrième formule  $x^3 - q = 0$ , en supposant  $a^3 = q$ .

Et si on multiplie les trois équations simples  $x - \frac{1}{2}a + \sqrt{-\frac{3}{4}aa} = 0$ ,  $x - \frac{1}{2}a - \sqrt{-\frac{3}{4}aa} = 0$ ,  $x + a = 0$ , leur produit  $x^3 + a^3 = 0$ , donnera la quatrième formule  $x^3 + q = 0$ , en supposant  $a^3 = q$ .

Par conséquent toutes les équations du troisième degré peuvent être conçues comme formées par trois équations simples.

#### R E M A R Q U E.

25. ON peut aussi concevoir toutes les équations du troisième degré comme formées par la multiplication d'une équation du second degré, & d'une équation simple.

Car, 1°. si on multiplie  $xx \pm lx \pm m = 0$ , par  $x \pm c = 0$ , le produit  $x^3 \pm lxx \pm mx \pm cm = 0$ , donnera la première

formule, en supposant  $\pm l \pm c = \pm n$ ,  $\pm m \pm cl = \pm p$ ,  $\pm cm = \pm q$ .

2°. Si on multiplie  $xx \pm lx \pm m = 0$ , par  $x \mp l = 0$ , le produit  $x^3 \pm mx \mp lm = 0$ , donnera la seconde formule,

$$-llx,$$

en supposant  $\pm m - ll = \pm p$ , &  $\mp lm = \mp q$ .

3°. Si on multiplie  $xx \pm lx \mp lm = 0$ , par  $x + m = 0$ , le produit  $x^3 \pm lxx \mp lmm = 0$ , donnera la troisième formule,

$$+ mxx,$$

en supposant  $\pm l + m = \pm n$ , &  $\mp lmm = \mp q$ .

4°. Si on multiplie  $xx \pm lx + ll = 0$ , par  $x \mp l = 0$ , le produit  $x^3 \mp l^3 = 0$ , donnera la quatrième formule, en supposant  $\mp l^3 = \mp q$ .

*Démonstration pour les équations des autres degrez.*

ON voit clairement que les équations des autres degrez peuvent être conçues formées par les équations du premier, du second & du troisième degré, par exemple, celles du quatrième par une équation du premier, & une du troisième, ou par deux équations, chacune du second degré, celles du cinquième par une équation du second degré, & une du troisième, & ainsi des autres : Par conséquent toute équation composée peut être conçue formée par autant d'équations simples qu'elle a de degrez.

## R E M A R Q U E.

LORSQUE le Problème renferme quelque contradiction, l'équation composée qui l'exprime, peut toujours être conçue comme formée par autant d'équations simples qu'elle a de degrez ; mais les racines de ces équations simples ne seront pas toutes réelles, & il y en aura d'imaginaires. On en a déjà vû des exemples dans la quatrième formule du troisième degré, & dans la sixième du second degré.

## C O R O L L A I R E.

16. UNE équation composée, dont on n'a point abrégé les grandeurs connues, en supposant plusieurs de ces grandeurs égales à une seule lettre, peut toujours être divisée exactement par chacune des équations de moindre degré qu'elle n'est, par la multiplication desquelles elle a été formée : & lorsqu'une équation d'un moindre degré, est un diviseur exact

d'une équation composée d'un degré plus élevé, cette équation d'un moindre degré est une de celles dont la composée a été formée par la multiplication.

DÉMONSTRATION.

IL est évident que lorsqu'un produit a été formé par la multiplication de plusieurs grandeurs, chacune de ces grandeurs en est un diviseur exact : & lorsqu'une grandeur est un diviseur exact d'un produit, cette grandeur est une de celles dont la multiplication a formé ce produit ; ainsi le Corollaire est évident.

THEOREME II.

27. QUAND la plus haute puissance de l'inconnue est multipliée dans le premier terme d'une équation composée, par une grandeur connue différente de l'unité, on peut bien concevoir cette équation comme formée par le produit d'autant d'équations simples, qu'elle a de degrez ; mais, 1°. ou bien l'inconnue du premier terme est multipliée par une grandeur connue dans chacune des équations simples ; 2°. ou bien elle l'est dans quelques-unes, & non dans toutes ; 3°. ou bien elle l'est dans une seule.

DÉMONSTRATION.

CAR en supposant, 1°. ces équations simples  $ax - d = 0$ ,  $bx - e = 0$ ,  $cx - f = 0$ , & les multipliant les unes par les autres, l'on aura pour le premier cas l'équation composée  $abcx^3 - \&c.$  2°. En supposant  $x - d = 0$ ,  $bx - e = 0$ ,  $cx - d = 0$ , & les multipliant les unes par les autres, on aura pour le second cas l'équation composée  $bcx^3 - \&c.$  3°. En supposant  $x - d = 0$ ,  $x - e = 0$ ,  $cx - d = 0$ , & les multipliant les unes par les autres, on aura l'équation composée  $cx^3 - \&c.$

On peut aussi concevoir une équation composée, dont le premier terme a un coefficient différent de l'unité, comme le produit d'autant d'équations simples qu'elle a de degrez, dont toutes les racines sont des fractions, ou seulement quelques-unes, ou du moins une seule.

Car en supposant, 1°.  $x - \frac{d}{a} = 0$ ,  $x - \frac{e}{b} = 0$ ,  $x - \frac{f}{c} = 0$  ; ou bien, 2°.  $x - d = 0$ ,  $x - \frac{e}{b} = 0$ ,  $x - \frac{f}{c} = 0$  ; ou bien, 3°.  $x - d = 0$ ,  $x - e = 0$ ,  $x - \frac{f}{c} = 0$  ; après avoir fait la multiplica-

tion dans chacun de ces trois cas, & ensuite ôté les fractions, on aura une équation composée, dont le premier terme aura un coefficient différent de l'unité.

## C O R O L L A I R E.

28. **S**I le premier terme d'une équation composée a un coefficient différent de l'unité, les équations d'un moindre degré qu'elle n'est, par lesquelles elle peut être exactement divisée, auront toutes ou plusieurs, ou du moins quelque une, dans leur premier terme, un coefficient différent de l'unité; ou bien elles auront toutes, ou plusieurs, ou du moins quelque une des fractions pour leurs racines.

## S E C T I O N II.

*Du nombre & de la qualité des racines des équations composées.*

## D E F I N I T I O N. II.

29. **L**ES racines des équations simples dont une équation composée est le produit, s'appellent aussi *les racines* de l'équation composée.

*Corollaires qu'il faut se rendre familiers.*

**D'**OÙ il suit, 1°. Qu'une équation composée a autant de racines, qu'elle a de degrés.

2°. Que les racines d'une équation composée peuvent être ou toutes réelles, & il y en peut avoir de trois sortes, ou elles seront commensurables, ou incommensurables, ou mixtes; ou bien elles seront toutes imaginaires, ou mixtes imaginaires; ou enfin elles seront en partie réelles, & en partie imaginaires.

3°. Que chaque racine étant exprimée par une seule lettre dans chacune des équations simples, elles peuvent être ou positives, ou négatives, ou en partie positives, & en partie négatives.

4°. Que l'on peut, selon les combinaisons différentes des signes + & — des racines positives & négatives, rapporter toutes les équations de chaque degré à un nombre déterminé de formules.

Dans le second degré, il n'y en peut avoir que de trois sortes; car, ou, 1°. les deux racines seront positives; ou, 2°. négatives; ou, 3°. l'une positive, & l'autre négative.

Dans le troisieme degre, il n'y en peut avoir que de quatre fortes; car ou bien, 1°. les trois racines seront positives; ou, 2°. negatives; ou, 3°. deux positives, & une negative; ou, 4°. deux negatives, & une positive.

En general, dans chaque degre il peut y avoir autant de formules, & une de plus, qu'il y a de racines dans les equations de ce degre; scavoir cinq formules dans le quatrieme degre, six formules dans le cinquieme, sept formules dans le sixieme, &c.

En voici la demonstration pour le sixieme degre, qui servira pour tous les autres.

RACINES. 1<sup>re</sup>, 2<sup>e</sup>, 3<sup>e</sup>, 4<sup>e</sup>, 5<sup>e</sup>, 6<sup>e</sup>:

+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	—
+	+	+	+	—	—
+	+	+	—	—	—
+	+	—	—	—	—
+	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—

Il faut voir dans la Table toutes les formules differentes de chaque degre, jusqu'au quatrieme degre. Il faut les former soi-même, & se les rendre familières, pour bien concevoir ce qui suit, & on peut continuer la Table tant qu'on voudra.

Table des formules des equations composees.

Pour le second degre.		
Premiere.	Seconde.	Troisieme.
$x - a = 0. \quad x - b = 0.$	$x + a = 0. \quad x + b = 0.$	$x - a = 0. \quad x + b = 0.$
$ax - ax + bx = 0.$	$ax + ax + ab = 0.$	$ax - ax - ab = 0.$
$-bx.$	$+bx.$	$+bx.$
Pour le troisieme degre.		
Premiere.	Seconde.	
$x - a = 0. \quad x - b = 0. \quad x - c = 0.$	$x + a = 0. \quad x + b = 0. \quad x + c = 0.$	
$x^3 - axx + abx - abc = 0.$	$x^3 + axx + abx + abc = 0.$	
$-bxx + acx.$	$+bxx + acx.$	
$+cax + bcx.$	$+cax + bcx.$	
Troisieme.	Quatrieme.	
$x - a = 0. \quad x - b = 0. \quad x + c = 0.$	$x - a = 0. \quad x + b = 0. \quad x + c = 0.$	
$x^3 - axx + abx + abc = 0.$	$x^3 - axx - abx - abc = 0.$	
$-bxx - acx.$	$+bxx - acx.$	
$+cax - bcx.$	$+cax + bcx.$	

Pour

Pour le quatrième degré.

Première.

Seconde.

$$x-a=0. \quad x-b=0. \quad x-c=0. \quad x-d=0. \quad | \quad x+a=0. \quad x+b=0. \quad x+c=0. \quad x+d=0.$$

$$\begin{aligned} x^4 - ax^3 + abxx - abcx + abcd &= 0. \\ -bx^3 + acxx - abdx & \\ -cx^3 + bcxx - acdx & \\ -dx^3 + adxx - bcdx & \\ + bdxx & \\ + cdxx & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^4 + ax^3 + abxx + abcx + abcd &= 0. \\ +b & +ac & +abd \\ +c & +bc & +acd \\ +d & +ad & +bcd \\ & +bd \\ & +cd. \end{aligned}$$

Troisième.

Quatrième.

$$x-a=0. \quad x-b=0. \quad x-c=0. \quad x+d=0. \quad | \quad x-a=0. \quad x+b=0. \quad x+c=0. \quad x+d=0.$$

$$\begin{aligned} x^4 - ax^3 + abxx - abcx - abcd &= 0. \\ -b & +ac & +abd \\ -c & +bc & +acd \\ +d & -ad & +bcd \\ & -bd \\ & -cd. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^4 - ax^3 - abxx - abcx - abcd &= 0. \\ +b & -ac & -abd \\ +c & +bc & -acd \\ +d & -ad & +bcd \\ & +bd \\ & +cd. \end{aligned}$$

Cinquième.

$$x-a=0. \quad x-b=0. \quad x+c=0. \quad x+d=0.$$

$$\begin{aligned} x^4 - ax^3 + abxx + abcx + abcd &= 0. \\ -b & -ac & +abd \\ +c & -bc & -acd \\ +d & -ad & -bcd \\ & -bd \\ & +cd \end{aligned}$$

50. Le coefficient du second terme d'une équation composée, contient la somme de toutes les racines, sans être multipliées les unes par les autres.

Le coefficient du troisième terme contient les produits de toutes les racines, multipliées deux à deux autant de fois qu'elles le peuvent être, pour faire des produits differens.

Le coefficient du quatrième terme contient les produits de toutes les racines, multipliées trois à trois autant de fois qu'elles le peuvent être, pour faire des produits differens.

Le coefficient du cinquième terme contient tous les produits des racines, multipliées quatre à quatre, & ainsi de suite jusqu'au dernier terme tout connu, qui contient toujours le seul produit de toutes les racines.

Cela est évident par la formation des formules de la Table.

60. Dans les termes pairs, sçavoir le second, le quatrième, le sixième, &c. les racines sont une à une dans le second, & multipliées en nombre impair dans les autres; sçavoir,

trois à trois dans le quatrième terme, cinq à cinq dans le sixième, &c.

Dans les termes impairs, c'est-à-dire dans le troisième, le cinquième, &c. les racines sont multipliées les unes par les autres en nombre pair; sçavoir, deux à deux dans le troisième, quatre à quatre dans le cinquième, &c.

7°. Si toutes les racines sont négatives, tous les termes de l'équation composée sont positifs, c'est-à-dire, ils ont tous le signe +; car tous les termes des équations simples ayant le signe +, tous les produits qui en sont formez ne peuvent avoir que le signe +.

8°. Si toutes les racines sont positives, tous les termes ont alternativement + & —, car le premier terme a toujours + par la supposition; le second terme ne contient que la somme des racines qui ont toutes le signe —, dans les équations simples; ainsi le second terme a le signe —: pour les autres termes, tous les pairs ayant pour leur coefficient les produits des racines en nombre impair, ils ont nécessairement le signe —; & tous les impairs ayant pour leur coefficient les produits des racines en nombre pair, ils ont nécessairement le signe +; par conséquent les signes + & — se suivent alternativement, lorsque toutes les racines sont positives; ainsi, quand dans une équation composée les signes sont alternativement + & —, toutes les racines sont positives.

9°. D'où il suit que si tous les termes n'ont pas le signe +, & si les + & — ne se suivent pas alternativement, il y a nécessairement des racines positives & des racines négatives dans l'équation.

Ces Corollaires étant démontrés, il y a contradiction dans le Problème, c'est-à-dire il y a des racines imaginaires dans l'équation du Problème, quand ils ne se trouvent pas véritables; ce qu'on doit aussi entendre des Corollaires suivans.

10°. Lorsqu'il manque quelque terme dans l'équation, il est nécessaire qu'il y ait des racines positives & négatives, puisqu'un terme ne peut être détruit que par les signes contraires + & — des produits dont ce terme est composé: & ces produits ne peuvent avoir des signes contraires, qu'il n'y ait des racines positives & négatives. Ainsi l'on a ces deux marques pour connoître qu'il y a dans une équation des racines positives & des négatives; 1°. Lorsque la suite alter-



native des + & des — est interrompue dans les termes d'une équation où tous les termes ne sont pas positifs, 2°. Lorsqu'il manque quelque terme dans une équation.

11°. Le second terme d'une équation contenant la somme des racines ; si la somme des positives est égale à celle des négatives, il sera détruit par des signes contraires.

Si la somme des positives surpasse celle des négatives, le second terme aura — ; & il aura + si la somme des négatives surpasse celle des positives.

Ainsi quand le second terme manque dans une équation, on est assuré que les racines positives sont égales à la somme des négatives.

12°. Si le second terme manque dans une équation du troisième & du quatrième degré, le troisième terme a toujours le signe —.

*Démonstration pour le troisième degré.*

Le second terme étant détruit, il faut qu'il y ait dans l'équation deux racines positives, & une négative, & que la négative soit égale aux deux positives ; ou qu'il y ait deux racines négatives, & une positive qui soit égale aux deux négatives : ainsi les équations du troisième degré où manque le second terme, sont exprimées par ces deux formules, où  $c = a + b$ .

Donc dans le troisième terme, le produit —  $ac$  surpasse le produit +  $ab$  ; par conséquent le troisième terme a le signe —.

*Démonstration pour le quatrième degré.*

Les équations du quatrième degré où le second terme est détruit, ayant des racines positives & négatives ; & les positives étant égales aux négatives, elles sont toutes exprimées par ces trois formules.

$$\begin{array}{rcl}
 x - a = 0. & x x - b = 0. & \\
 x x - c = 0. & x x + d = 0. & \\
 \hline
 x^4 - ax^3 + abxx - abcx - abcd = 0. & & \\
 -b + ac + abd & & \\
 -c + bc + acd & & \\
 + d - ad + bcd & & \\
 -bd & & \\
 -cd. & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + a = 0. \quad x x + b = 0. \\ x x + c = 0. \quad x x - d = 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + a = 0. \quad x x + b = 0. \\ x x - c = 0. \quad x x - d = 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x^4 + ax^3 + abxx + abcx - abcd = 0. \\ + b \quad + ac \quad - abd \\ + c \quad + bc \quad - acd \\ - d \quad - ad \quad - bcd \\ \quad - bd \\ \quad - cd. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x^4 + ax^3 + abxx - abcx + abcd = 0. \\ + b \quad - ac \quad - abd \\ - c \quad - ad \quad + acd \\ - d \quad - bc \quad + bcd \\ \quad - bd \\ \quad + cd \end{array}$$

Dans les deux premières  $d = a + b + c$ ; par conséquent dans le troisième terme  $-ad$  surpasse  $+ab$ ;  $-cd$  surpasse  $+ac$  &  $-bd$  surpasse  $+bc$ ; ainsi les produits négatifs surpassent les positifs dans le troisième terme.

Dans la dernière  $c + d = a + b$ , soit  $m = c + d = a + b$ ; donc  $mm = ac + ad + bc + bd$ ;  $mm$  est aussi  $aa + 2ab + bb$ ;  $mm$  est encore  $cc + 2cd + dd$ ; donc  $\frac{mm}{2} = \frac{aa + bb}{2} = ab$ , &  $\frac{mm}{2} = \frac{cc + dd}{2} = cd$ ; donc  $mm = \frac{aa + bb + cc + dd}{2} = ab + cd$ ; donc  $mm$  surpasse  $ab + cd$ ; donc  $-ac - ad - bc - bd = -mm$  surpasse  $+ab + cd$ ; donc dans la dernière formule, les produits négatifs du troisième terme surpassent les positifs.

13°. D'où il suit que quand le second terme manque dans une équation du troisième & du quatrième degré, si le troisième terme a le signe  $+$ , il y a nécessairement des racines imaginaires dans l'équation.

14°. Les racines imaginaires sont toujours en nombre pair dans une équation composée, où l'on suppose qu'il n'y a pas d'incommensurables; c'est-à-dire il y en a deux, ou quatre, ou six, &c.

### DÉMONSTRATION.

S'IL y a des imaginaires dans une équation, il faut que le produit des unes par les autres les rende réelles, pour faire disparaître leur signe radicale  $\sqrt{-}$ , dans le dernier terme: mais le produit des imaginaires ne sçauroit faire disparaître leur signe  $\sqrt{-}$ , qu'elles ne soient multipliées en nombre pair; car, par exemple,  $+\sqrt{-a}$  multipliées par  $-\sqrt{-a}$ , donne le produit réel  $+a$ ; mais s'il y en avoit une troisième,  $-\sqrt{-a}$ , le produit seroit  $-a\sqrt{-a}$ . Les racines imaginaires ne sçauroient donc être qu'en nombre pair dans une équation.

Ainsi s'il y a des racines imaginaires dans une équation du second degré, elles le sont toutes d'eux : S'il y en a dans le troisième degré, il y a toujours une racine réelle, &c.

15°. Les produits réels tous connus, qui naissent de la multiplication des seules imaginaires, ont toujours le signe +.

## D É M O N S T R A T I O N .

**L**Es imaginaires étant toujours en nombre pair, on peut considérer à part les équations du second degré formées par les imaginaires prises deux à deux.

Mais afin que deux racines imaginaires disparoissent dans le second terme, comme on le suppose, il faut

que l'une ait +, & l'autre —, & que les parties réelles —  $a$ , —  $a$ , aient

le même signe +, ou le même signe —, & le produit réel de  $+\sqrt{-aa}$  par  $-\sqrt{-aa}$ , est  $+aa$ ; par conséquent les produits réels tous connus, qui naissent de la multiplication des imaginaires, ont toujours +.

$$x - a + \sqrt{-aa} = 0.$$

$$x - a - \sqrt{-aa} = 0.$$

---


$$xx - 2ax + 2aa = 0.$$

D'où il suit, le signe + n'apportant aucun changement dans les multiplications, que s'il y a des racines imaginaires avec des racines réelles dans une équation composée, les réelles y conserveront toujours leur signe dans le dernier terme, c'est-à-dire, les imaginaires ne feront pas de changement dans le signe du produit des réelles du dernier terme.

16°. Le dernier terme d'une équation, étant le produit de toutes les racines, lorsque le nombre des racines positives est pair, il a toujours le signe +; lorsqu'il est impair, il a le signe —; & lorsqu'il a le signe —, il y a nécessairement quelque racine réelle dans l'équation; car le produit des imaginaires donne toujours le signe +.

## T H E O R È M E   I I I .

30. **S**I l'on change tous les signes des termes pairs d'une équation composée, c'est-à-dire du 2<sup>e</sup>, 4<sup>e</sup>, 6<sup>e</sup>, &c. sans toucher aux signes des termes impairs, c'est-à-dire du 3<sup>e</sup>, 5<sup>e</sup>, &c. toutes les racines positives de l'équation composée seront changées en négatives, & toutes les négatives en positives.

## DÉMONSTRATION.

1°. **L**E second terme contient la somme des racines ; les positives y ont le signe —, & les négatives le signe + ; ainsi en changeant dans le second terme les + en —, & les — en +, il est évident que les positives seront changées en négatives, & les négatives en positives.

2°. Chacun des termes pairs contient les produits des racines multipliées les unes par les autres en nombre impair ; ceux qui ont + sont nécessairement formez ou par un nombre impair de racines qui ont chacune +, ou bien par un nombre pair de racines qui ont —, & un nombre impair de racines qui ont + ; ceux qui ont — sont nécessairement formez par un nombre impair de racines qui ont chacune —, ou par un nombre pair de racines qui ont +, & un impair de racines qui ont — ; donc si l'on change les signes des multiplicateurs, c'est-à-dire les racines positives en négatives, & les négatives en positives, on changera nécessairement les signes des termes pairs ; ainsi en changeant les signes des termes pairs, on change les signes des racines ; c'est-à-dire les positives en négatives, & les négatives en positives.

3°. Au contraire, les termes impairs contiennent les produits des racines multipliées en nombre pair.

Ainsi ceux qui ont +, sont nécessairement formez ou seulement d'un nombre pair de positives, ou seulement d'un nombre pair de négatives, ou bien d'un nombre pair de positives, & d'un nombre pair de négatives.

Ceux qui ont — sont nécessairement formez d'un nombre impair de positives, & d'un nombre impair de négatives ; par conséquent si on change les signes des multiplicateurs, c'est-à-dire des racines positives & négatives, on aura des produits qui auront dans les termes impairs les mêmes signes qu'ils avoient ; ainsi les termes impairs ne changent point de signes en changeant les racines positives en négatives, & les négatives en positives : Il est donc évident qu'en changeant les signes des termes pairs, sans toucher aux signes des termes impairs, on change toutes les racines positives en négatives, & les négatives en positives.

## COROLLAIRE.

DANS cette formule du troisième degré  $x^3 - px + q = 0$ , où il y a des racines positives & négatives, puisque le second terme est évanoui, & où il faut qu'il y ait deux racines positives, & une négative, puisque le dernier terme  $q$  a le signe +; si l'on change le seul signe du dernier terme, la formule  $x^3 - px - q = 0$ , contiendra les mêmes racines que la précédente, mais les deux positives seront changées en négatives, & la négative en positive: car les signes des termes pairs ont été changez.

## THEOREME IV.

31. SI l'on substitue dans une équation composée l'une de ses racines, laquelle on voudra, avec ses puissances, à la place de l'inconnue & de ses puissances, en donnant le signe + à la racine positive qu'on substitue, & le signe - à la racine négative qu'on substitue, tous les produits de tous les termes de l'équation se détruiront après la substitution; c'est-à-dire qu'il s'en trouvera précisément autant avec le signe +, qu'il y en aura avec le signe -, qui seront égaux les uns aux autres.

Pour démontrer ce Theorème, on fera voir, 1°. qu'après la substitution d'une racine dans l'équation, le premier terme, ou le premier produit, a un produit dans le second terme, qui est précisément le même; que les autres produits du second terme en ont tout autant d'égaux dans le troisième terme; que les autres produits du troisième terme en ont un égal nombre d'égaux dans le quatrième; & ainsi de suite jusqu'au dernier terme, qui en a un dans le penultième qui lui est égal. 2°. Que ces produits égaux dans deux termes qui se suivent, ont des signes contraires, d'où il suivra qu'ils se détruisent.

On prendra une formule du quatrième degré, afin que la démonstration soit plus facile, étant appliquée à un exemple.

$$\begin{array}{rcl}
 x - a = 0. & & x x - b = 0. \\
 x x - c = 0. & & x x x - d = 0. \\
 \hline
 x^4 - ax^3 + abxx - abcx + abcd = 0. \\
 -b & +ac & -abd \\
 -c & +ad & -acd \\
 -d & +bc & -bcd \\
 & +bd & \\
 & +cd. & 
 \end{array}$$

En substituant  $+a$  à la place de  $+x$ ,  
on trouve

$$\begin{aligned} & a^4 - a^4 \\ & - ba^3 + ba^3 \\ & - ca^3 + ca^3 \\ & - da^3 + da^3 \\ & + bcaa - bcaa \\ & + bdaa - bdaa \\ & + cdaa - cdaa \\ & - bcda + bcda = 0. \end{aligned}$$

## DÉMONSTRATION.

1°. EN substituant  $+a$  dans le premier terme  $+x^4$ , on trouve  $+a^4$ ; Mais dans le second terme, chaque racine est multipliée par  $x^3$ , ainsi  $a$  étant multipliée par  $+a^3$ , qu'on a substituée

à la place de  $+x^3$ , il y aura dans le second terme un seul produit  $a^4$  égal à celui du premier terme.

Les autres produits du second terme  $-bx^3$ ,  $-cx^3$ ,  $-dx^3$ , sont les trois autres racines multipliées par  $+x^3$ ; ainsi après la substitution, l'on aura les trois autres racines multipliées par  $+a^3$ , savoir  $ba^3$ ,  $ca^3$ ,  $da^3$ ; mais le troisième terme contient les produits des racines deux à deux, ainsi il y a trois produits où  $a$  est multipliée par les trois autres racines  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , qui sont  $abxx$ ,  $acxx$ ,  $adxx$ .

La substitution mettant dans ces produits  $+aa$ , au lieu de  $+xx$ , il y aura trois produits dans le troisième terme des trois autres racines multipliées par  $+a^3$ , qui sont  $ba^3$ ,  $ca^3$ ,  $da^3$ .

Les autres produits  $bcxx$ ,  $bdxx$ ,  $cdxx$ , qui restent dans le troisième terme, sont les produits des trois autres racines  $b$ ,  $c$ ,  $d$  prises deux à deux par  $xx$ ; & après la substitution ils deviennent  $bcaa$ ,  $bdaa$ ,  $cdaa$ : mais le quatrième terme contient les produits de toutes les racines prises trois à trois, ainsi il y a trois produits  $abcx$ ,  $abdx$ ,  $acdx$ , où  $a$  est multipliée par les trois autres prises deux à deux. C'est pourquoi la substitution mettant dans ces produits  $a$  au lieu de  $x$ , il y aura dans le quatrième terme trois produits des trois racines  $b$ ,  $c$ ,  $d$  prises deux à deux par  $ax$ , qui sont  $bcaa$ ,  $bdaa$ ,  $cdaa$ .

Il reste dans le quatrième terme après la substitution un produit de  $a$  par les trois autres racines, qui est  $bcda$ ; mais il est évident que le dernier terme  $abcd$ , est le même produit.

2°. Il reste à démontrer que les produits égaux de deux termes qui se suivent, ont des signes opposés.

Quand la racine est positive, elle a le signe — dans l'équation,

tion, & en la substituant, on lui donne le signe  $+$  : C'est le contraire quand elle est négative. Ainsi quand on substitue une racine à la place de l'inconnue, on lui donne un signe opposé à celui qu'elle a dans l'équation.

Il faut aussi remarquer que le  $+$  multipliant le  $+$  ou le  $-$ , ne change rien dans le signe de la grandeur multipliée : au contraire le  $-$  change toujours le signe de la grandeur par laquelle on le multiplie ; car  $-$  par  $+$  donne  $-$ , &  $-$  par  $-$  donne  $+$ .

Il suit de là qu'en faisant la substitution de  $+a$ , au lieu de  $+x$ , tous les produits ne changent point de signe ; mais ceux qui dans l'équation sont multipliés par la racine  $-a$ , ont des signes contraires à ceux qu'ils auroient sans cela : Par conséquent après la substitution, le produit  $a^3$  du premier terme, & celui du second, qui lui est égal, sçavoir  $-a^3$ , ont des signes oppo-  
sez.

Par la même raison, les produits qui restent dans le second terme  $-ba^3 - ca^3 - da^3$ , & ceux du troisième terme qui leur sont égaux, sçavoir  $+ba^3 + ca^3 + da^3$ , ont des signes contraires. Car les premiers sont faits de  $+a^3$  par les racines  $-b, -c, -d$ , différentes de  $a$  ; & ceux du troisième terme qui leur sont égaux, sont formés par les produits des mêmes racines  $-b, -c, -d$ , multipliées par  $-a$ , & ensuite par  $+a^3$  : or  $-a$  change leur signe en les multipliant.

Il est évident que le même raisonnement s'étend à tous les autres produits égaux dans deux termes qui se suivent.

Par conséquent tous les produits de tous les termes d'une équation, sont détruits par la substitution d'une des racines ; car ce que l'on a dit de la première, convient évidemment à chacune des autres.

## C O R O L L A I R E S.

32. 1<sup>o</sup>. L'INCONNUE d'une équation composée représente également chacune des racines de l'équation ; car en substituant successivement chacune des racines à la place de l'inconnue, tous les produits se détruiront toujours.

C'est la raison pourquoi on forme les équations par la multiplication des équations simples, dont le second membre est zéro, & non pas par la multiplication des équations simples, dont le premier membre auroit l'inconnue, & le second

membre sa racine ; car en les formant de cette seconde manière ; l'inconnue ne représenteroit pas dans l'équation chacune des racines, comme elle les représente en formant l'équation de la première manière.

2°. Chaque racine est la valeur de l'inconnue dans une équation composée, aussi bien que dans les équations simples.

3°. Les valeurs de l'inconnue dans une équation composée, & les racines de l'équation composée étant la même chose, l'inconnue d'une équation composée a autant de valeurs que l'équation a de degrés. Ainsi dans une équation du second degré, l'inconnue a deux valeurs : elle en a trois dans une équation du troisième degré ; & ainsi des autres.

33. 4°. L'on a deux moyens pour reconnoître quand une grandeur est la valeur de l'inconnue, ou une racine de l'équation : Le premier, lorsqu'en divisant l'équation composée par une équation simple, qui a la même inconnue linéaire moins cette grandeur, quand elle est une valeur positive, & plus cette grandeur, quand elle est une valeur négative ; la division est exacte, c'est-à-dire sans reste. Le second, lorsqu'en substituant cette grandeur, à la place de l'inconnue, dans l'équation, avec le signe + lorsqu'elle est positive, avec le signe — lorsqu'elle est négative, tous les produits de l'équation se détruisent par des signes contraires, c'est-à-dire sont égaux à zero.

#### THEOREME V.

34. **L**ORSQUE dans une équation composée le premier terme n'a pas d'autre coefficient que l'unité, & qu'il n'y a ni fractions, ni incommensurables, aucune des racines réelles de l'équation n'est une fraction.

#### DEMONSTRATION.

**S**I quelque-une des racines réelles étoit une fraction, quelque-une des équations simples par la multiplication desquelles l'équation composée est formée ; auroit pour sa racine une fraction. Or s'il y en avoit quelque-une, l'équation composée en auroit aussi ; & pour l'ôter, il auroit fallu multiplier tous les termes de l'équation par le dénominateur de cette fraction ; ce qui auroit donné nécessairement un coefficient au premier terme, différent de l'unité, contre la supposition.



*Démonstration particulière pour les équations numériques.*

SI une fraction pouvoit être la racine d'une équation numérique, dont le premier terme n'a pas d'autre coefficient que l'unité, & où il n'y a ni fractions, ni incommensurables, il est certain par le quatrième Theorème, que cette fraction & ses puissances étant substituées à la place de l'inconnue & de ses puissances, tous les termes de l'équation se détruiraient après la substitution.

Pour rendre la démonstration plus claire & plus générale, on supposera une équation du troisième degré  $x^3 - nxx + px - q = 0$ , où les coefficients  $n, p, q$ , représentent des nombres; & on supposera que la fraction à substituer est représentée par  $\frac{a}{b}$ , qui étant réduite aux moindres termes, est  $\frac{a^1}{b^1}$ . Qu'on substitue la fraction  $\frac{a^1}{b^1}$  à la place de l'inconnue, on aura  $\frac{a^{13}}{b^{13}} - \frac{a^{12}}{b^{12}} n + \frac{a^1}{b^1} p - q = 0$ , & par transposition  $\frac{a^{13}}{b^{13}} = \frac{a^{12}}{b^{12}} n - \frac{a^1}{b^1} p + q$ .

Réduisant les fractions à l'exposant, l'on aura  $\frac{a^1}{b^1} = \frac{a^1}{b^1} n - \frac{a^1}{b^1} p + q$ .

Multipliant chaque membre par  $bb$ , on aura  $\frac{a^1}{b^1} = aan - abp + bbq$ .

Il est certain que le second membre de cette égalité est un nombre entier; ainsi la fraction  $\frac{a^1}{b^1}$  est égale à un nombre entier.

Mais par ce qui est démontré dans les proportions, la fraction  $\frac{a^1}{b^1}$  étant supposée dans les moindres termes, le numérateur  $a^1$  de la fraction  $\frac{a^1}{b^1}$ , n'a aucun diviseur commun avec le dénominateur  $b$ ; ainsi la fraction  $\frac{a^1}{b^1}$  est dans les moindres termes, & ne sçauroit être égale à un nombre entier.

Par conséquent en supposant qu'une fraction peut être la racine d'une équation, dont le premier terme n'a que l'unité pour coefficient, & qui n'a ni fractions, ni incommensurables, cela conduit à cette absurdité, qu'une fraction réduite aux moindres termes, peut être égale à un nombre entier: Il ne se peut donc pas faire, qu'une fraction soit la racine d'une telle équation.

## COROLLAIRE.

35. LORSQU'UNE équation composée n'a ni fractions, ni incommensurables, que son premier terme n'a que l'unité

pour coëfficient, & que ses racines sont réelles; si des grandeurs entières ne sont pas ses racines, ses racines sont incommensurables.

Car ses racines réelles ne peuvent être que des grandeurs entières, ou des fractions, ou des incommensurables; on suppose qu'il n'y a pas de grandeurs entières qui soient les racines de l'équation; on vient de démontrer qu'elles ne peuvent être des fractions; par conséquent il faut qu'elles soient incommensurables.

#### R E M A R Q U E.

AU lieu de supposer dans les équations lineaires, dont une équation composée est le produit, l'inconnue  $x$  positive; si on la suppose négative  $-x$ , comme dans cet exemple  $-x - a = 0$ ,  $-x + b = 0$ , l'on aura une équation composée  $xx + ax - ab = 0$ , dans laquelle les racines qui étoient  $-bx$ ,

positives dans la supposition de  $+x$ , seront négatives, & les négatives seront positives. Car puisque  $-x - a = 0$ , l'on aura  $x = -a$ ; & puisque  $-x + b = 0$ , l'on aura  $x = b$ .

#### C O R O L L A I R E.

D'OU il suit qu'en changeant dans une équation composée tous les signes des termes, où la puissance de l'inconnue est impaire, comme  $x$ ,  $x^3$ ,  $x^5$ , &c. sans toucher aux autres, toutes les racines positives seront changées en négatives, & les négatives en positives.

### S E C T I O N III.

#### *De la transformation des équations composées.*

#### D É F I N I T I O N.

QUAND on change une équation en une autre du même degré, qui a une inconnue différente de l'inconnue de la première, & dont toutes les racines ont un rapport connu avec les racines de la première, ce changement s'appelle *transformation*; & la seconde équation s'appelle la *transformée* de la première.

Il est évident que les racines de la transformée étant connues, elles feront connoître les racines de l'équation dont elle est la transformée,

## PROBLÈME I.

*Qui contient toutes les transformations.*

36. TRANSFORMER une équation proposée, par exemple,  
 $x^3 - nxx + px - q = 0$ , ou son équivalente  $x^3 - axx + abx$   
 $- bxx + acx$   
 $- abc = 0.$   $- cxx + bcx,$

en une autre équation dont les racines soient, 1°. celles de la proposée, augmentées chacune d'une grandeur connue, telle qu'on voudra, comme  $f$ ; 2°. ou bien diminuées chacune d'une grandeur connue  $f$ ; 3°. ou bien retranchées elles-mêmes chacune d'une grandeur connue  $f$ ; 4°. ou bien multipliées chacune par une grandeur connue  $f$ ; 5°. ou bien divisées chacune par une grandeur connue  $f$ ; 6°. ou bien de manière que les valeurs de l'inconnue de la transformée soient les racines 2<sup>e</sup>, 3<sup>e</sup>, &c. ou les puissances 2<sup>e</sup>, 3<sup>e</sup>, &c. des racines de la proposée; 7°. ou bien de manière que les valeurs de l'inconnue de la transformée soient moyennes proportionnelles entre une grandeur connue  $f$ , & les racines de la proposée; 8°. ou bien de manière que les racines de la proposée soient les quatrièmes proportionnelles aux racines de la transformée, à une grandeur connue, & à l'unité, ou bien à une seconde grandeur connue; 9°. ou bien de manière que les racines de la proposée soient égales aux racines de la transformée, plus ou moins une grandeur connue, divisée ou multipliée par les racines de la transformée, ou par quelque multiple de ces racines; 10°. ou bien enfin de manière que les racines de la transformée aient avec celles de la proposée tel rapport qu'on voudra, comme celui de  $f$  à  $g$ .

## M É T H O D E.

1°. IL faut prendre une seconde inconnue  $y$ , qui représente chaque racine de la transformée, & se servir de l'inconnue  $x$ , de la proposée, pour en marquer chaque racine, & faire une équation qui exprime le rapport qui doit être entre les racines de la proposée & celles de la transformée.

2°. Il faut prendre dans cette équation la valeur de l'inconnue  $x$  de la proposée, & substituer cette valeur & ses puissances à la place de l'inconnue  $x$  & de ses puissances dans la proposée.

L'équation qu'on trouvera étant ordonnée & abrégée, sera la transformée qu'on cherche.

*I. Pour augmenter les racines de la proposée de la grandeur f.*

ON supposera l'inconnue  $y$  pour exprimer les racines de la transformée, & se servant de l'inconnue  $x$  de la proposée, on fera l'équation  $x + f = y$ , qui exprime que la racine  $x$  de la proposée étant augmentée de la grandeur connue  $f$ , est égale à la racine  $y$  de la transformée.

On prendra dans cette équation la valeur de  $x$ , qui est  $x = y - f$ .

On substituera cette valeur & ses puissances à la place de  $x$  & de ses puissances dans la proposée  $x^3 - nxx + px - q = 0$ .

$$\begin{array}{rcl}
 x^3 & = & y^3 - 3fyy + 3ffy - f^3 \\
 -nxx & = & -nyy + 2nfy - nff \\
 +px & = & +py - pf \\
 -q & = & -q. \\
 \hline
 y^3 - 3fyy + 3ffy - f^3 & = & 0. \\
 -nyy + 2nfy - nff & & \\
 +py - pf & & \\
 -q & &
 \end{array}$$

& l'on trouvera l'équation transformée, dont les racines sont celles de la proposée, augmentées chacune de la grandeur  $f$ .

Quand on aura la valeur de  $y$  dans la transformée, on la substituera dans  $x = y - f$ , à la place de  $y$ , & l'on aura la valeur de  $x$  de la proposée.

*II. Pour diminuer les racines de la proposée de la grandeur f.*

ON supposera  $x - f = y$ , d'où l'on déduira  $x = y + f$ ; on substituera  $y + f$  à la place de  $x$ , & les puissances de  $y + f$  à la place des puissances de  $x$ , dans la proposée.

$$\begin{array}{rcl}
 x^3 & = & y^3 + 3fyy + 3ffy + f^3 \\
 -nxx & = & -nyy - 2fny - nff \\
 +px & = & +py + pf \\
 -q & = & -q. \\
 \hline
 y^3 + 3fyy + 3ffy + f^3 & = & 0. \\
 -nyy - 2fny - nff & & \\
 +py + pf & & \\
 -q & &
 \end{array}$$

& l'on trouvera la transformée, dont les racines sont celles de la proposée, diminuées chacune de la grandeur  $f$ .

*III. Pour trouver la transformée, dont les racines y soient celles de la proposée, retranchées de la grandeur  $f$ .*

ON supposera  $f - x = y$ ; d'où l'on déduira  $f - y = x$ ; on substituera  $f - y$  & ses puissances, à la place de  $x$  & des puissances de  $x$ , dans la proposée

$$\begin{array}{rcl} x^3 & = & f^3 - 3ffy + 3fyy - y^3 \\ - nxx & = & - nff + 2nfy - nyy \\ + px & = & + pf - py \\ - q & = & - q. \end{array}$$


---


$$\begin{array}{rcl} f^3 - 3ffy + 3fyy - y^3 & = & 0. \\ - nff + 2nfy - nyy & & \\ + pf - py & & \\ - q & & \end{array}$$

& l'on trouvera la transformée, dont les racines sont celles de la proposée, retranchées chacune de la grandeur  $f$ .

*IV. Pour trouver la transformée, dont les racines y soient celles de la proposée, multipliées par la grandeur  $f$ .*

ON supposera  $fx = y$ , d'où l'on déduira  $x = \frac{y}{f}$ ; on substituera  $\frac{y}{f}$  & ses puissances à la place de  $x$  & de ses puissances, dans la proposée; & l'on trouvera  $\frac{y^3}{f^3} - \frac{nyy}{ff} + \frac{pfy}{f} - q = 0$ .

Otant les fractions, on aura la transformée  $y^3 - nfy + pffy - f^3q = 0$ , dont les racines sont celles de la proposée, multipliées par  $f$ .

*Abregé de la transformation précédente.*

POUR multiplier les racines d'une équation par une grandeur  $f$ , il faut simplement changer l'inconnue  $x$  en une nouvelle inconnue  $y$ ; & sans toucher au premier terme, multiplier le second par la grandeur  $f$ , le troisième par  $ff$ , le quatrième par  $f^3$ ; & ainsi de suite.

*V. Pour trouver la transformée, dont les racines y soient celles de la proposée, divisées par la grandeur  $f$ .*

ON supposera  $\frac{x}{f} = y$ , d'où l'on déduira  $x = fy$ ; on substituera  $fy$  & ses puissances à la place de  $x$  & de ses puissances

dans la proposée, & l'on trouvera  $f^3 y^3 - nffyy + pfy - q = 0$ ; divisant l'équation par  $f^3$ , on aura la transformée  $y^3 - \frac{nff}{f}y + \frac{pf}{f} - \frac{q}{f^3} = 0$ , dont les racines sont celles de la proposée divisées par  $f$ .

*Abregé.*

**P**OUR diviser les racines d'une équation par une grandeur  $f$ , il faut simplement changer l'inconnue  $x$  en  $y$ ; & sans toucher au premier terme, diviser le second par  $f$ , le troisième par  $ff$ , le quatrième par  $f^3$ ; & ainsi de suite.

*VI. Pour trouver une transformée, dans laquelle les valeurs de  $y$  soient les racines secondes, troisièmes, &c. des racines de la proposée.*

**O**N supposera  $\sqrt{x} = y$ , ou bien  $\sqrt[3]{x} = y$ , &c. d'où l'on déduira  $x = yy$ ; ou bien  $x = y^3$ , &c. on substituera  $yy$ , ou  $y^3$  & les puissances de  $yy$  ou de  $y^3$ , à la place de  $x$  & de ses puissances, dans la proposée; & l'on trouvera la transformée  $y^6 - ny^4 + py^3 - q = 0$ ; ou bien  $y^9 - ny^6 + py^3 - q = 0$ ; les valeurs de  $y$  dans la première, sont les racines quarrées des racines de la proposée; les valeurs de  $y$  dans la seconde, sont les racines troisièmes des racines de la proposée.

Si la proposée étoit  $x^2 - nx^2 + pxx - q = 0$ , ou bien  $x^3 - nx^2 + px^3 - q = 0$ , en supposant pour la première  $xx = y$ , & pour la seconde  $x^3 = y$ , l'on trouveroit la transformée  $y^3 - nyy + py - q = 0$ , dont les racines seroient les quarrés des valeurs de  $x$  dans la première proposée, & les cubes des valeurs de  $x$  dans la seconde.

*VII. Pour trouver une transformée dans laquelle les valeurs de l'inconnue  $y$  soient moyennes proportionnelles entre une grandeur connue  $f$ , & les racines de la proposée.*

**O**N supposera  $y = \sqrt{fx}$ , d'où l'on déduira  $yy = fx$ , &  $x = \frac{yy}{f}$ ; on substituera cette valeur de  $x$  & les puissances à la place de  $x$  & de ses puissances dans la proposée; & l'on trouvera la transformée  $y^6 - nfy^4 + pffyy - qf^3 = 0$ , dans laquelle les valeurs de  $y$  sont moyennes proportionnelles entre  $f$  & les racines de la proposée  $x^3 - nxx + px - q = 0$ .

*VIII. Pour trouver une transformée de manière que  $y. f :: 1. x$ .*

**O**N supposera  $x = \frac{f}{y}$ ; & par substitution on trouvera la transformée  $f^3 - nffy + pfyy - qy^3 = 0$ , & par transposition

tion  $qy^3 - pfy + nff - f^3 = 0$ ; & divisant le tout par  $q$ ,  
 $y^3 - \frac{pfy + nff - f^3}{q} = 0$ , sera la transformée qu'on cherche.

*IX. Pour trouver la transformée de  $x^3 - pxx - q = 0$ , qui soit telle que les racines  $x$  de la proposée soient égales à celles de la transformée plus ou moins une grandeur connue divisée ou multipliée par les racines de la transformée, ou par un multiple de ces racines.*

**P**AR exemple, pour trouver la transformée de  $x^3 - px \pm q = 0$ , qui soit telle que  $x = y + \frac{p}{y}$ , on substituera  $y + \frac{p}{y}$ , & son cube à la place de  $x$ ,  $x^3$ ;

$$\begin{aligned} x^3 &= y^3 + py + \frac{p^2}{y} + \frac{p^3}{y^3} \\ -px &= -py - \frac{p^2}{y} \\ \pm q &= \pm q \end{aligned}$$

& l'on trouvera  $y^3 \pm q + \frac{p^3}{y^3} = 0$ ;

multipliant le tout par  $y^3$ , l'on aura  $y^6 \pm qy^3 + \frac{p^3}{y^3} = 0$ , pour la transformée qu'on cherche. Cette transformée n'est que du second degré.

Si la proposée étoit  $x^3 + px \pm q = 0$ , on supposeroit  $x = y - \frac{p}{y}$ , & l'on trouveroit la transformée  $y^6 \pm qy^3 - \frac{p^3}{y^3} = 0$ .

## R E M A R Q U E.

**C**ETTE dernière transformation sert à réduire toutes les équations du troisième degré qui n'ont point le second terme à une transformée du second degré.

Quand on aura trouvé la valeur de  $y$  dans la transformée, on substituera cette valeur dans l'équation  $x = y \pm \frac{p}{y}$ , & l'on aura la valeur de  $x$ ; c'est-à-dire, l'on connoîtra une des racines de la proposée.

*IX. Pour trouver une transformée dont les racines aient tel rapport qu'on voudra avec celles de la proposée, par exemple, celui de  $f$  à  $g$ .*

**O**N supposera  $f : g :: y : x$ , d'où l'on déduira  $x = \frac{fy}{g}$ ; on substituera cette valeur & ses puissances à la place de  $x$  & de ses puissances dans la proposée  $x^3 - nxx + px - q = 0$ ; & l'on trouvera la transformée  $y^3 - \frac{nfy^2}{g} + \frac{pfy}{g} - \frac{f^3q}{g^3} = 0$ , qui est celle qu'on cherchoit.

*Démonstration du Problème.*

**P**OUR démontrer ce Problème, il ne faut faire attention qu'aux équations simples dont une équation composée est le produit.

Soient  $x - a = 0$ ,  $x - b = 0$ , les équations simples de l'équation composée  $xx - ax + ab = 0$ , qu'on veut transformer.

Il est évident que les équations simples de la transformée, dont les racines seront les racines de la proposée, augmentées de  $f$ , seront  $y - f - a = 0$ ,  $y - f - b = 0$ ; car la première donne  $y = a + f$ ; la seconde donne  $y = b + f$ .

Les équations simples de la transformée, dont les racines seront celles de la proposée, diminuées de  $f$ , seront  $y + f - a = 0$ ,  $y + f - b = 0$ ; car la première donne  $y = a - f$ ; la seconde donne  $y = b - f$ .

Il en est de même des autres transformations.

Il est aussi évident qu'en substituant  $y - f$ , ou bien  $y + f$ , au lieu de  $x$ , dans les équations simples de la proposée  $x - a = 0$ ,  $x - b = 0$ , l'on aura après la substitution, les équations simples de la transformée  $y - f - a = 0$ ,  $y - f - b = 0$ , &c.

Mais il est clair qu'en substituant  $y - f$ , par exemple, à la place de  $x$ ; & le carré de  $y - f$  à la place de  $xx$ , dans l'équation  $xx - ax + ab = 0$ , qui est le produit des sim-

ples  $x - a = 0$ ,  $x - b = 0$ , l'on a le même produit qu'on auroit en multipliant les simples  $y - f - a = 0$ ,  $y - f - b = 0$ , dans lesquelles les simples  $x - a = 0$ ,  $x - b = 0$ , ont été changées par la substitution de  $y - f$ , à la place de  $x$ : Et ce produit est évidemment l'équation transformée. L'on a donc par la méthode du Problème, la transformée qu'on cherche.

*Corollaires, qui suivent des trois premières transformations.*

I.

Il suit de cette démonstration, que s'il y avoit des racines imaginaires dans une équation, elles demeureroient encore imaginaires dans la transformée.

II.

37. Quand il y a des racines positives & négatives dans l'équa-



tion qu'on transforme en une autre, dont les racines sont celles de la proposée, augmentée d'une grandeur connue  $f$ ; en substituant  $y - f$  à la place de  $x$ ; il est évident qu'il n'y a que les racines positives qui soient augmentées dans la transformée, & que les négatives  $y$  sont diminuées de la grandeur  $f$ ; car si les équations simples, dont la proposée est le produit, sont  $x - a = 0$ ,  $x + b = 0$ , en substituant  $y - f$  à la place de  $x$  dans ces équations, l'on aura  $y - f - a = 0$ ,  $y - f + b = 0$ , qui sont les équations simples, dont la transformée est le produit; & il est évident que  $y - f - a = 0$ , donne  $y = a + f$ , dans laquelle la racine positive  $a$  est augmentée de  $f$ ; & que  $y - f + b = 0$ , donne  $y = -b + f$ , dans laquelle la racine négative  $-b$ , est diminuée de la grandeur  $+f$ .

D'où il suit que si la grandeur  $f$  est égale à une des racines négatives, cette racine devient égale à zero; son produit par toutes les autres, qui fait le dernier terme de la transformée, devient par conséquent égal à zero; & la transformée peut s'abaisser d'un degré.

Si la grandeur  $f$  surpasse toutes les racines négatives de la proposée, elles deviennent toutes positives dans la transformée; & alors la transformée ne contenant que des racines positives, tous ces termes ont alternativement les signes  $+$  &  $-$ .

D'où l'on voit que si tous les termes de la transformée ont alternativement  $+$  &  $-$ , on est assuré que la grandeur  $f$  surpasse toutes les racines négatives de la proposée; & quand cette alternative est interrompue, on est assuré que  $f$  ne surpasse pas toutes les racines négatives de la proposée, puisqu'il en reste quelqu'une; & dans ce cas  $f$  est moindre que la plus grande des racines négatives de la proposée.

Dans le cas où  $f$  surpasse toutes les racines négatives de la proposée, & où par conséquent toutes les racines de la transformée sont positives, il est évident que la plus petite des racines de la transformée, répond à la plus grande des négatives de la proposée, qui est devenue positive. Car le surplus de la grandeur  $f$  sur les racines négatives de la proposée, est précisément ce qui fait que ces négatives deviennent positives dans la transformée; & le surplus de  $f$  sur la plus grande des racines négatives de la proposée, est le moindre

de tous ; ainsi la moindre racine de la transformée est celle qui répond à la plus grande des négatives de la proposée.

D'où il est évident que les racines positives de la transformée, moindres que  $f$ , sont celles des racines négatives de la proposée, qui sont devenues positives dans la transformée.

Enfin lorsque  $f$  est moindre que chacune des racines négatives de la proposée, ces racines demeurent négatives dans la transformée.

### III.

38. Lorsqu'il y a des racines positives & négatives dans une équation, & que par la substitution de  $y+f$  à la place de  $x$ , on la transforme en une autre, dont les racines sont celles de la proposée, diminuées chacune de la grandeur  $f$ , il est évident qu'il n'y a que les racines positives qui soient diminuées de la grandeur  $f$ , & que les négatives sont augmentées de la grandeur  $f$ . Car si les équations simples de la proposée sont  $x-a=0$ ,  $x+b=0$  ; en substituant  $y+f$  à la place de  $x$  dans ces équations, l'on aura  $y+f-a=0$ ,  $y+f+b=0$ , qui sont les équations simples dont la transformée est le produit ; & il est évident que  $y+f-a=0$ , donne  $y=a-f$ , dans laquelle la racine positive  $a$  est diminuée de la grandeur  $f$  ; & que  $y+f+b=0$ , donne  $y=-b-f$ , dans laquelle la racine négative est augmentée (dans sa négation) de la grandeur  $-f$ .

D'où il suit que si  $f$  est égale à une des racines positives de la proposée, cette racine devient égale à zero dans la transformée ; & par conséquent le dernier terme de la transformée, qui est le produit de cette racine égale à zero par toutes les autres, devient égal à zero ; & l'équation peut être abaissée d'un degré.

Si  $f$  surpasse toutes les racines positives, elles deviennent toutes négatives dans la transformée, & dans ce cas tous les termes de la transformée ont le signe +.

Ainsi l'on est assuré que  $f$  surpasse toutes les racines positives de la proposée, lorsque tous les termes de la transformée ont + ; mais si quelqu'un a le signe —, il reste dans la transformée quelque racine positive, & l'on est assuré que  $f$  est moindre que la plus grande racine positive de la proposée ; on suppose que toutes les racines sont réelles.

Quand tous les termes de la transformée ont le signe +, c'est-à-dire quand  $f$  surpasse toutes les racines positives de la proposée, la plus petite des racines de la transformée répond à la plus grande des positives de la proposée, qui est devenue négative dans la transformée; car le surplus de  $f$  sur les racines positives de la proposée, est précisément ce qui fait que ces racines positives deviennent négatives dans la transformée, & le surplus de  $f$  sur la plus grande des racines positives de la proposée, est le moindre de tous.

D'où il est évident que les racines négatives de la transformée moindres que  $f$ , sont celles des racines positives de la proposée, qui sont devenues négatives dans la transformée.

Enfin quand  $f$  est moindre que chacune des racines positives de la proposée, ces racines demeureront positives dans la transformée.

## I V.

39. Si on substitue une grandeur connue négative  $-f$  dans une équation  $x^3 - nxx + px - q = 0$ , à la place de l'inconnue  $x$ , la somme des produits qu'on aura après la substitution, qui est  $-f^3 - nff - pf - q$ , est évidemment le dernier terme tout connu de la transformée, qu'on trouveroit en substituant dans la proposée  $y - f$  à la place de l'inconnue  $x$ , dans laquelle transformée les racines positives de la proposée seroient augmentées de la grandeur  $f$ , & les négatives diminuées de la même grandeur  $f$ .

Et si l'on substitue une grandeur connue positive  $+f$  dans une équation  $x^3 - nxx + px - q = 0$ , à la place de l'inconnue  $x$ , la somme des produits qu'on aura après la substitution, qui est  $f^3 - nff + pf - q$ , est évidemment le dernier terme tout connu de la transformée, qu'on trouveroit en substituant dans la proposée  $y + f$  à la place de  $x$ ; dans laquelle transformée les racines positives de la proposée seroient diminuées de la grandeur  $f$ , & les négatives augmentées de la même grandeur  $f$ .

Il n'y a qu'à faire les opérations de la première & de la seconde transformation, pour en voir la démonstration.

## V.

40. Dans la transformée qu'on trouve en substituant une grandeur connue moins une nouvelle inconnue comme  $f - y$ , à la place de l'inconnue  $x$  de la proposée, les racines positives

de la proposée deviennent négatives, mais chacune est diminuée de la grandeur positive  $f$ ; & les racines négatives deviennent positives, mais chacune est augmentée de la grandeur  $f$ .

Car soient, par exemple,  $x - a = 0$ ,  $x + b = 0$ , les équations simples de la proposée; en substituant  $f - y$  dans ces équations, l'on a les équations simples de la transformée  $f - a - y = 0$ ,  $f + b - y = 0$ ; la première donne  $y = -a + f$ , où l'on voit que la racine  $a$ , qui étoit positive dans  $x - a = 0$ , ou bien  $x = a$ , est devenue négative, mais diminuée de la positive  $+f$ : la seconde donne  $y = b + f$ , où la racine  $b$ , qui étoit négative dans  $x + b = 0$ , ou bien  $x = -b$ , est devenue positive, mais augmentée de  $+f$ .

D'où il suit que si la grandeur  $f$  est égale à une des racines positives de la proposée, cette racine devient égale à zero, & par conséquent le dernier terme de la transformée est zero, & l'équation peut s'abaisser d'un degré.

Si la grandeur  $f$  surpasse toutes les racines positives de la proposée, elles deviennent encore toutes positives dans la transformée, puisque l'excès de  $f$  sur chacune de ces racines, est une grandeur positive dans les équations simples de la transformée; dans ce cas toutes les racines de la transformée sont positives, & tous les termes ont alternativement  $+$  &  $-$ .

Si la grandeur  $f$  est moindre que toutes les racines positives de la proposée, elles deviennent négatives dans la transformée.

#### R E M A R Q U E.

**E**N substituant  $f - y = x$ , à la place de  $x$ , dans  $x - a = 0$ ,  $x + b = 0$ , l'inconnue  $y$  est négative dans les équations simples  $f - a - y = 0$ ,  $f + b - y = 0$  de la transformée; ce qui est causé que le premier terme de la transformée est négatif dans les équations des degrez impairs, c'est-à-dire du troisième, cinquième, &c.

Il est facile de rendre l'inconnue  $y$  positive dans les équations simples de la transformée; car puisque  $f - a - y = 0$ , &  $f + b - y = 0$ , par transposition l'on aura  $y + a - f = 0$ ,  $y - b - f = 0$ ; & les valeurs de  $y$  seront les mêmes qu'elles étoient avant la transposition, puisque  $y + a - f = 0$ , donne  $y = -a + f$ , aussi bien que  $f - a - y = 0$ ; &  $y - b - f = 0$ , donne  $y = b + f$ , aussi bien que  $f + b - y = 0$ ;

& par cette transposition, le premier terme de la transformée sera toujours positif dans les équations des degrés impairs. Il suffira dans la pratique, après avoir trouvé la transformée par la substitution de  $f - y$ , au lieu de  $x$ , dans la proposée, de transposer le premier membre de la transformée des degrés impairs dans le second, & zero qui est dans le second, dans le premier; ce qui se fait en changeant les signes de tous les termes.

## SECTION IV.

*Où l'on explique plusieurs usages des transformations qui servent à préparer les équations composées.*

## PROBLÈME II.

41. *ÔTER le second terme d'une équation composée, c'est-à-dire; la transformer en une autre qui n'ait pas de second terme.*

**I**L faut supposer l'inconnue  $x$  de la proposée, égale à une nouvelle inconnue  $y$ , plus ou moins le coefficient du second terme de la proposée, divisé par le nombre qui exprime le degré de l'équation proposée; c'est-à-dire par 2, si elle est du second degré; par 3, si elle est du troisième; plus, si le second terme de la proposée a le signe  $-$ ; & moins, s'il a le signe  $+$ .

Il faut substituer cette valeur de  $x$ , & ses puissances, à la place de  $x$  & de ses puissances, dans la proposée; & l'on aura la transformée, où le second terme manque.

## EXEMPLE I.

**P**OUR ôter le second terme de  $xx - nx + p = 0$ , on supposera  $x = y + \frac{n}{2}$ ; on substituera dans la proposée  $y + \frac{n}{2}$ , & son carré, à la place de  $x$ ,  $xx$ ,

$$\begin{array}{rcl} xx & = & yy + ny + \frac{n^2}{4} \\ - nx & = & - ny - \frac{nn}{2} \\ + p & = & + p. \end{array}$$

& l'on trouvera cette transformée, qui n'a pas de second terme.

$$yy - \frac{n^2}{4} = 0$$

## REMARQUE.

TOUTES les équations du second degré peuvent être résolues par ce Problème; car par transposition, l'on aura  $yy = \frac{nn}{4} - p$ ; & tirant la racine quarrée de chaque membre on aura  $y = \sqrt{\frac{nn}{4} - p}$ ; & substituant cette valeur de  $y$  dans  $x = y + \frac{n}{2}$ , l'on aura  $x = \frac{n}{2} + \sqrt{\frac{nn}{4} - p}$ , qui est une racine de la proposée.

## EXEMPLE II.

POUR ôter le second terme de  $x^3 + nxx - px - q = 0$ , on supposera  $x = y - \frac{n}{3}$ ; on substituera dans la proposée  $y - \frac{n}{3}$ , & ses puissances à la place de  $x$  & de ses puissances,

$$\begin{array}{rcl} x^3 & = & y^3 - nyy + \frac{nn^2}{3} - \frac{n^3}{27} \\ + nxx & = & + nyy - \frac{2nn^2}{3} + \frac{n^3}{9} \\ - px & = & - py + \frac{pn^2}{3} \\ - q & = & - q. \end{array}$$

& l'on trouvera cette transformée, qui n'a pas de second terme.

$$y^3 - \frac{nn^2}{3} + \frac{n^3}{27} - py + \frac{pn^2}{3} - q = 0,$$

Si l'on trouve la valeur de  $y$  dans la transformée, en la substituant dans  $x = y - \frac{n}{3}$ , l'on aura la valeur de  $x$ ; c'est-à-dire, l'on aura une racine de la proposée.

La démonstration de ce Problème est évidente, si l'on fait attention dans le dernier exemple, que le second terme de la troisième puissance de  $y - \frac{n}{3}$ , est  $-nny$ ; que  $+nxx$  donne, après la substitution,  $+nny$ , &c. que ces deux grandeurs font seules le second terme de la transformée, & qu'elles se détruisent toujours par des signes contraires, parceque l'on suppose toujours  $x = y - \frac{n}{3}$ , quand il y a dans la proposée  $+nxx$ ; &  $x = y + \frac{n}{3}$ , quand il y a dans la proposée  $-nxx$ .

Il est facile d'appliquer ce raisonnement aux équations de tous les degrez.

Si on veut le voir sur un exemple general, on se servira de  $x^m + nx^{m-1}$ , pour représenter les deux premiers termes des équations de tous les degrez: Il suffit de considerer les deux premiers termes dans ce Problème:  $m$  sera égal à 2. dans

dans les équations du second degré ;  $m$  sera égal à 3 dans celles du troisième degré, &c. En supposant  $x = y + \frac{a}{m}$ , les deux premiers termes de  $y + \frac{a}{m}$ , élevée à la puissance  $m$ , seront  $y^m + my^{m-1}$  ;  $\pm nx^{m-1}$ , sera égal à  $\pm ny^{m-1}$ , &c. Il est évident que  $\mp ny^{m-1} \pm ny^{m-1}$ , qui sont les seules grandeurs qui font le second terme de la transformée, se détruisent par des signes contraires.

## REMARQUE.

ON peut aussi ôter le second terme d'une équation, en supposant, pour les équations du second degré,  $x = \frac{a}{2} - y$ , quand le second terme de la proposée a —, & en supposant  $x = -\frac{a}{2} - y$ , quand le second terme a + ; en supposant pour le troisième degré  $x = \frac{a}{3} - y$ , quand le second terme de la proposée a —, &  $x = -\frac{a}{3} - y$ , quand il a +, &c. & faisant ensuite la substitution.

On peut encore ôter le second terme d'une équation, en supposant, pour le second degré,  $x = \frac{a}{2} - \frac{a}{2}$ , quand le second terme de la proposée a +, en supposant  $x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$ , quand il a —, en supposant pour le troisième degré  $x = \frac{a}{3} - \frac{a}{3}$ , quand le second terme de la proposée a +, &  $x = \frac{a}{3} + \frac{a}{3}$ , quand il a —, &c. & faisant ensuite la substitution.

Quand on aura trouvé la valeur de  $y$  dans la transformée, en la substituant dans l'équation simple supposée  $x = \frac{a}{2} - y$ , &c. ou  $x = \frac{a}{3} - \frac{a}{3}$ , &c. on aura la valeur de  $x$ .

Si le premier terme de l'équation avoit un coefficient différent de l'unité, comme dans l'équation  $ax^3 - nxx + px - q = 0$ , on pourroit en faire évanouir le second terme, en supposant  $x = \frac{y}{a} + \frac{a}{3a}$ , car on auroit

$$\begin{array}{rcl} ax^3 & = & \frac{y^3}{a^3} + \frac{n}{a^2} yy + \frac{na}{3a^2} y + \frac{n^3}{27a^3} \\ -nxx & = & -\frac{n}{a^2} yy - \frac{2na}{3a^2} y - \frac{n^3}{9a^2} \\ +px & = & + \frac{p}{a} y + \frac{pa}{3a} \\ -q & = & -q \end{array}$$

---


$$\frac{y^3}{a^3} * - \frac{na}{3a^2} y - \frac{2na}{27a^2} = 0.$$

$$+ \frac{p}{a} y + \frac{pa}{3a}$$

$$- q$$

Cette transformée n'a pas de second terme, multipliant toutes les grandeurs par  $aa$ , on auroit

$$y^3 - \frac{1}{3} nny - \frac{2n^3}{27} = 0.$$

$$+ apy + \frac{a}{3} np$$

$$- aaq$$

dans laquelle le premier terme n'a pas d'autre coefficient que l'unité.

Si l'équation étoit du second degré comme  $axx - nx + p = 0$ , il faudroit supposer  $x = \frac{p}{a} + \frac{z}{a}$ .

Si elle étoit du quatrième, comme  $ax^4 - nx^3 + \&c.$  il faudroit supposer  $x = \frac{p}{a} + \frac{z}{a}$ ; & ainsi des autres.

### PROBLÈME III.

*TROUVER par Analyse quelle doit être la grandeur propre à ôter le second terme d'une équation, par exemple de  $x^3 + nxx + px - q = 0$ .*

Je suppose que cette grandeur inconnue est  $z$ , ainsi je suppose  $x = y - z$ , lorsque le second terme de la proposée a +, &  $x = y + z$ , lorsqu'il a —: Je substitue  $y - z$  & ses puissances, à la place de  $x$  & de ses puissances

$$\begin{array}{rcl} x^3 & = & y^3 - 3zyy + 3zzy - z^3 \\ + nxx & = & + nyy - 2nzy + nzx \\ + px & = & + py - pz \\ - q & = & - q. \end{array}$$

$$y^3 - 3zyy + 3zzy - z^3 = 0.$$

& je trouve cette transformée.

$$\begin{array}{rcl} + nyy - 2nzy + nzx \\ + py - pz \\ - q \end{array}$$

Je suppose son second terme  $- 3zyy + nyy = 0$ , ce qui me donne  $n = 3z$ , &  $\frac{n}{3} = z$ ; cela me fait voir que  $\frac{n}{3}$  est la grandeur, qui étant substituée dans  $x = y - z$ , à la place de  $z$ , me donnera  $x = y - \frac{n}{3}$ ; qui est propre à faire évanouir le second terme, en substituant  $y - \frac{n}{3}$  & ses puissances dans la proposée à la place de  $x$  & de ses puissances.

Pour résoudre le Problème d'une manière générale, on supposera que  $x^m + nx^{m-1}$ , représentent les deux premiers termes de toutes les équations,  $m = 2$  dans le second degré,  $m = 3$  dans le troisième, &c. On supposera  $x = y + z$ , &c



l'on aura les deux premiers termes de  $x = y \mp z$ , élevez à la puissance  $m$ ,  $x^m = y^m \mp mzy^{m-1}$ , &c.

L'on aura aussi  $\pm nx^{m-1} = \pm ny^{m-1}$ , &c.

L'on supposera le second terme de la transformée  $\mp mzy^{m-1} \pm ny^{m-1} = 0$ , & l'on aura  $\pm z = \pm \frac{n}{m}$ ; ce qui fait voir que pour ôter le second terme, il faut supposer  $x = y \mp \frac{n}{m}$ , & faire ensuite la substitution.

## COROLLAIRE I.

42. SI l'on vouloit faire évanouir le troisième terme de la proposée  $x^3 + nxx + px - q = 0$ , & non pas le second, on se serviroit de la même méthode, & l'on supposeroit le troisième terme de la transformée  $3xzy - 2nzy + py = 0$ ; ce qui donneroit l'équation du second degré  $zz - \frac{2}{3}nz + \frac{1}{3}p = 0$ , laquelle étant résolue, donneroit la valeur de  $z - \frac{1}{3}n \pm \sqrt{\frac{1}{9}nn - \frac{1}{3}p}$ . Substituant cette valeur de  $z$  dans  $x = y - z$ , l'on auroit  $x = y - \frac{1}{3}n - \sqrt{\frac{1}{9}nn - \frac{1}{3}p}$ . Substituant cette valeur de  $x$  & ses puissances dans la proposée, à la place de  $x$  & de ses puissances, on auroit une transformée, qui n'auroit pas de troisième terme.

## REMARQUE.

43. CETTE méthode ne peut pas servir à faire évanouir le quatrième terme, ni les autres suivans, parceque l'équation qu'elle donneroit pour faire trouver la valeur de  $z$  propre à faire évanouir le quatrième terme, seroit du troisième degré; celle qu'elle donneroit pour faire trouver la valeur de  $z$  propre à faire évanouir le cinquième terme, seroit du quatrième degré, & ainsi de suite: Et l'on n'enseignera que dans la suite la manière de résoudre ces équations.

## COROLLAIRE II.

LA même méthode peut encore servir à faire en sorte que le coefficient du second terme, ou celui du troisième terme de la proposée, soit une grandeur donnée  $a$ , en supposant le coefficient du second terme de la transformée, qui est  $-3z + n = a$ , ou bien celui du troisième terme, qui est  $3xz - 2nz + p = a$ .

Il faut ensuite trouver la valeur de  $z$  dans l'une ou l'autre de ces deux équations, & substituer cette valeur de  $z$  prise

dans la première, si l'on veut que  $a$  soit le coefficient du second terme; & prise dans la seconde, si l'on veut que  $a$  soit le coefficient du troisième terme: il faut, dis-je, substituer cette valeur de  $x$  dans l'équation  $x = y - a$ , & ensuite substituer cette valeur de  $x$  dans la proposée; & l'on aura une transformée qui aura la grandeur  $a$  pour coefficient de son second, ou bien de son troisième terme.

### PROBLÈME IV.

44. *LORSQUE tous les termes moyens, ou seulement quelques-uns manquent dans une équation, comme dans  $x^3 - q = 0$ , ou  $x^3 - nxx - q = 0$ , la transformer en une autre, où il ne manque aucun terme, & qui soit même, si l'on veut, plus élevée d'un degré.*

IL faut supposer  $x = y$  — ou  $+ a$ ; la lettre  $a$  marque une grandeur connue telle qu'on voudra. Il faut substituer  $y$  — ou  $+ a$ , à la place de  $x$  dans la proposée, & l'on aura une transformée qui aura tous ses termes.

Si l'on veut que la transformée soit plus élevée d'un degré que la proposée, on multipliera la proposée par  $x$ , & l'on substituera dans  $x^3 - qx = 0$ ,  $y$  — ou  $+ a$ , à la place de  $x$ ; & la quatrième puissance de  $y$  — ou  $+ a$ , à la place de  $x^3$ ; & l'on aura la transformée qu'on demande.

### PROBLÈME V.

45. *QUAND une équation composée contient des racines négatives, ou seules, ou mêlées avec des positives, la transformer en une autre qui n'ait que des racines positives; c'est-à-dire, quand tous les termes d'une équation composée n'ont pas alternativement  $+$  &  $-$ , la transformer en une autre, dont tous les termes aient alternativement  $+$  &  $-$ .*

#### PREMIER CAS.

- SI tous les termes de la proposée ont  $+$ , en changeant tous les signes des termes pairs, c'est-à-dire du second, quatrième, sixième, &c. sans toucher aux autres, tous les termes auront alternativement  $+$  &  $-$ , & toutes les racines qui étoient négatives seront changées en positives. \* Ce cas n'a aucune difficulté.

## SECOND CAS.

**S'**IL y a des racines positives & négatives dans la proposée ; on prendra le plus grand coefficient négatif, & après l'avoir rendu positif, on lui ajoutera l'unité, & l'on supposera ce coefficient plus l'unité, considéré comme une seule grandeur, moins une nouvelle inconnue  $y$ , égal à l'inconnue  $x$  de la proposée.

On substituera dans la proposée cette valeur de  $x$ , & ses puissances, à la place de  $x$  & de ses puissances ; & l'on trouvera une transformée, dont tous les termes auront alternativement  $+$  &  $-$ .

## EXEMPLE I.

**P**OUR trouver la transformée de  $xx - 2x - 3 = 0$ , qui ait les signes alternatifs  $+$  &  $-$ , on prendra le plus grand coefficient négatif  $-3$  de la proposée, & après l'avoir rendu positif, on lui ajoutera l'unité, & l'on aura  $+4$  ; on supposera  $4 - y = x$  ; on substituera  $4 - y$ , & le quarré de  $4 - y$  dans la proposée, à la place de  $x$ , & de  $xx$  ; & l'on aura la transformée  $0 = 5 - 6y + yy$ , dans laquelle les signes  $+$  &  $-$  sont alternatifs.

## EXEMPLE II.

**S**OIT la proposée  $x^3 - 2xx + 3x + 6 = 0$  ; pour la transformer en une autre, dont tous les termes ayent alternativement  $+$  &  $-$ , on prendra le plus grand coefficient négatif  $-2$ , qu'on rendra positif ; on lui ajoutera l'unité, & l'on aura  $+3$ . On supposera  $3 - y = x$ , & on substituera  $3 - y$  dans la proposée, à la place de  $x$ ,

$$\begin{array}{rcl} x^3 & = & + 27 - 27y + 9yy - y^3 \\ - 2xx & = & - 18 + 12y - 2yy \\ + 3x & = & + 9 - 3y \\ + 6 & = & + 6 \end{array}$$

& l'on trouvera la transformée,  $0 = + 24 - 18y + 7yy - y^3$ .

& par transposition l'on aura  $y^3 - 7yy + 18y - 24 = 0$ , où tous les termes ont alternativement  $+$  &  $-$ . Quand on aura la valeur de  $y$ , en la substituant dans  $3 - y = x$ , on aura celle de  $x$ .

*Préparation pour la démonstration.*

POUR rendre la démonstration plus facile, on prendra un exemple seulement du troisième degré, & l'on pourra appliquer à tous les degrés ce que l'on dira du troisième.

On le prendra Algebrique, c'est-à-dire littéral, pour rendre la démonstration générale. Enfin on supposera tous les coefficients négatifs, la démonstration de ce cas contenant celle de tous les autres; & l'on supposera premièrement que le coefficient du second terme est le plus grand, ensuite que c'est le coefficient du troisième, & ainsi de suite, afin qu'on puisse voir tous les cas dans un seul exemple.

Soit l'équation  $x^3 - nxx - px - q = 0$ , qu'il faut transformer en une autre, dont tous les termes aient alternativement + & —.

1°. Soit  $-n$  le plus grand coefficient négatif; l'ayant rendu positif, & augmenté de l'unité, l'on aura  $n+1$ . On regarde  $n+1$  comme une seule grandeur, & c'est ce qu'on marque par la ligne qui est sur  $n+1$ . Il faut supposer  $n+1 - y = x$ , & par la substitution, on trouvera la transformée suivante,

$$\begin{aligned} x^3 &= \overline{n+1}^3 - 3 \times \overline{n+1}^2 y + 3 \times \overline{n+1} yy - y^3 \\ -nxx &= -n \times \overline{n+1}^2 + 2n \times \overline{n+1} y - n \times yy \\ -px &= -p \times \overline{n+1} + p \times y \\ -q &= -q \end{aligned}$$

2°. Soit  $-p$  le plus grand coefficient négatif; ainsi il faut supposer  $p+1 - y = x$ , & par la substitution on trouvera la transformée suivante,

$$\begin{aligned} x^3 &= \overline{p+1}^3 - 3 \times \overline{p+1}^2 y + 3 \times \overline{p+1} yy - y^3 \\ -nxx &= -n \times \overline{p+1}^2 + 2n \times \overline{p+1} y - n \times yy \\ -px &= -p \times \overline{p+1} + p \times y \\ -q &= -q \end{aligned}$$

3°. Soit  $-q$  le plus grand coefficient négatif, il faut supposer  $q+1 - y = x$ , & par la substitution on trouvera la transformée suivante,

$$\begin{aligned} x^3 &= \overline{q+1}^3 - 3 \times \overline{q+1}^2 y + 3 \times \overline{q+1} yy - y^3 \\ -nxx &= -n \times \overline{q+1}^2 + 2n \times \overline{q+1} y - n \times yy \\ -px &= -p \times \overline{q+1} + p \times y \\ -q &= -q \end{aligned}$$

Il faut démontrer que dans les trois suppositions précédentes, les termes de la transformée ont alternativement  $+$  &  $-$ ; il suffira de le démontrer dans la seule première supposition, ou  $-n$  est supposé le plus grand coefficient négatif, la même démonstration pouvant aisément être appliquée aux deux autres.

*Démonstration du cinquième Problème.*

IL est évident que tous les termes de la plus haute puissance de  $\overline{n+1} - y$ , ont alternativement  $+$  &  $-$ . C'est la même chose des autres puissances de  $\overline{n+1} - y$ ; mais il suffit de faire attention aux termes de la plus haute puissance.

Il est de même évident que chaque terme de la plus haute puissance de  $\overline{n+1} - y$ , fait une partie du terme correspondant de la transformée; c'est-à-dire le terme tout connu de la plus haute puissance de  $\overline{n+1} - y$ , fait une partie du terme tout connu de la transformée, le terme de la plus haute puissance de  $\overline{n+1} - y$ , qui contient  $y$  linéaire, fait une partie du terme de la transformée, où  $y$  est linéaire, & ainsi des autres. Or chaque terme de la plus haute puissance de  $\overline{n+1} - y$ , est lui seul plus grand que les autres grandeurs du même terme de la transformée, qui pourroient avoir des signes contraires à son signe, comme on le va démontrer. Par conséquent chaque terme de la transformée a le même signe que le terme de la plus haute puissance de  $\overline{n+1} - y$ , qui se trouve dans ce même terme de la transformée.

Car, 1°. dans le terme tout connu de la transformée,  $\overline{n+1}$  surpasse les autres grandeurs qui ont un signe contraire dans le même terme; ce qu'on verra clairement en remarquant que  $\overline{n+1} = \overline{n+1} \times \overline{n+1}$ , d'où ôtant  $-n \times \overline{n+1}$ , il est évident que le reste ne sçauroit être moindre que  $+\overline{n+1} = \overline{n+1} \times \overline{n+1}$ ; d'où ôtant  $-p \times \overline{n+1}$ , le reste ne sçauroit être moindre que  $+\overline{n+1}$ , puisque  $p$  est supposé moindre que  $n$ ; ôtant de ce reste positif la grandeur  $-q$ , qui est moindre que  $n$ , il est évident qu'il y aura un reste positif.

2°. Dans le terme suivant, on verra de même que  $-3 \times \overline{n+1} y$ , surpasse les autres grandeurs  $+2n \times \overline{n+1} y + p \times y$ , qui ont des signes contraires, en concevant  $-3 \times \overline{n+1} y = -3 \times \overline{n+1} \times \overline{n+1} y$ ; car en ôtant  $+2n \times \overline{n+1} y$  de  $-3$ ,

$\times \overline{n+1} \times \overline{n+1} y$ , il est clair que le reste ne sauroit être moindre que  $-\overline{n+1} y$ , d'où ôtant  $+p \times y$ , il doit rester une grandeur négative,  $p$  étant supposé moindre que  $n$ .

3°. Il est évident que dans le terme suivant,  $+3 \times \overline{n+1} yy$  surpasse  $-\overline{n} \times yy$ ; Donc chaque terme de la plus haute puissance de  $\overline{n+1} - y$ , surpasse les autres grandeurs du même terme de la transformée, qui ont des signes contraires; ainsi les termes de la transformée ont les mêmes signes qu'ont les termes de la plus haute puissance de  $\overline{n+1} - y$ ; par conséquent tous les termes de la plus haute puissance de  $\overline{n+1} - y$ , ayant alternativement  $+$  &  $-$ , tous les termes de la transformée ont les mêmes signes alternatifs  $+$  &  $-$ . Ce qu'il falloit démontrer.

Il est évident que ce sera la même démonstration, si  $-p$  est le plus grand coefficient négatif, ou si c'est  $-q$ ; & qu'elle peut de plus s'appliquer aux équations de tous les degrés.

## C O R O L L A I R E S.

## I.

IL est clair que tous les termes de chaque puissance de  $\overline{n+1} - y$ , ayant alternativement  $+$  &  $-$ , les coefficients positifs qui les multiplient, ne changent point cette alternative dans les termes de la transformée, il n'y a que les négatifs; ainsi les ayant supposez tous négatifs, la démonstration convient à tous les cas.

## I I.

46. Dans la supposition de  $\overline{n+1} - y = x$ , la substitution de  $\overline{n+1} - y$ , à la place de  $x$  dans la proposée, change toutes les racines de la proposée; \* les négatives deviennent positives dans la transformée, & elles sont même augmentées chacune de la grandeur  $\overline{n+1}$ ; les positives de la proposée deviennent négatives dans la transformée, mais elles sont diminuées de la grandeur positive  $\overline{n+1}$ , & elles en sont tellement diminuées, qu'il y a du surplus positif sur chacune, qui les rend encore positives dans la transformée; puisque toutes les racines en sont positives, tous les termes ayant alternativement  $+$  &  $-$ .

## I I I.

47. D'où il suit, que puisqu'il y a du surplus du plus grand coefficient

coefficient négatif augmenté de l'unité sur chaque racine positive de la proposée, il faut que le plus grand coefficient négatif de la proposée, rendu positif & augmenté de l'unité, surpasse toutes les racines positives de la proposée.

## I V.

48. Si on vouloit trouver une grandeur qui surpassât aussi toutes les racines négatives de la proposée, il n'y auroit qu'à changer les signes de tous les termes pairs, du second, du quatrième, &c. & alors toutes les racines négatives étant devenues positives par ce changement, le plus grand coefficient négatif de l'équation ainsi changée, étant rendu positif, & augmenté de l'unité, surpasseroit toutes les racines positives de l'équation changée, c'est-à-dire toutes les racines négatives de la proposée.

## V.

Si le premier terme d'une équation avoit un coefficient différent de l'unité, comme  $2x^3 - 2xx + 3x + 6 = 0$ , il faudroit diviser le plus grand coefficient négatif  $-2$ , rendu positif  $+2$ , par le coefficient du premier terme qui est  $2$ , & ajouter l'unité au quotient  $1$ , ce qui fait  $2$ , & supposer  $2 - y = x$ . Il faudroit ensuite substituer  $2 - y$ , & les puissances de  $2 - y$ , à la place de  $x$  & des puissances de  $x$ , dans la proposée, & l'on auroit la transformée  $2y^3 - 10yy + 19y - 20 = 0$ , dont les termes ont alternativement  $+$  &  $-$ .

La démonstration est la même que la précédente; car supposant que la proposée est  $ax^3 - nxx - px - q = 0$ , & que  $n$ , par exemple, est le plus grand coefficient négatif, il faut supposer  $\frac{n}{a} + 1 - y = x$ , ou, ce qui est la même chose,  $\frac{n+a}{a} - y = x$ ; & substituant  $\frac{n+a}{a} - y$  à la place de  $x$  dans la proposée, on trouvera la transformée suivante,

$$\begin{aligned} ax^3 &= + \frac{n+a}{a}^3 - 3 \times \frac{n+a}{a}^2 y + 3 \times \frac{n+a}{a} \times yy - ay^3 \\ -nxx &= - \frac{n}{a} \times \frac{n+a}{a}^2 + \frac{2n}{a} \times \frac{n+a}{a} y - nyy \\ -px &= - \frac{p}{a} \times \frac{n+a}{a} + py \\ -q &= -q \end{aligned}$$

& l'on démontrera, comme l'on a fait ci-dessus, que les termes de cette transformée ont alternativement  $+$  &  $-$ .

## PROBLÈME VI.

49. *TRANSFORMER une équation en une autre qui ait ces deux conditions ; 1°. Que le coefficient du troisième terme surpasse le carré de la moitié du coefficient du second terme. 2°. Que tous les termes aient alternativement + & —.*

**M.** DESCARTES se sert de ce Problème pour préparer une équation du sixième degré à être construite par la Geometrie.

Soit l'équation proposée  $x^6 - nx^5 - px^4 - qx^3 - rxx - sx - t = 0$ .

Pour trouver par Analyse la grandeur propre à former la transformée qu'on cherche, soit cette grandeur égale à l'indéterminée  $z$ .

Il faut supposer  $z - y = x$ , & substituer dans la proposée,  $z - y$  & ses puissances à la place de  $x$  & de ses puissances, & l'on trouvera la transformée suivante,

$$\begin{aligned} z^6 &= x^6 - 6z^5y + 15z^4y^2 - 10z^3y^3 + 15z^2y^4 - 6zy^5 + y^6 \\ -nx^5 &= -nz^5 + 5nz^4y - 10nz^3y^2 + 10nz^2y^3 - 5nzy^4 + ny^5 \\ -px^4 &= -pz^4 + 4pz^3y - 6pz^2y^2 + 4pzy^3 - py^4 \\ -qx^3 &= -qz^3 + 3qz^2y - 3qzy^2 + qy^3 \\ -rxx &= -rzx + 2rzy - ry^2 \\ -sx &= -sz + sy \\ -t &= -t \end{aligned}$$

Il faut prendre la moitié du coefficient du second terme de cette transformée ; cette moitié est  $-3z + \frac{1}{2}n$  ; & ôter le carré de cette moitié, qui est  $9zx - 3nz + \frac{1}{4}nn$  du coefficient du troisième terme, qui est  $+15zx - 5nz - p$  ; & l'on aura le reste  $+6zx - 2nz - \frac{1}{4}nn - p$  : afin que ce reste soit positif, il faut que  $+6zx$  surpasse  $-2nz - \frac{1}{4}nn - p$ .

Pour trouver la valeur de  $z$  qui soit telle que  $+6zx$  surpasse  $-2nz - \frac{1}{4}nn - p$ , il faut auparavant trouver une valeur de  $z$  qui soit telle, que  $+6zx$  soit égale à  $2nz + \frac{1}{4}nn + p$ , en feignant cette équation  $+6zx = 2nz + \frac{1}{4}nn + p$ , qui donne  $6zx - 2nz = \frac{1}{4}nn + p$ . Divisant chaque membre par 6, l'on aura  $zx - \frac{1}{3}nz = \frac{1}{24}nn + \frac{1}{6}p$ . Ajoutant à chaque membre  $\frac{1}{36}nn$ , qui est le carré de la moitié du coefficient,  $\frac{1}{3}n$  du second terme, l'on aura  $zx - \frac{1}{3}nz + \frac{1}{36}nn = \frac{1}{24}nn + \frac{1}{6}p$ , dont le 1<sup>er</sup> membre est un carré qui a pour sa racine  $z - \frac{1}{6}n$  ; ainsi tirant la racine carrée de chaque membre,



on aura  $x - \frac{1}{6}n = \sqrt{\frac{1}{72}nn + \frac{1}{6}p}$ , & par transposition  $x = \frac{1}{6}n + \sqrt{\frac{1}{72}nn + \frac{1}{6}p}$ ; ce qui fait voir qu'en supposant  $x = \frac{1}{6}n + \sqrt{\frac{1}{72}nn + \frac{1}{6}p}$ , l'on auroit  $6xx = 2nx + \frac{1}{4}nn + p$ .

Ainsi en prenant  $x$  plus grande que  $\frac{1}{6}n + \sqrt{\frac{1}{72}nn + \frac{1}{6}p}$ , le reste du coefficient du troisième terme de la transformée, après en avoir ôté le carré de la moitié du coefficient du second terme, sera positif; lequel reste est marqué dans la transformée par  $+6xx - 2nx - \frac{1}{4}nn - p$ . L'on a donc déjà accompli une des conditions du Problème.

Pour accomplir l'autre, il faut, si la valeur de  $x$  qu'on vient de trouver, ne surpasse pas le plus grand coefficient négatif de la proposée au moins d'une unité, augmenter cette valeur jusqu'à ce que cela arrive: ce qui est possible.

Ensuite après avoir mis dans  $x - y = x$ , la valeur de  $x$  plus grande 1<sup>o</sup>. que  $\frac{1}{6}n + \sqrt{\frac{1}{72}nn + \frac{1}{6}p}$ ; 2<sup>o</sup>. plus grande au moins d'une unité que le plus grand coefficient négatif de la proposée, il faut substituer cette valeur moins  $y$ , à la place de  $x$  dans la proposée; & l'on trouvera une transformée, dont, 1<sup>o</sup>. le coefficient du troisième terme surpassera le carré de la moitié du coefficient du second terme; 2<sup>o</sup>. dont les termes auront alternativement  $+$  &  $-$ . Ce qui étoit proposé.

Quand on aura trouvé la valeur de  $y$  dans la transformée, en la substituant dans  $x - y = x$ , comme aussi la valeur de  $x$ , on aura la valeur de l'inconnue  $x$ ; c'est-à-dire on aura une racine de la proposée.

## P R O B L È M E V I I.

50. *LORSQUE le premier terme d'une équation composée a un coefficient différent de l'unité, la transformer en une autre dont le premier terme n'ait que l'unité pour coefficient.*

**P**A R exemple, transformer l'équation  $ax^3 - nxx + px - q = 0$ , dont le premier terme a le coefficient  $a$ , en une autre dont le premier terme n'ait que l'unité pour coefficient.

1<sup>o</sup>. Il faut supposer l'inconnue  $x$  de la proposée, égale à une autre inconnue  $y$ , divisée par le coefficient  $a$  du premier terme de la proposée; & l'on aura  $x = \frac{y}{a}$ . 2<sup>o</sup>. Il faut substituer  $\frac{y}{a}$  & ses puissances, dans la proposée, à la place de  $x$

& de ses puissances; & l'on aura la transformée  $\frac{y^3}{a} - \frac{nyy}{a} + \frac{pxy}{a} - \frac{qx}{a} = 0$ . 3°. Il faut ôter les fractions de cette transformée, & diviser tous les termes par  $a$ ; & l'on aura la transformée  $y^3 - nyy + apy - aaq = 0$ , dont le premier terme n'a pas d'autre coefficient que l'unité, & qui est la transformée qu'on cherche.

Si l'on trouve la valeur de  $y$  dans la transformée, en la substituant dans  $x = \frac{y}{a}$ , on aura la valeur de l'inconnue  $x$  de la proposée.

*Abregé.*

IL suffit, dans la pratique, de changer l'inconnue  $x$  de la proposée en une autre  $y$ , d'ôter le coefficient  $a$  du premier terme, & de multiplier le troisième terme par le coefficient  $a$ ; le quatrième par le carré  $aa$  de ce coefficient; le cinquième terme par le cube  $a^3$  de ce coefficient; & ainsi de suite.

## PROBLÈME VIII.

51. FAIRE en sorte que le coefficient de quel terme on voudra d'une équation, & même, si l'on veut, le dernier terme, devienne une grandeur connue; c'est-à-dire, transformer l'équation en une autre où cela se trouve.

POUR le chercher par Analyse, soit la grandeur connue  $a$ , soit l'indéterminée  $z$ , qui représente la quantité propre à faire en sorte que le coefficient de quel terme on voudra d'une équation, devienne égal à  $a$ ; & soit l'équation proposée  $x^3 - nxx + px - q = 0$ .

On supposera  $x = \frac{z}{a}$ ; on substituera  $\frac{z}{a}$  à la place de  $x$ , dans la proposée; & l'on aura la transformée  $y^3 - nzyy + pzy - qz^3 = 0$ .

Si c'est le coefficient du second terme qu'on veuille rendre égal à  $a$ , on supposera  $nz = a$ ; ce qui donnera  $z = \frac{a}{n}$ .

Si c'est le coefficient du troisième terme qu'on veuille rendre égal à  $a$ , on supposera  $pz = a$ ; ce qui donnera  $z = \sqrt{\frac{a}{p}}$ .

Si c'est le dernier terme, on supposera  $qz^3 = a$ ; ce qui donnera  $z = \sqrt[3]{\frac{a}{q}}$ .

On changera l'inconnue  $x$  de la proposée en  $y$ , & on multipliera le second terme de la proposée par la valeur de  $z$ ; le troisième par le carré de cette valeur, le quatrième par

le cube de cette valeur, &c. & l'on aura la transformée qu'on cherche. Ou bien on substituera la valeur de  $x$  dans  $x = \frac{z}{4}$ , & la substitution de cette valeur de  $x$  dans la proposée; à la place de  $x$ , donnera la transformée qu'on cherche. Ou bien enfin on substituera la valeur de  $x$  dans la transformée indéterminée  $y' - nzyy + pzzy - qz^3 = 0$ , & l'on aura la transformée qu'on demande.

Quand on connoîtra la valeur de  $y$  dans la transformée, en la substituant dans  $x = \frac{z}{4}$ , comme aussi la valeur de  $z$ , l'on aura la valeur de  $x$ .

## P R O B L È M E I X.

52. FAIRE en sorte dans les équations numériques, que les coefficients des termes soient divisibles par tel nombre qu'on voudra; ce qui est quelquefois commode pour faciliter le calcul des racines.

IL faut multiplier par la méthode de la quatrième transformation, chaque racine de l'équation proposée, par le nombre, ou par le produit des nombres par lesquels on veut que les coefficients de l'équation se puissent diviser; & on trouvera la transformée qu'on cherche.

Par exemple, si l'on propose de faire en sorte que le coefficient du troisième terme de  $x^3 - 14x - 55 = 0$ , devienne divisible par 2, & le dernier terme par 3, on multipliera chaque racine de la proposée par 6, produit de 2 par 3; c'est-à-dire, après avoir changé  $x$  en  $y$ , on multipliera le troisième terme par 36, carré de 6; le quatrième par 216, cube de 6; & l'on aura la transformée  $y^3 - 504y - 11880 = 0$ , qui a les conditions qu'on demande.

## P R O B L È M E X.

53. ÔTER toutes les fractions d'une équation, dont le premier terme n'a pas d'autre coefficient que l'unité, de manière que le premier terme de la transformée n'ait pas aussi d'autre coefficient que l'unité.

IL faut multiplier toutes les racines de la proposée par le dénominateur de la fraction, s'il n'y en a qu'une, ou par le produit de tous les dénominateurs des fractions, s'il y en a plusieurs; & l'on aura la transformée qu'on demande.

Par exemple, pour ôter les fractions de  $x^3 - \frac{2}{a}xx + \frac{2}{b}x - \frac{2}{c} = 0$ , on prendra le produit  $abc$  de tous les dénominateurs des fractions, & on supposera  $x = \frac{z}{abc}$ ; on substituera  $\frac{z}{abc}$  dans la proposée, à la place de  $x$ ; & après avoir ôté les fractions, on trouvera la transformée  $y^3 - bcnyy + aabccpy - a^3b^3ccq = 0$ , qui n'a point de fractions, & dont le premier terme n'a pas d'autre coefficient que l'unité.

Quand on connoîtra la valeur de  $y$ , en la substituant dans  $x = \frac{z}{abc}$ , à la place de  $y$ , on aura la valeur de  $x$ .

## P. R O B L È M E X I.

54. *LORSQU'IL y a des incommensurables dans les coefficients des termes d'une équation, comme dans  $x^3 - xx\sqrt{n} + px - q\sqrt{n} = 0$ , les ôter dans plusieurs cas.*

IL faut multiplier les racines de la proposée par la grandeur incommensurable  $\sqrt{n}$ , en supposant  $x = \sqrt[3]{n}$ ; & substituant ensuite dans la proposée  $\sqrt[3]{n}$ , à la place de  $x$ , on trouvera la transformée  $y^3 - nyy + npy - mnq = 0$ , qui n'a plus d'incommensurables.

De même pour ôter les incommensurables de  $x^3 - x^3\sqrt[3]{n} + pxx\sqrt[3]{n} - qx + \frac{r}{\sqrt[3]{n}} = 0$ , il faut multiplier les racines par  $\sqrt[3]{n}$ , en supposant  $x = \sqrt[3]{n}$ ; & substituant  $\sqrt[3]{n}$  dans la proposée, à la place de  $x$ , on trouvera la transformée  $y^3 - ny^3 + npyy - nqy + nr = 0$ , qui n'a plus d'incommensurables.

Quand on connoîtra la valeur de  $y$  dans la transformée, on trouvera la valeur de  $x$ , en substituant la valeur de  $y$  dans  $x = \sqrt[3]{n}$ , dans le premier exemple; & dans  $x = \sqrt[3]{n}$  dans le second exemple.

*Remarque où l'on distingue les cas dans lesquels on peut ôter les incommensurables par cette méthode.*

- \* 36. *ON a vu\* que pour multiplier les racines d'une équation par une grandeur donnée, qu'on suppose dans ce Problème être une incommensurable, il faisoit multiplier le second terme par l'incommensurable donnée; le troisième par son carré; le quatrième par sa troisième puissance & ainsi de suite.*

\* 36. Trans-  
formation.

D'où il suit que pour ôter l'incommensurable  $\sqrt{n}$  de l'équation, il faut que  $\sqrt{n}$  se trouve au second, quatrième, sixième terme de la proposée, & que  $\sqrt{n}$  ne se trouve point dans les autres termes.

Pour ôter l'incommensurable  $\sqrt[3]{n}$ , il faut que  $\sqrt[3]{nn}$ , qui est le carré de  $\sqrt[3]{n}$ , se trouve au second terme de la proposée; que  $\sqrt[3]{n}$  se trouve au troisième terme; qu'il n'y ait point d'incommensurable au quatrième terme; que  $\sqrt[3]{nn}$  se trouve au cinquième terme,  $\sqrt[3]{n}$  au sixième; & qu'il n'y ait point d'incommensurable au septième terme; & ainsi de suite.

D'où il est facile de juger comment les autres incommensurables  $\sqrt[4]{n}$ ,  $\sqrt[5]{n}$ , &c. doivent être distribuées dans les termes d'une équation, afin qu'on les puisse ôter par cette méthode.

## PROBLÈME XII.

55. FAIRE évanouir le penultième terme d'une équation  $x^4 + px^3 - qx + r = 0$ , dans laquelle le second terme est évanoui.

IL faut supposer  $x = \frac{y}{r}$ , & substituer  $\frac{y}{r}$  dans la proposée, à la place de  $x$ ; & après avoir ôté les fractions, & divisé les termes par  $r$ , on aura la transformée  $y^4 - qy^3 + pryy + r^3 = 0$ , où le penultième terme est évanoui.

Quand on connoîtra la valeur de  $y$  dans la transformée, on aura la valeur de  $x$ , en mettant la valeur de  $y$  dans  $x = \frac{y}{r}$ .

### REMARQUE.

ON peut mettre dans l'équation supposée  $x = \frac{y}{r}$ , telle grandeur connue qu'on voudra, à la place de  $r$ ; mais alors le premier terme de la transformée aura un coefficient, ou bien la transformée aura des fractions: Mais en mettant le dernier terme tout connu  $r$  dans  $x = \frac{y}{r}$ , la transformée n'aura pas de fractions, & le premier terme n'aura pas d'autre coefficient que l'unité.

On peut par la même méthode, quand ce n'est pas le second terme qui manque dans la proposée, mais le troisième, ou le quatrième, &c. faire en sorte que le terme également éloigné du dernier terme, manque dans la transformée.

Enfin quand le penultième terme manque dans la proposition, on peut par la même méthode, faire en sorte que le second terme soit évanoui dans la transformée.

Les exemples en sont faciles à faire, sans qu'il soit nécessaire d'en prolonger ce Traité.



## ANALYSE COMPOSÉE,

O U

ANALYSE QUI ENSEIGNE A RESOUDRE  
les Problèmes qui se réduisent à des équations  
composées.

## LIVRE IV.

*Où l'on explique la résolution des équations en general, c'est-à-dire de tous les degrez, lorsque leurs racines sont commensurables; la maniere de réduire les équations composées au plus simple degré, & ce qui regarde les équations qui ont des racines égales.*

## SECTION I.

*Où l'on explique la résolution des équations en general, lorsque leurs racines sont commensurables.*

## PROBLÈME I.

36. TROUVER les racines commensurables d'une équation composée numérique ou littérale, de quelque degré qu'elle puisse être dont zero est le second membre, lorsque son premier terme n'a pas d'autre coefficient que l'unité; qu'il n'y a dans ses termes ni fractions, ni incommensurables; & que tous les termes sont homogènes lorsque l'équation est littérale.

## MÉTHODE GÉNÉRALE.

- 1<sup>o</sup>. **I**L faut trouver tous les diviseurs du dernier terme, dont l'unité & le dernier terme lui-même, sont toujours du nombre, & écrire tous ces diviseurs de suite & par ordre,

Tome I.

O

c'est-à-dire, les plus simples les premiers. 1<sup>o</sup>. Il faut diviser l'équation proposée successivement par l'inconnue lineaire de l'équation moins chacun de ces diviseurs du dernier terme, en commençant par les plus simples, supposé qu'on connoisse par les signes qu'il y a des racines positives dans l'équation. Il faut ensuite la diviser successivement par l'inconnue lineaire plus chacun des diviseurs du dernier terme, en allant par ordre des plus simples aux plus composez, supposé qu'on connoisse par les signes qu'il y a des racines negatives dans l'équation. Le premier des diviseurs par lequel  
 \* 26. l'équation sera divisée sans reste, contiendra une des racines qu'on cherche, qui sera positive, si dans le diviseur elle est jointe à l'inconnue par le signe — ; & negative, si c'est par le signe +. 3<sup>o</sup>. Après avoir trouvé une racine de l'équation, on continuera d'operer de la même maniere sur le quotient qu'on aura trouvé, & si on trouve une seconde racine ; on operera de la même maniere sur le nouveau quotient ; ce que l'on continuera jusqu'à ce qu'on ait trouvé toutes les racines de l'équation : & on les trouvera toutes par cette méthode, si elles sont toutes commensurables.

## E X E M P L E I.

Pour trouver les racines de l'équation  $x^3 - 3xx - 10x + 24 = 0$ , 1<sup>o</sup>. il faut chercher tous les diviseurs du dernier terme, & l'on trouvera 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. 2<sup>o</sup>. Il faut faire les équations simples  $x - 1 = 0$ ,  $x - 2 = 0$ ,  $x - 3 = 0$ ,  $x - 4 = 0$ ,  $x - 6 = 0$ ,  $x - 8 = 0$ ,  $x - 12 = 0$ ,  $x - 24 = 0$ , dont les racines sont positives, & contiennent de suite tous les diviseurs du dernier terme. Il faut faire de même les équations simples  $x + 1 = 0$ ,  $x + 2 = 0$ ,  $x + 3 = 0$ , &c. dont les racines sont negatives, & contiennent les mêmes diviseurs.

S'il n'y avoit que des racines positives, les premieres équations simples suffiroient ; & les dernieres suffiroient s'il n'y en avoit que de negatives : mais il faut se servir des unes & des autres, les signes des termes de l'équation proposée faisant voir qu'elle contient des racines positives & negatives.

Il faut ensuite diviser l'équation proposée par  $x - 1 = 0$ , & comme l'on trouve un reste, & que la division n'est pas exacte, on est assuré que  $x - 1 = 0$  ne contient pas une



racine positive de la proposée, c'est-à-dire que  $+1$  n'est pas une racine de la proposée.

Il faut la diviser par  $x+1=0$ ; & comme l'on trouve un reste,  $x+1=0$  ne contient pas une racine négative de l'équation. Les deux diviseurs  $x-1=0$ ,  $x+1=0$  n'ayant pas fait trouver de racines, il faut se servir par ordre des suivans, en commençant par  $x-2=0$ ; mais l'on trouve que la proposée se divise exactement par  $x-2=0$ , & le quotient est  $xx-1x-12=0$ . Cela fait voir que  $x-2=0$  contient une racine positive, qui est  $+2$ , de l'équation proposée.

30. Il ne faut plus diviser la proposée, mais seulement le quotient  $xx-1x-12=0$ , non par les diviseurs  $x-1=0$ ,  $x+1=0$ , qui ont donné des restes, (car s'ils étoient des diviseurs exacts de ce quotient, ils le seroient aussi de la proposée,) mais par les diviseurs  $x-2=0$ ,  $x+2=0$ , & les autres suivans, & l'on trouve qu'en le divisant par  $x-2=0$ , par  $x+2=0$ , par  $x-3=0$ , il y a des restes; mais qu'il se divise exactement par  $x+3=0$ , & le quotient est  $x-4=0$ ; ainsi  $x+3=0$ , &  $x-4=0$ , contiennent les deux autres racines de la proposée, qui sont la négative  $-3$ , & la positive  $+4$ . Et l'équation est résolue; les trois racines sont  $+2$ ,  $-3$ ,  $+4$ .

## E X E M P L E I I.

**P**OUR trouver les racines de l'équation  $x^3-9xx+12x-8=0$ .

10. Il faut chercher tous les diviseurs du dernier terme, qui sont 1, 2, 4, 8.

20. Il faut faire les seules équations simples  $x-1=0$ ,  $x-2=0$ ,  $x-4=0$ ,  $x-8=0$ ; parceque les signes alternatifs  $+$  &  $-$  de la proposée, font voir que toutes ses racines sont positives.

Il faut diviser la proposée successivement par ces équations simples, & l'on trouve que  $x-1=0$ ,  $x-2=0$ , donnent des restes; mais que la division se fait exactement par  $x-4=0$ ; & le quotient est  $xx-5x+2=0$ . Cela fait voir que  $+4$  est une racine de la proposée.

30. Il faut diviser le quotient non par  $x-1=0$ ,  $x-2=0$ , qui ont donné des restes, mais par  $x-4=0$ ,  $x-8=0$ ,

& la division ne pouvant se faire exactement, le quotient ou l'équation  $xx - 5x + 2 = 0$ , n'a pas de racines commensurables.

Si l'on veut avoir la résolution entière de la proposée  $x^3 - 9xx + 21x - 8 = 0$ , dont on connoît déjà une des racines, qui est  $+4$ , on cherchera les deux autres en résolvant l'équation  $xx - 5x + 2 = 0$ , qui est du second degré. Il faut faire passer le dernier terme dans le second membre, & l'on aura  $xx - 5x = -2$ ; ajouter  $+\frac{25}{4}$ , qui est le carré de la moitié du coefficient du second terme, à chaque membre, & l'on aura  $xx - 5x + \frac{25}{4} = \frac{25}{4} - 2 = \frac{17}{4}$ , & enfin tirer la racine carrée de chaque membre, & l'on aura  $x - \frac{5}{2} = \sqrt{\frac{17}{4}}$ , & par transposition  $x = \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{17}{4}}$ , ou  $x = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17}$ ; & l'on aura encore  $x = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{17}$ , en divisant  $xx - 5x + 2 = 0$ , par  $x - \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{17} = 0$ . Et la proposée sera entièrement résolue.

### EXEMPLE III.

**P**OUR trouver les racines de  $x^3 - 2axx - 3aax + 6aab = 0$   
 $- 2bxx + 4abx + 9aac$   
 $- 3cxx + 6acx$

1<sup>o</sup>. Il faut chercher tous les diviseurs du dernier terme, qui sont 1. 3.  $a$ .  $aa$ .  $3a$ .  $3aa$ .  $2b + 3c$ .  $6b + 9c$ .  $2ab + 3ac$ .  $6ab + 9ac$ .  $2aab + 3aac$ .  $6aab + 9aac$ .

2<sup>o</sup>. Les équations simples qui doivent servir de diviseurs pour les racines positives, sont  $x - 1 = 0$ .  $x - 3 = 0$ .  $x - a = 0$ .  $x - aa = 0$ .  $x - 3a = 0$ , &c. Pour les racines négatives,  $x + 1 = 0$ .  $x + 3 = 0$ .  $x + a = 0$ .  $x + aa = 0$ .  $x + 3a = 0$ , &c.

En faisant la division de la proposée par  $x - 1 = 0$ .  $x + 1 = 0$ .  $x - 3 = 0$ .  $x + 3 = 0$ .  $x - a = 0$ , on trouve des restes: mais divisant la proposée par  $x + a = 0$ , la division est exacte, & le quotient est  $xx - 3ax + 6ab = 0$   
 $- 2bx + 9ac$   
 $- 3cx$

Ainsi  $x + a = 0$  contient une racine négative de la proposée, qui est  $-a$ .

3<sup>o</sup>. Continuant de diviser ce quotient, qui ne contient que des racines positives, comme les signes alternatifs  $+$  &  $-$  le font voir, par les seuls diviseurs des racines positives, en

passant ceux qui ont déjà donné des restes, on trouve que la division se fait exactement par  $x - 3a = 0$ , & que le quotient est  $x - 2b - 3c = 0$ ; ainsi  $+ 3a$ , &  $+ 2b + 3c$  sont les deux autres racines de la proposée, qui sont positives: & la proposée est résolue.

Ces exemples suffisent pour faire concevoir clairement la méthode du premier Problème, dont la démonstration est évidente par la formation des équations composées.

C O R O L L A I R E S.

I.

57. **L**ORSQUE l'inconnue n'est pas lineaire dans le penultième terme, mais regardant la puissance de l'inconnue qui est dans ce penultième terme comme lineaire, les autres termes, excepté le dernier, en contiennent les puissances exactes, comme dans l'équation  $x^6 + aax^5 - a^2xx - a^6 = 0$ .  
 $- 2cc + c^4 - 2a^4cc$   
 $- aac^4$

Dans ce cas il ne faut pas prendre dans les équations simples qui doivent être les diviseurs de la proposée, l'inconnue lineaire, mais la puissance de l'inconnue qui est dans le penultième terme.

Dans cet exemple, où les diviseurs du dernier terme sont 1.  $a$ .  $aa$ .  $aa + cc$ , &c. les équations simples qui doivent servir de diviseurs seront  $xx - 1 = 0$ ,  $xx - a = 0$ ,  $xx - aa = 0$ ,  $xx - aa - cc = 0$ , &c. En faisant la division de la proposée par  $xx - aa - cc = 0$ , on trouve qu'elle se fait sans reste; ainsi  $+ aa + cc$  est une racine positive de la proposée, & le quotient  $x^4 + 2aaxx + a^4 = 0$ , contient les  
 $- cc + aacc$

deux autres racines qui sont incommensurables.

En résolvant ce quotient, qui est une équation du second degré, on trouvera que les deux autres racines sont  $\frac{1}{2}cc - aa + \frac{1}{2}c\sqrt{cc - 8aa}$ , &  $\frac{1}{2}cc - aa - \frac{1}{2}c\sqrt{cc - 8aa}$ .

I I.

58. **A**u lieu de faire la division de la proposée par l'inconnue — ou + chacun des diviseurs du dernier terme, on peut substituer successivement dans la proposée, chacun des diviseurs du dernier terme & ses puissances, à la place de l'inconnue & de ses puissances: celui des diviseurs dont la substi-

- tution fera que tous les termes se détruiront par les signes contraires. \* sera une des racines de l'équation : & les diviseurs dont la substitution ne fera pas détruire tous les termes par des signes contraires, ne seront pas les racines de l'équation : ceux de ces diviseurs du dernier terme qui étant substitués dans la proposée avec le signe +, feront détruire tous les termes de l'équation, \* seront les racines positives : ceux qui étant substitués avec le signe —, feront détruire tous les termes de la proposée, \* seront les racines négatives.

En substituant par ordre dans le premier exemple  $x^3 - 3xx - 10x + 24 = 0$ , les diviseurs du dernier terme + 1, + 2, + 3, &c. ou — 1, — 2, — 3, &c. on trouve que la substitution de + 1, & de — 1, ne fait pas détruire les termes ; mais la substitution de + 2 à la place de  $x$ , donne + 8 — 12 — 20 + 24, dont tous les termes se détruisent ; ainsi + 2 est une racine positive de la proposée.

On abaissera ensuite la proposée, en la divisant par  $x - 2 = 0$  ; & l'on trouvera le quotient  $xx - 1x - 12 = 0$ , qui contient les deux autres racines de la proposée ; & substituant dans ce quotient, non les diviseurs + 1, — 1, qui n'ont pas fait évanouir tous les termes de la proposée, mais les autres + 2, — 2, + 3, — 3, &c. l'on trouve que la substitution de — 3 fait détruire tous les termes, les rendant égaux à zéro, ainsi — 3 est une racine négative de l'équation proposée.

Divisant le quotient  $xx - 1x - 12 = 0$ , par  $x + 3 = 0$ , l'on trouve le quotient juste  $x - 4 = 0$ , qui fait voir que + 4 est la troisième racine de la proposée.

La démonstration de ce Corollaire est évidente par 31.

### III.

Le coefficient du second terme d'une équation composée contenant les racines de l'équation, il est évident que les diviseurs du dernier terme, qui ont plus de dimensions que le coefficient du second terme, sont inutiles, & qu'ils ne peuvent servir pour former les équations lineaires qui peuvent exactement diviser la proposée, ainsi dans le troisième exemple, où le coefficient du second terme est lineaire, les diviseurs du dernier terme qui ont plus d'une dimension, sont inutiles, & ne peuvent être les racines de l'équation.

Dans les équations numériques, s'il y avoit des diviseurs

qui surpassent le plus grand coefficient négatif augmenté de l'unité, ils seroient inutiles pour trouver les racines positives, étant plus grands que les racines positives. \*

\* 47.

## I V.

Lorsque la méthode du Problème fait trouver quelques racines, mais non pas toutes, il est évident que l'équation contient des racines commensurables, qui sont celles que fait trouver la méthode; & d'autres incommensurables, qui sont celles qu'on ne peut pas trouver par la méthode: Et si l'on n'en peut trouver aucune par le Problème, elles sont toutes incommensurables. \*

\* 35.

## V.

Il y a des cas où quand même l'équation composée contiendrait des incommensurables, on ne laisseroit pas d'en trouver les racines par la méthode générale; il faut dans ces cas que la grandeur incommensurable soit un diviseur exact du dernier terme de l'équation, ou qu'elle soit une partie d'un diviseur exact du dernier terme, comme dans cet exemple:

$$x^3 + bxx + 2bx\sqrt{ab+3bb} + 18b^3 - xx\sqrt{ab+3bb} - 6bb\sqrt{ab+3bb} = 0$$

La grandeur  $-3b + \sqrt{ab+3bb}$ , est un diviseur exact du dernier terme. En divisant la proposée par  $x + 3b - \sqrt{ab+3bb} = 0$ , la division est exacte, & l'on trouve le quotient  $xx - 2bx + 6bb = 0$ , ainsi  $-3b + \sqrt{ab+3bb}$ , est une racine de la proposée, & le quotient contient les deux autres racines, qui sont imaginaires, l'une étant  $b + \sqrt{-5bb}$ , & l'autre  $b - \sqrt{-5bb}$ .

## V I.

Lorsqu'une équation composée est le produit d'autres équations composées d'un moindre degré que la proposée, & qu'il y en a quelqu'une parmi ces dernières qui n'a que le premier & le dernier terme, comme  $xx - aa = 0$ ,  $x^3 - a^3 = 0$ , &c. & que ce dernier terme  $-aa$ , ou  $-a^3$  est une grandeur commensurable, on peut trouver par la méthode générale ces équations d'un moindre degré, qui n'ont que le premier & le dernier terme.

Par exemple, on veut résoudre l'équation  $x^3 - 2bx^2 - aaxx + 2aabx - 4aabb = 0$ , les diviseurs du dernier  $+ 4bbxx$ .

terme sont 1.  $a$ .  $b$ .  $ab$ .  $aa$ .  $bb$ .  $aab$ .  $aabb$ . On trouve qu'en divisant la proposée par les équations  $x - 1 = 0$ ,  $x + 1 = 0$ ,  $x - a = 0$ ,  $x + a = 0$ ,  $x - b = 0$ ,  $x + b = 0$ , la division n'est pas exacte.

Il faut voir ensuite si la proposée ne peut point être divisée par  $xx - ab = 0$ ,  $xx + ab = 0$ ,  $xx - aa = 0$ ; & l'on trouve qu'elle se divise exactement par  $xx - aa = 0$ ; & que le quotient est  $xx - 2bx + 4bb = 0$ : Ainsi  $xx - aa = 0$  est une des équations dont la proposée est le produit, & l'autre est le quotient  $xx - 2bx + 4bb = 0$ .

En résolvant  $xx - aa = 0$ , on trouve  $xx = aa$ ,  $x = \sqrt{aa}$ , &  $x = -\sqrt{aa}$ , qui sont deux racines de la proposée.

Le quotient  $xx - 2bx + 4bb = 0$ , contient les deux autres racines  $+b + \sqrt{-3bb}$ ,  $+b - \sqrt{-3bb}$ , qui sont imaginaires.

## PROBLÈME II.

59. *LORSQU'UNE équation composée, de quelque degré qu'elle puisse être, a un coefficient différent de l'unité dans son premier terme; qu'elle n'a ni fractions, ni incommensurables; trouver toutes les racines commensurables qu'elle peut avoir.*

### MÉTHODE GÉNÉRALE.

1°. IL faut trouver tous les diviseurs du coefficient du premier terme, & tous les diviseurs du dernier terme; & après avoir multiplié tous les diviseurs du premier terme par l'inconnue linéaire, il faut faire des équations simples de ces produits, & de chacun des diviseurs du dernier terme, mettant le signe — devant chacun de ces diviseurs du dernier terme, pour trouver les racines positives de la proposée; & + pour trouver les négatives.

2°. Il faut diviser la proposée successivement par ces équations simples, jusqu'à ce qu'on en trouve une qui fasse la division sans reste: Elle contiendra une des racines de la proposée.

3°. Il faut continuer l'opération sur le quotient, jusqu'à ce qu'on trouve une seconde racine de la proposée, & faire la même opération sur le quotient que fera trouver cette seconde racine.

En

En continuant cette operation, on trouvera toutes les racines de la proposée, si elles sont commensurables.

S'il se trouve des quotiens dont on ne puisse trouver des racines par cette méthode, la proposée aura des racines incommensurables, qui sont celles de ces quotiens. Et si l'on ne pouvoit trouver aucune racine de la proposée par cette méthode, elles seroient toutes incommensurables.

E X E M P L E.

**P**OUR trouver les racines de  $ccfx^3 - aacfx + aabbcx - 3aab^4 = 0$   
 $-bbccxx + 3aabbfx$   
 $-3bbfxx + 3b^4cx$

1°. tous les diviseurs du coefficient  $ccf$  du premier terme sont 1.  $c$ .  $cc$ .  $f$ .  $cf$ .  $ccf$ . Tous les diviseurs du dernier terme  $3aab^4$  sont 1. 3.  $a$ .  $3a$ .  $aa$ .  $3aa$ .  $b$ .  $3b$ .  $ab$ .  $3ab$ .  $aab$ .  $3aab$ .  $bb$ .  $3bb$ , &c. Tous les produits des diviseurs du coefficient du premier terme par l'inconnue  $x$ , sont  $x$ .  $cx$ .  $ccx$ .  $fx$ .  $cfx$ .  $ccfx$ . Les équations simples par lesquelles il faut diviser la proposée qui n'a que des racines positives, comme les signes alternatifs + & - le font voir, sont  $x - 1 = 0$ ,  $x - 3 = 0$ ,  $x - a = 0$ ,  $x - 3a = 0$ , &c.  $cx - 1 = 0$ ,  $cx - 3 = 0$ ,  $cx - a = 0$ ,  $cx - 3a = 0$ ,  $cx - aa = 0$ , &c.  $ccx - 1 = 0$ ,  $ccx - 3 = 0$ , &c.  $fx - 1 = 0$ ,  $fx - 3 = 0$ , &c. & ainsi de suite. Si la proposée avoit des racines négatives, il faudroit encore faire les équations simples  $x + 1 = 0$ ,  $x + 3 = 0$ , &c.  $cx + 1 = 0$ ,  $cx + 3 = 0$ , &c.  $ccx + 1 = 0$ ,  $ccx + 3 = 0$ , &c. & ainsi de suite.

2°. Il faut diviser la proposée par ces équations simples, & l'on trouve que  $cx - aa = 0$ , fait la division sans reste; & que le quotient est  $cfxx - 3bbfx + 3b^4 = 0$ . Ainsi  $cx - aa$   
 $-bbcx$

$= 0$ , contient une racine de la proposée qui est  $x = \frac{aa}{c}$ .

3°. Il faut continuer la même operation sur le quotient; mais il ne faut se servir que des équations simples, dont le premier terme est le produit d'un des diviseurs du coefficient  $cf$  du premier terme du quotient par  $x$ , & dont le second terme est un des diviseurs du dernier terme  $3b^4$  du quotient, & passer toutes les autres comme inutiles, comme aussi celles qui ont donné des restes dans la premiere operation; & l'on trouvera que le quotient  $cfxx - 3bbfx + 3b^4 = 0$ , se divise  
 $-bbcx$

exactement par  $fx - bb = 0$ , & que le quotient qui en vient est  $cx - 3bb = 0$ . Ainsi l'on a les deux autres racines de la proposée, qui sont  $x = \frac{bb}{f}$ , &  $x = \frac{3bb}{c}$ .

La démonstration de ce Problème est évidente par la formation des équations composées, dont le premier terme  
\* 27. a un coefficient différent de l'unité.\*

## A V E R T I S S E M E N T.

ON verra l'usage du second Problème dans la suite, lorsqu'on enseignera à abaisser une équation composée au plus simple degré; & l'on voit assez qu'il sert à trouver les racines des équations composées qui ont des fractions, lorsqu'on ne veut pas prendre la peine de les transformer en d'autres qui n'ayent que l'unité pour le coefficient du premier terme.

## SECTION II.

*Où l'on explique d'autres méthodes pour résoudre le premier & le second Problème qui abrègent souvent les opérations.*

## P R E M I E R E M É T H O D E.

60. 1<sup>o</sup>. **I**L faut partager toutes les grandeurs de l'équation en deux sommes, & chercher par la méthode qu'on a donnée pour trouver le plus grand diviseur commun, un diviseur commun à ces deux sommes: si ce diviseur commun contient l'inconnue linéaire, il contient nécessairement une racine de l'équation; & l'équation étant divisée par ce diviseur commun, le quotient contiendra les autres racines, qu'on cherchera de la même manière.

2<sup>o</sup>. Si ce diviseur commun contient différentes puissances de l'inconnue, il faut diviser l'équation proposée par ce diviseur commun; & si le quotient exact, qui en viendra nécessairement, contient l'inconnue linéaire, ce quotient contiendra une des racines de la proposée, & le diviseur commun contiendra les autres. Si ce quotient contient différentes puissances de l'inconnue, on est assuré que ce quotient & le diviseur commun sont deux équations dont la proposée est le produit: On opérera sur chacune comme l'on a



fait sur la proposée ; c'est-à-dire, on partagera le diviseur commun en deux sommes, dont on cherchera le diviseur commun ; & on partagera de même le quotient en deux sommes, dont on cherchera le diviseur commun, &c. Et en continuant d'operer de cette maniere, si l'on arrive à un diviseur commun, ou à un quotient exact, où l'inconnue soit lineaire, il contiendra une racine de la proposée ; & on les trouvera toutes les unes après les autres, si elles sont commensurables.

3°. Pour observer de l'ordre dans ce partage de toutes les grandeurs d'une équation en deux sommes, on mettra dans une des deux sommes toutes les quantitez de l'équation où se trouve une même lettre, & toutes les autres dans l'autre. Et si cela ne réussit pas, on mettra dans une des sommes les grandeurs de l'équation, où une même lettre a un même nombre de dimensions, & les autres dans la seconde somme : ou bien on mettra dans la premiere somme les grandeurs où sont deux lettres differentes, & les autres dans la seconde, &c.

4°. Quand on a fait le partage de l'équation en deux sommes, on peut chercher le diviseur commun de la proposée & de l'une des deux sommes, au lieu de chercher celui des deux sommes.

E X E M P L E I.

P O U R trouver les racines de  $x^3 - 2axx - 3aax - 3aab = 0$   
 $- cxx + 3acx + 3abc$   
 $+ bxx - 2abx$   
 $- bcx$

1°. Il faut partager toutes les quantitez de l'équation en deux sommes, on mettra toutes celles où se trouve  $c$  dans l'une, & les autres dans l'autre somme ; & l'on aura

$x^3 - 2axx - 3aax - 3aab$  . Et  $- cxx + 3acx + 3abc$   
 $+ bxx - 2abx$   $- bcx$

La seconde somme contenant  $c$  dans toutes ses grandeurs, il faut la diviser par  $-c$ , & l'on aura pour la seconde  $xx - 3ax$   
 $+ bx$

$- 3ab$ . Il faut diviser la premiere par cette seconde, & l'on trouvera que la division se fait exactement ; ainsi cette seconde somme est un diviseur commun de la premiere & de la seconde somme, & par consequent de la proposée.

2°. Ce diviseur commun  $xx - 3ax - 3ab = 0$ , étant  
 $+ bx$  P ij

une équation composée, & non pas lineaire, il faut diviser la proposée par ce diviseur commun, & l'on trouvera pour quotient exact l'équation lineaire  $x + a - c = 0$ , qui contient une racine de la proposée qui est  $x = -a + c$ . Le diviseur commun  $xx - 3ax - 3ab = 0$ , contient les deux  
 $+ bx$

autres racines de la proposée.

Pour les trouver, on partagera  $xx - 3ax - 3ab = 0$  en  
 $+ bx$

deux sommes, mettant dans la premiere les grandeurs où est  $b$ , & les autres dans la seconde; & l'on aura  $bx - 3ab$ , &  $xx - 3ax$ . Divisant la premiere par  $b$ , & la seconde par  $x$ , elles seront réduites à  $x - 3a = 0$ ,  $x - 3a = 0$ , qui étant la même grandeur, ont pour diviseur commun  $x - 3a = 0$ , qui est necessairement un diviseur exact de la proposée, & étant lineaire, il contient une seconde racine de la proposée, qui est  $x = 3a$ .

On divisera  $xx - 3ax - 3ab = 0$ , qui contient les deux  
 $+ bx$

dernieres racines de la proposée, par l'équation lineaire  $x - 3a = 0$ , qui contient l'une de ces racines; & le quotient  $x + b = 0$ , contiendra la derniere racine, qui est  $x = -b$ .

# E X E M P L E I I.

POUR trouver les racines de l'équation

$$\begin{array}{r} x^4 - 2ax^3 - 3aaxx + 15aabb - 18aabb = 0 \\ - c + 3ac - 15abc + 18abbc \\ - 5b + 10ab - 3aad + 9aabd \\ + d - 2ad + 3acd - 9abcd \\ + 5bc - 12abb \\ - dc + 6abd \\ + 6bb - 6bbc \\ - 3bd + 3bcd \end{array}$$

10. Il faut partager toutes les quantitez de l'équation en deux sommes; on peut mettre dans la premiere toutes les quantitez où sont les deux lettres  $b$  &  $d$ , & toutes les autres dans la seconde; & l'on aura

$$\begin{array}{r} - 5bx^3 + 10abxx + 15aabb - 18aabb \\ + d - 2ad - 15abc + 18abbc \\ + 5bc - 3aad + 9aabd \\ - dc + 3acd - 9abcd \\ + 6bb - 12abb \\ - 3bd + 6abd \\ - 6bbc \\ + 3bcd \end{array} \quad \text{Et } x^4 - 2ax^3 - 3aaxx - cx^2 + 3acxx$$

La seconde peut être divisée par  $xx$ ; & faisant la division,

$$\begin{array}{r} xx - 2ax - 3aa \\ - cx + 3ac \end{array}$$

Il faut chercher le plus grand diviseur commun de la première somme & de cette seconde somme, & l'on trouve que  $xx - 2ax - 3aa = 0$ , est elle-même le plus grand

$$- cx + 3ac$$

diviseur commun.

2<sup>o</sup>. Il faut diviser la proposée par ce diviseur commun, & l'on trouve le quotient exact  $xx - 5bx + 6bb = 0$ ; on est

$$+ dx - 3bd$$

assuré que la proposée est le produit de ces deux équations

$$\begin{array}{r} xx - 2ax - 3aa = 0, \quad xx - 5bx + 6bb = 0, \\ - cx + 3ac \quad \quad \quad + dx - 3bd \end{array}$$

Il faut chercher séparément les racines de chacune, de la même manière qu'on a cherché celles de la proposée, c'est-à-dire, il faut partager la première en deux sommes, en mettant dans la première les grandeurs où se trouve la lettre  $c$ , & les autres dans la seconde; & l'on trouve

$$- cx + 3ac, \quad \text{Et } xx - 2ax - 3aa.$$

Divisant la première par  $-c$ , l'on trouve  $x - 3a$ , qui est un diviseur commun de la première & de la seconde; par conséquent  $x - 3a = 0$ , contient une racine de l'équation  $xx - 2ax - 3aa = 0$ ; & par conséquent une racine de la

$$- cx + 3ac$$

proposée, qui est  $x = 3a$ . En divisant  $xx - 2ax - 3aa = 0$ ,

$$- cx + 3ac$$

par  $x - 3a = 0$ , le quotient  $x + a - c = 0$ , contient une autre racine.

Il faut à présent trouver les racines de  $xx - 5bx + 6bb$

$$+ dx - 3bd$$

$= 0$ ; pour cela on partagera cette équation en deux sommes, mettant dans la première les grandeurs où se trouve  $d$ , & les autres dans la seconde; & l'on aura

$$+ dx - 3bd, \quad \text{Et } xx - 5bx + 6bb.$$

On divisera la première par  $d$ , & l'on aura  $x - 3b$ , qui est un diviseur de la seconde  $xx - 5bx + 6bb$ . Ainsi  $x - 3b = 0$ , contient une racine de  $xx - 5bx + 6bb = 0$ . Divi-

$$+ dx - 3bd$$

sant cette équation par  $x - 3b = 0$ , l'on trouvera le quo-

tient  $x - 2b + d = 0$ , qui contient l'autre racine ; & l'on a les quatre racines de la proposée.

*Démonstration de cette méthode.*

**E**LLE dépend de cet axiome, qu'un diviseur commun aux deux parties d'un tout, est diviseur du tout ; & qu'un diviseur commun du tout & d'une partie, est diviseur de l'autre partie.

Les équations faites de l'inconnue de l'équation proposée, & de quelques-unes des grandeurs connues de la proposée, quand elles sont des diviseurs exacts de la proposée, contiennent les racines de la proposée. Or il est évident par l'axiome précédent, qu'on trouve par la méthode ces équations qui divisent exactement la proposée ; on trouve donc par la méthode les racines de la proposée ; ou quand elles n'en ont pas de commensurables, on trouve les équations plus simples que la proposée, qui contiennent ces racines, quand elle est le produit d'autres équations plus simples commensurables.

*Application de la même méthode au second Problème.*

**P**OUR trouver les racines de  $ccfx^3 - aacfx^2 + aabbcx - 3aab^3 = 0$   
 $- bbccxx + 3aabbfx$   
 $- 3bbcfxx + 3b^3cx$

1°. on partagera l'équation en deux sommes, mettant dans la première toutes les grandeurs où se trouve  $b$ , & les autres dans la seconde ; & l'on aura

$$\begin{aligned} & -bbccxx + aabbcx - 3aab^3 \\ & -3bbcfxx + 3aabbfx \\ & + 3b^3cx \end{aligned}$$

$$\text{Et } ccfx^3 - aacfx^2$$

Divisant la première par  $-bb$ , & la seconde par  $cfxx$ , on aura.

$$\begin{aligned} & ccxx - aacx + 3aabb \\ & + 3cfxx - 3aafx \\ & - 3bbcx \end{aligned}$$

$$\text{Et } cx - aa$$

On cherchera le plus grand diviseur commun, & on trouvera que  $cx - aa = 0$ , est le plus grand diviseur commun ; par conséquent  $cx - aa = 0$  contient une racine de la proposée ; qui est  $x = \frac{aa}{c}$ .

On divisera la proposée par  $cx - aa = 0$ , & l'on aura le quotient  $cfxx - 3bbfx + 3b^3 = 0$ , qui contient les deux  
 $-bbcx$ .

autres racines de la proposée. On le partagera en deux sommes, mettant dans la première les grandeurs où est  $f$ , & les autres dans la seconde; & l'on aura

$$cfxx - 3bbfx, \quad \text{Et} \quad -bbcx + 3b^4.$$

Divisant la première par  $fx$ , & la seconde par  $-bb$ , l'on aura  $cx - 3bb$ , Et  $cx - 3bb$ . Ces deux sommes contenant les mêmes grandeurs, chacune est leur diviseur commun; par conséquent  $cx - 3bb = 0$ , contient une seconde racine de la proposée, qui est  $x = \frac{3b}{c}$ .

$$\text{Enfin divisant } cfxx - 3bbfx + 3b^4 = 0, \text{ par } cx - 3bb = 0, \\ -bbcx$$

on trouvera pour quotient  $fx - bb = 0$ , qui contient la troisième racine de la proposée, qui est  $x = \frac{bb}{f}$ .

La démonstration est la même.

## R E M A R Q U E S.

## I.

ON pourroit proposer la même méthode de cette autre manière. Il faut supposer toutes les grandeurs de l'équation proposée où se trouve une même lettre, ou deux lettres différentes, égales à zero; en supposant que cette lettre, ou chacune de ces lettres, est égale à zero, & feindre une équation de toutes ces grandeurs; & si l'on veut une autre de toutes les autres grandeurs de l'équation, & chercher un diviseur commun à ces deux équations; ou bien (si l'on veut) chercher un diviseur commun à la proposée, & à l'une de ces deux équations, & faire le reste de l'opération marquée dans la méthode.

## II.

Lorsque toutes les racines d'une équation composée sont incommensurables, & qu'elle ne peut pas être le produit d'équations simples commensurables, elle le peut être souvent de deux ou de plusieurs équations composées plus simples, chacune d'un moindre degré que la proposée, lesquelles équations composantes, quoiqu'elles n'aient pas leurs racines commensurables, peuvent pourtant être elles-mêmes commensurables; c'est-à-dire, elles peuvent ne contenir aucunes incommensurables. Or il est évident que la méthode qu'on vient d'expliquer, ne sert pas seulement à

trouver les racines commensurables de la proposée; mais aussi les équations composantes plus simples que la proposée, & dont elle est le produit, lorsque ces équations plus simples sont commensurables; ce qui sert à abaisser la proposée à un moindre degré.

## I I I.

Lorsqu'après avoir fait le partage de toutes les grandeurs d'une équation composée en deux sommes, de toute les manières qu'il est possible, on ne trouve aucune équation simple qui la divise exactement, c'est une marque qu'elle n'a aucune racine commensurable; & lorsqu'on ne trouve aucune équation composée plus simple que la proposée qui la divise exactement, c'est une marque qu'elle ne peut être abaissée à un degré plus simple; c'est-à-dire, qu'elle ne peut être le produit d'autres équations composées plus simples qui soient commensurables.

## I V.

Cette méthode s'étend aussi aux équations qui ont des incommensurables, lorsque ces équations sont le produit d'autres équations plus simples qui contiennent les mêmes incommensurables, ou du moins dont une les contient.

Pour trouver, par exemple, les racines de  $x^3 + bxx$

$$\begin{aligned} & -xx\sqrt{ab+3bb} \\ & + 2bx\sqrt{ab+3bb} + 18b^3 \end{aligned} = 0, \\ & - 6bb\sqrt{ab+3bb}$$

on partagera cette équation en deux sommes, mettant dans la première les grandeurs où se trouve l'incommensurable  $\sqrt{ab+3bb}$ , & les autres dans la seconde; & l'on aura

$$-xx\sqrt{ab+3bb} + 2bx\sqrt{ab+3bb} - 6bb\sqrt{ab+3bb}.$$

Et  $x^3 + bxx + 18b^3$ . Divisant la première par  $-\sqrt{ab+3bb}$ , l'on aura pour la première  $xx - 2bx + 6bb$ . On cherchera le plus grand diviseur commun de la première & de la seconde somme, & l'on trouvera que  $xx - 2bx + 6bb = 0$ , est ce diviseur commun, par lequel divisant la proposée, on trouvera le quotient exact  $x + 3b - \sqrt{ab+3bb} = 0$ , qui contient une racine de la proposée, qui est  $x = -3b + \sqrt{ab+3bb}$ . Le diviseur  $xx - 2bx + 6bb = 0$ , contient les deux autres qui sont imaginaires, la première étant  $x = b + \sqrt{-5bb}$ ; la seconde,  $x = b - \sqrt{-5bb}$ .

SECONDE

## SECONDE METHODE.

61. 1°. IL faut regarder une des grandeurs connues de l'équation composée dont on veut trouver les racines, ou bien les équations commensurables plus simples qui la divisent exactement, comme l'inconnue de l'équation; & considérer l'inconnue de l'équation comme une grandeur connue, & ordonner l'équation par rapport à cette inconnue supposée.

2°. Il faut ensuite appliquer à l'équation ainsi ordonnée, la méthode du second Problème, ou la première méthode de cette section; & si l'on trouve des équations, dans lesquelles l'inconnue de la proposée soit lineaire, qui divisent exactement cette équation, on aura les racines de la proposée. Si l'on trouve des équations qui divisent exactement cette équation, qui contiennent des puissances de l'inconnue de la proposée, l'on aura les équations composées plus simples que la proposée, dont elle est le produit. L'on operera sur chacune de ces équations composées plus simples, comme l'on a fait sur la proposée.

3°. Dans le choix qu'on fera d'une grandeur connue de la proposée, pour en faire l'inconnue de l'équation, il faut en prendre une dont la plus haute puissance soit moindre que celle de l'inconnue de la proposée, pour avoir une équation d'un moindre degré que la proposée, & qui soit par conséquent plus facile à résoudre.

## E X E M P L E.

POUR trouver les racines de cette équation du troisième degré,

$$\begin{aligned} x^3 - 2cx - acx + ccx &= 0, \\ + axx - bcx - acd \\ + bxx + abx - bcd \\ + dxx + ccx + abd \\ - 2cdx \\ + adx \\ + bdx \end{aligned}$$

1°. on regardera la connue  $c$  comme inconnue, & l'inconnue  $x$  comme connue, & après avoir ordonné l'équation par rapport à l'inconnue  $c$ , on aura l'équation suivante du second degré

$$\begin{aligned} dcc - adc + abd &= 0 \\ + xcc - bdc + abx \\ - axc + adx \\ - bxx + bdx \\ - 2dxc + axx \\ - 2axc + bxx \\ + dxx \\ + x^3 \end{aligned}$$

2°. Pour se servir de la méthode du second Problème, il faut trouver tous les diviseurs du coefficient du premier terme  $d + x$ , qui sont 1.  $d + x$ ; & leurs produits par l'inconnue  $c$ , qui sont  $c$ ,  $cd + cx$ . Il faut aussi trouver tous les diviseurs du dernier terme. Pour les trouver, on feindra que ce dernier terme est une équation; & l'on aura

$$\begin{aligned} x^3 + dxx + bdx + abd &= 0, \\ + bxx + adx \\ + axx + abx \end{aligned}$$

On cherchera tous les diviseurs de son dernier terme  $abd$ , qui sont 1.  $a$ .  $b$ .  $d$ .  $ab$ .  $ad$ .  $bd$ .  $abd$ . On fera les équations simples  $x + 1 = 0$ .  $x + a = 0$ .  $x + b = 0$ .  $x + d = 0$ . Il est inutile d'en faire d'autres, parceque les racines de cette équation feinte sont toutes négatives, & les diviseurs  $ab$ .  $ad$ , &c. ont plus de dimensions qu'il n'en faut dans ces équations simples. L'on trouvera que la division de cette équation feinte se fait exactement par  $x + a = 0$ ,  $x + b = 0$ ,  $x + d = 0$ .

Si l'on avoit besoin de tous les diviseurs du dernier terme; il n'y auroit qu'à multiplier ces équations simples les unes par les autres deux à deux; mais ces diviseurs seroient inutiles, ayant plus de dimensions qu'il n'en faut.

Ayant les diviseurs du dernier terme, dont on a besoin, on fera, selon la méthode du second Problème, les équations simples de l'inconnue  $c$ , & de chacun des diviseurs du dernier terme; & l'on aura  $c - x - a = 0$ ,  $c - x - b = 0$ ,  $c - x - d = 0$ , &c. On ne fait pas les équations simples  $dc + xc - x - a = 0$ , &c. parceque le premier terme  $dc + xc$ , a plus de dimensions qu'il ne faut. On divisera l'équation, dont  $c$  est supposée l'inconnue, par ces équations simples, & on trouvera qu'elle se divise sans reste par  $c - x - a = 0$ , & par  $c - x - b = 0$ . Ainsi ces équations simples contiennent chacune une racine de la proposée. La première est  $x = c - a$ ; la seconde,  $x = c - b$ ; & l'on trouvera, après avoir divisé la proposée par les équations simples  $x + a - c = 0$ ,  $x + b - c = 0$ , le quotient exact  $x + d = 0$ , qui contient la troisième racine  $x = -d$ .

#### R E M A R Q U E.

ON auroit beaucoup abrégé l'opération précédente, si l'on avoit examiné, avant de chercher les diviseurs du dernier



terme de l'équation dont  $c$  a été supposée l'inconnue, si un des diviseurs du premier terme  $dcc + xcc$ , par exemple  $d + x$ , ne le seroit point aussi de toute cette équation; & comme l'on auroit trouvé qu'il la divise sans reste, & que le quotient est

$$\begin{array}{r} cc - ac + ab = 0, \\ - bc + ax \\ - 2xc + bx \\ + xx \end{array}$$

le diviseur  $d + x = 0$ , contiendrait déjà une racine de la proposée qui est  $x = -d$ . L'on trouveroit les deux autres en opérant seulement sur le quotient: mais on ne s'est pas servi de cet abrégé, afin de faire mieux concevoir cette seconde méthode.

*Autre maniere par la premiere methode de cette Section.*

ON partagera l'équation ordonnée par rapport à la lettre  $c$ , considérée comme inconnue, en deux sommes, mettant dans la premiere les grandeurs où se trouve la lettre  $d$ , & les autres dans la seconde, & l'on aura

$$\begin{array}{rcl} + dcc - adc + abd & \text{Et} & xcc - axc + abx \\ - bdc + adx & & - bxc + axx \\ - 2dxc + bdx & & - 2xxc + bxx \\ + dxx & & + x^3 \end{array}$$

Divisant la premiere par  $d$ , & la seconde par  $x$ , on aura pour l'une & l'autre,

$$\begin{array}{r} cc - ac + ab \\ - bc + ax \\ - 2xc + bx \\ + xx \end{array}$$

Ainsi le plus grand diviseur commun des deux sommes est

$$\begin{array}{r} cc - ac + ab = 0, \\ - bc + ax \\ - 2xc + bx \\ + xx \end{array}$$

On divisera l'équation, dont  $c$  est supposée l'inconnue, par ce diviseur commun, & l'on trouvera le quotient  $d + x = 0$ , qui contient une racine de la proposée, qui est  $x = -d$ ; pour avoir les deux autres, on partagera le diviseur commun en deux sommes, mettant dans la premiere les grandeurs où se trouve  $a$ , & les autres dans la seconde; & l'on aura

$$\begin{array}{rcl} - ac + ab & \text{Et} & cc - bc + bx \\ + ax & & - 2xc + xx \end{array}$$

Qij

Divisant la première par  $-a$ , l'on aura pour la première  $c - b - x = 0$ , qui divise exactement la seconde; ainsi  $c - b - x = 0$  contient une seconde racine de la proposée, qui est  $x = c - b$ . Divisant  $cc - ac + ab = 0$ , par  $c - b - x = 0$ ,

$$\begin{array}{r} -bc + ax \\ -2xc + bx \\ +xx \end{array}$$

l'on trouvera le quotient  $c - a - x = 0$ , qui contient la troisième racine qui est  $x = c - a$ .

*Démonstration de la seconde méthode.*

IL est évident que les diviseurs exacts de l'équation qu'on a ordonnée par rapport à une des lettres connues de la proposée, regardée comme inconnue, sont aussi des diviseurs exacts de la proposée; & que s'ils contiennent l'inconnue linéaire  $x$  de la proposée, \* ils en contiennent les racines; s'ils contiennent les puissances de l'inconnue  $x$  de la proposée, ce sont les équations commensurables plus simples que la proposée, dont elle est le produit: Or la méthode fait trouver ces diviseurs exacts, lorsqu'il y en a; elle fait donc trouver les racines commensurables de la proposée, ou les équations commensurables plus simples que la proposée, dont elle est le produit.

*Troisième méthode par le moyen des transformations.*

*Remarques nécessaires pour concevoir clairement cette méthode.*

CETTE troisième méthode servira à abréger la méthode générale du premier Problème, principalement dans les équations numériques; elle s'étend aussi aux équations littérales; mais les deux méthodes qui précèdent, sont ordinairement les plus courtes de toutes pour ces équations.

La longueur de la méthode générale du premier Problème pour trouver les racines d'une équation composée, vient de ce qu'étant nécessaire de diviser cette équation par une équation simple qui contienne l'inconnue plus ou moins un des diviseurs du dernier terme; quand ce dernier terme a beaucoup de diviseurs, il y a beaucoup de divisions à faire, avant de trouver les équations simples, qui en sont les di-

viseurs; ainsi la maniere d'abreger cette méthode, seroit de diminuer le nombre des diviseurs du dernier terme de la proposée, ou de pouvoir distinguer parmi ces diviseurs ceux-là seulement qui sont utiles, & de laisser les autres.

Cela se peut faire par le moyen des transformations; 1°. en trouvant une transformée dont le dernier terme contienne moins de diviseurs que la proposée; par cette maniere on trouvera plus facilement les racines de la transformée, qui feront ensuite connoître celles de la proposée. 2°. En trouvant une ou plusieurs transformées, dont les racines soient celles de la proposée augmentées ou diminuées d'une grandeur connue; car les racines de ces transformées étant diminuées ou augmentées de la même grandeur connue, seront celles de la proposée; & ces racines des transformées devant être des diviseurs de leurs derniers termes, en diminuant ou augmentant tous les diviseurs des derniers termes de ces transformées de la même grandeur connue, il est évident qu'il n'y aura que les diviseurs ainsi diminuez ou augmentez, qui seront communs avec les diviseurs du dernier terme de la proposée, qui pourront être les racines de la proposée; ce qui fera distinguer parmi tous les diviseurs du dernier terme de la proposée, ceux-là seulement qui en pourront être les racines.

Mais comme l'on n'a besoin que des seuls derniers termes des transformées, il faut se souvenir pour abreger le calcul; 1°. qu'en substituant une grandeur connue positive dans la proposée à la place de l'inconnue, \* la somme de toutes les grandeurs de l'équation, après la substitution, est le dernier terme de la transformée, dont les racines seroient celles de la proposée diminuées de cette même grandeur connue: 2°. qu'en substituant une grandeur connue négative dans la proposée à la place de l'inconnue, \* la somme de toutes les grandeurs de l'équation, après la substitution, est le dernier terme de la transformée, dont les racines seroient celles de la proposée augmentées de la même grandeur connue. Et dans ce dernier cas, il suffit de substituer la grandeur connue comme si elle étoit positive, & de changer tous les signes des termes où les puissances de l'inconnue ont des exposans impairs; c'est-à-dire, où il y a  $x$ ,  $x^1$ ,  $x^3$ , &c. Ces choses supposées. Voici la troisième méthode.

62. *Méthode pour transformer une équation proposée en une autre, dont le dernier terme ait moins de diviseurs que le dernier terme de la proposée.*

## PREMIER CAS.

*QUAND les puissances de suite d'un diviseur du coëfficient du second terme, sont des diviseurs de tous les termes suivans; & quand le second terme étant évanoui, les puissances de suite d'un quarré diviseur du coëfficient du troisième terme, sont des diviseurs de tous les termes suivans.*

**I**L faut trouver la transformée, dont les racines soient les racines de l'équation, divisées par le diviseur du second terme, dont les puissances prises de suite, sont des diviseurs des coëfficiens suivans & du dernier terme; & le dernier terme de la transformée aura beaucoup moins de diviseurs que celui de la proposée.

Lorsque le second terme est évanoui, il faut trouver la transformée, dont les racines soient les racines de la proposée, divisées par la racine du quarré diviseur du troisième terme, dont les puissances prises de suite, sont des diviseurs des coëfficiens suivans & du dernier terme.

## EXEMPLE I.

**P**OUR transformer l'équation  $x^3 - 4xx + 12x - 144 = 0$ , en une autre, dont le dernier terme ait moins de diviseurs que 144, qui en a beaucoup, je remarque que les puissances 4 & 8 de 2, qui est un diviseur du second terme 4, sont des diviseurs de 12 & de 144; c'est-à-dire 4, quarré de 2, est diviseur de 12, & 8 cube de 2, l'est de 144.

\* 36. Je divise chaque racine de la proposée par 2, c'est-à-dire, je suppose  $\frac{x}{2} = y$ , d'où je tire  $x = 2y$ ; je fais la substitution de cette valeur de  $x$ , à la place de  $x$ , dans la proposée, ce qui se fait par abrégé, en divisant 4 par 2, 12 par 4, 144 par 8; je trouve la transformée  $y^3 - 2yy + 3y - 18 = 0$ , dont le dernier terme 18 a bien moins de diviseurs que 144. Les diviseurs de 18 sont 1. 2. 3. 6. 9. 18.

5<sup>e</sup> Transfor-  
mation.

Je trouve que  $y^3 - 2yy + 3y - 18 = 0$ , se divise exactement par  $y - 3 = 0$ , & que le quotient est  $yy + 3y - 6 = 0$ . Ainsi + 3 est une racine positive de la transformée; le quotient contient les deux autres qui sont imaginaires. En

Substituant 3 à la place de  $y$  dans  $x = 2y$ , l'on aura  $x = 6$ , ainsi 6 est la racine de la proposée.

## E X E M P L E I I.

**S**OIT la proposée  $x^3 - 144x - 10368 = 0$ , dont le dernier terme a beaucoup de diviseurs, mais il est divisible par la troisième puissance de 12; & le troisième terme  $144x$  est divisible par le carré de 12.

Il faut transformer cette équation en une autre qui soit telle, que les racines de la proposée, divisées par 12, soient celles de la transformée; ainsi il faut supposer  $x = 12y$ ; & après la substitution, qui se fait par abrégé, \* en divisant 144 par 144 carré de 12, & 10368 par 1728 cube de 12, l'on aura la transformée  $y^3 - 1y - 6 = 0$ , dont le dernier terme 6, n'a que les diviseurs 1. 2. 3. 6. \* 36; 5<sup>e</sup> Transforma-  
tion.

Divisant cette transformée par  $y - 2 = 0$ , la division se fait sans reste; & l'on trouve le quotient  $yy + 2y + 3 = 0$ . Ainsi  $+2$  est une racine positive de la transformée; & les deux autres que contient le quotient, sont imaginaires.

Substituant  $+2$  à la place de  $y$  dans  $x = 12y$ , l'on a  $x = 24$ , ainsi  $+24$  est la racine de la proposée.

*Second cas pour toutes les équations.*

**T R A N S F O R M E R** une équation, dont le dernier terme a beaucoup de diviseurs, en une autre dont le dernier terme en ait moins, lorsque l'équation n'a pas les conditions du premier cas.

**S**OIT la proposée  $x^3 - 10xx + 19x - 24 = 0$ , qu'il faut transformer en une autre, dont le dernier terme ait moins de diviseurs que celui de la proposée.

Il faut substituer dans la proposée, à la place de  $x$  & de ses puissances, 1<sup>o</sup>. l'unité, c'est-à-dire  $+1$ ; 2<sup>o</sup>.  $-1$ ; 3<sup>o</sup>.  $+2$  & ses puissances; 4<sup>o</sup>.  $-2$  & ses puissances; & ainsi de suite  $+3$ ,  $-3$ , &c. Il faut prendre la somme des grandeurs de l'équation après chaque substitution.

Quand on en trouvera une qui a moins de diviseurs que le dernier terme de la proposée, il faudra supposer l'inconnue de la proposée  $x = y +$  ou  $-$  le nombre dont la substitution a donné la somme qui a le moins de diviseurs, & substituer cette valeur de  $x$ , à la place de  $x$ , dans la pro-

posée; & l'on aura une transformée, dont le dernier terme aura moins de diviseurs que celui de la proposée.

Il faut en chercher les racines; & quand on les aura trouvées, elles feront connoître celles de la proposée.

En substituant  $+1$  dans l'exemple proposé  $x^3 - 10xx + 19x - 24 = 0$ , à la place de  $x$ , l'on trouve  $1 - 10 + 19 - 24 = -14$ : or 14 a moins de diviseurs que 24. C'est pourquoi je suppose  $x = y + 1$ ; & substituant  $y + 1$  & ses puissances, à la place de  $x$  & de ses puissances, dans la proposée, je trouve la transformée suivante  $y^3 - 7yy + 2y - 14 = 0$ . Les diviseurs du dernier terme sont 1. 2. 7. 14. Cette transformée se divise exactement par  $y - 7 = 0$ , & le quotient est  $yy + 2 = 0$ ; ainsi  $y = 7$ , & substituant 7 à la place de  $y$ , dans  $x = y + 1$ , je trouve  $x = 8$ ; ainsi 8 est une racine positive de la proposée.

63. *Méthode pour faire distinguer parmi les diviseurs du dernier terme d'une équation, ceux qui en peuvent être les racines.*

1°. Il faut substituer successivement dans la proposée 1. 2. 3. 4, &c. à la place de l'inconnue.

2°. Il faut prendre la somme de toutes les grandeurs de l'équation, après la substitution de chacun de ces nombres, & l'on aura autant de sommes qu'on a substitué de nombres.

3°. Il faut trouver tous les diviseurs du dernier terme de la proposée, & tous les diviseurs de chacune de ces sommes.

4°. Il faut ajouter à tous les diviseurs de chaque somme, le nombre dont la substitution a donné la somme de laquelle ils sont diviseurs; & après les avoir ainsi augmentés, leur ajouter le signe  $+$ , c'est-à-dire, les regarder comme positifs.

Il faut retrancher de tous les mêmes diviseurs de chaque somme, le même nombre dont la substitution a donné la somme de laquelle ils sont les diviseurs, marquant  $+$  devant les restes de ceux qui étoient moindres que le nombre qu'on en a retranché, & le signe  $-$  devant les restes de ceux qui étoient plus grands.

5°. Il faut choisir parmi tous les diviseurs augmentés positifs de chaque somme, ceux-là seulement qui sont communs avec les diviseurs du dernier terme de la proposée; & ce seront les seuls qui pourront être les racines positives de la proposée; ainsi il faudra diviser la proposée par  $x$  moins chacun

chacun de ces diviseurs communs, & les divisions qui se feront sans reste, feront connoître les racines positives de la proposée.

On choisira de même parmi les diviseurs négatifs diminuez, ceux-là seulement qui sont communs avec les diviseurs du dernier terme de la proposée, & on divisera la proposée par  $x$  plus chacun de ces diviseurs, & lorsque la division se fera sans reste, on connoîtra les racines négatives de la proposée.

E X E M P L E

L'ÉQUATION proposée est  $x^4 - 10xx + 19x - 24 = 0$ ; on substituera 1. 2. 3. 4, &c. à la place de  $x$ , comme on le voit ici.

$$x^4 - 10xx + 19x - 24 = 0.$$

1	1	1
8	4	2
27	9	3
64	16	4

Sommes.

Substitution de 1,  $+1 - 10 + 19 - 24 = -14$

Substitution de 2,  $+8 - 40 + 38 - 24 = -18$

Substitution de 3,  $+27 - 90 + 57 - 24 = -30$

Substitution de 4,  $+64 - 160 + 76 - 24 = -44$ .

Diviseurs de 24, 1. 2. 3. 4. 6. 8. 12. 24.

Diviseurs de 14, 1. 2. 7. 14.

Diviseurs de 18, 1. 2. 3. 6. 9. 18.

Diviseurs de 30, 1. 2. 3. 5. 6. 10. 15. 30.

Diviseurs de 44, 1. 2. 4. 11. 22. 44.

Diviseurs de 14 augmentez de l'unité,  $+2, +3, +8, +15$ .

Diviseurs de 14 diminuez de 1,  $0, -1, -6, -13$ .

Diviseurs de 18 augmentez de 2,  $+3, +4, +5, +8, +11, +20$ .

Diviseurs de 18 diminuez de 2,  $+1, 0, -1, -4, -7, -16$ .

Diviseurs de 30 augmentez de 3,  $+4, +5, +6, +8, +9, +13, +18, +33$ .

Diviseurs de 30 diminuez de 3,  $+2, +1, 0, -2, -3, -7, -12, -27$ .

Diviseurs de 44 augmentez de 4,  $+5, +6, +8, +15, +26, +48$ .

Diviseurs de 44 diminuez de 4,  $+3, +2, 0, -7, -18, -40$ .

Après avoir ainsi fait les substitutions de 1, 2, 3, 4; trouvé les sommes après les substitutions, & tous les diviseurs de chaque somme, & augmenté & diminué tous les diviseurs de chaque somme, du nombre dont la substitution a fait trouver la somme, & bien distingué les positifs & les négatifs; il faut choisir parmi les positifs les seuls qui sont communs à chaque somme & aux diviseurs du dernier terme 24 de la proposée.

L'on trouve qu'il n'y a que 8 qui soit commun; ainsi l'on est réduit à diviser la proposée par  $x - 8 = 0$ , & la division étant exacte, l'on a une racine de la proposée qui est  $x = 8$ .

L'on chercheroit de même si parmi tous les diviseurs négatifs de toutes les sommes, il n'y en auroit point de commun à toutes les sommes & aux diviseurs de 24; & s'il y en avoit quelqu'un, on feroit la division de la proposée par  $x +$  ce diviseur commun; & si la division étoit juste, on auroit une racine négative: mais il n'y en a aucun dans notre exemple, qui ne peut avoir que des racines positives, tous les termes ayant alternativement  $+$  &  $-$ .

*Démonstration de cette méthode.*

CHACUNE des sommes qu'on trouve après les substitutions des nombres à la place de  $x$  dans la proposée, est le dernier terme de la transformée, dont les racines positives sont les racines positives de la proposée, diminuées du nombre dont la substitution a donné cette somme, & dont les racines négatives sont les négatives de la proposée, augmentées du nombre dont la substitution a donné la somme, & dont enfin les racines négatives moindres chacune que le nombre substitué, sont encore celles des racines positives de la proposée moindres que le même nombre, qui étant diminuées de ce même nombre plus grand qu'elles, sont devenues négatives dans la transformée; par le surplus de ce nombre sur ces racines positives. Cela est évident par le troisième & quatrième Corollaires des transformations\*, qu'il faut se rendre familiers pour bien entendre cette démonstration.

D'où il suit que les racines positives des transformées étant augmentées du nombre dont la substitution a donné leur dernier terme, sont les racines positives de la proposée; & les racines négatives des transformées étant diminuées du



même nombre , sont les racines négatives de la proposée ; enfin les racines négatives des transformées moindres que le nombre dont la substitution a donné leur dernier terme , étant retranchées de ce nombre , les quantitez de surplus sont les racines positives de la proposée qui sont moindres que ce nombre.

Mais dans le temps qu'on ignore les racines des transformées & de la proposée , on regarde tous les diviseurs des derniers termes des transformées comme leurs racines ; ainsi après les avoir augmentez du nombre qui a donné le dernier terme de chaque transformée , on peut regarder ces diviseurs ainsi augmentez , comme les racines positives de la proposée ; & après les avoir diminuez du même nombre , on les peut regarder comme les racines négatives de la proposée ; & enfin après avoir retranché du nombre qui a donné le dernier terme d'une transformée , les diviseurs moindres que ce nombre , on peut regarder les restes comme les racines positives de la proposée , qui sont moindres que ce nombre.

Cependant les transformées n'ayant pas d'autres racines que la proposée , sçavoir les positives de la proposée , diminuées du nombre qui a donné le dernier terme de la transformée , & les négatives augmentées du même nombre , il faut que ceux des diviseurs de leurs derniers termes qui sont leurs racines , étant augmentez ou diminuez du même nombre qui a donné le dernier terme de la transformée , soient égaux aux racines de la proposée ; & par conséquent ceux d'une transformée à ceux de l'autre , & que les mêmes soient égaux à ceux des diviseurs du dernier terme de la proposée qui en sont les racines.

D'où il suit que ceux qui ne sont pas communs , ne peuvent être les racines de la proposée , & qu'il n'y a que ceux qui sont communs qui puissent en être les racines. La méthode fait donc distinguer les diviseurs du dernier terme de la proposée , qui en peuvent être les racines ; ce qui étoit proposé.

*Application de la méthode précédente aux équations littérales.*

SOIT  $x^3 - 2axx + aax + aab = 0$  , dont il faut trouver  
 $- abx$

les racines par cette methode.

Il faut d'abord trouver tous les diviseurs de son dernier terme, qui sont  $1, a, b, aa, ab, aab$ .

Il n'y aura que les trois premiers qui serviront; les autres ayant deux dimensions, ne peuvent servir à former les équations simples par lesquelles il faut diviser la proposée, pour en trouver les racines.

Il faut transformer la proposée en une autre, dont les racines positives soient celles de la proposée, diminuées d'une grandeur connue, & les négatives soient les négatives de la proposée, augmentées de la même grandeur connue; c'est-à-dire, il faut trouver le seul dernier terme de cette transformée.

On prendra cette grandeur connue parmi les grandeurs connues de la proposée; on supposera, par exemple, que c'est  $2a$ .

On fera la substitution de  $2a$ , au lieu de  $x$  dans la proposée, & on trouvera que la somme des grandeurs de l'équation, après la substitution, est  $2a^3 - aab$ ; c'est-à-dire, c'est le dernier terme de la transformée.

Les diviseurs lineaires de cette somme sont  $1, a, 2a - b$ ; ceux de deux dimensions sont inutiles.

Les augmentant de  $2a$ , on aura  $+ 2a + 1, + 3a, + 4a - b$ .

Retranchant de  $2a$  les diviseurs moindres  $1$  &  $a$ , l'on aura  $+ 2a - 1, + a$ .

Les seules grandeurs positives que donne la transformée pour trouver les racines positives de la proposée, sont donc  $+ 2a + 1, + 3a, + 4a - b, + 2a - 1, + a$ .

Retranchant  $2a$  du diviseur  $2a - b$ , l'on aura  $-b$  pour la seule grandeur négative que donne la transformée, pour trouver les racines négatives de la proposée.

Or il n'y a que la grandeur  $+ a$ , parmi les positives, de commune avec le diviseur  $+ a$  du dernier terme de la proposée; ainsi il faut voir si la proposée peut être divisée par  $x - a = 0$ ; & la division se faisant sans reste,  $x - a = 0$  contient une racine de la proposée, qui est  $x = a$ ; & le quotient  $xx - ax - ab = 0$ , contient les deux autres, qui

sont  $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + ab}$ , &  $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + ab}$ .

## SECTION III.

Où l'on explique la méthode generale pour trouver par Analyse toutes les équations commensurables plus simples, dont une équation composée est le produit ; c'est-à-dire, la méthode de la réduire au moindre degré.

## D É F I N I T I O N.

**T**OUTE équation composée, qu'on suppose sans incommensurables, peut être divisée sans reste par des équations commensurables plus simples qu'elle n'est ; ou bien elle ne le peut pas.

Lorsqu'elle peut être ainsi divisée, on dit qu'elle est *réductible*, & qu'elle n'est pas du degré où elle se trouve, mais seulement des degrez plus simples, dont sont les équations plus simples, par lesquelles elle peut être exactement divisée, supposé que ces équations plus simples ne puissent pas être divisées par d'autres équations commensurables encore plus simples.

Mais lorsqu'elle ne peut être ainsi divisée sans reste par d'autres équations commensurables plus simples, on dit qu'elle est *irréductible*, & qu'elle est du degré où elle se trouve.

Ainsi une équation du cinquième degré, par exemple, qui ne peut être divisée sans reste, par aucune équation commensurable plus simple, est *irréductible*, & elle est proprement du cinquième degré.

Mais une équation du cinquième degré, qui peut être divisée sans reste par une équation irréductible du second degré, & par une équation irréductible du troisième degré, est *réductible*, & elle n'est pas proprement du cinquième degré, mais du second & du troisième degré.

## R E M A R Q U E S.

**P**OUR faire le dénombrement exact des équations commensurables plus simples, par lesquelles les équations composées réductibles de chaque degré, peuvent être divisées sans reste, on peut dire que dans chaque degré elles ne le peu-

vent être que par autant d'équations plus simples qu'on peut partager le nombre qui en exprime le degré en d'autres nombres entiers, y comprenant l'unité, qui joints ensemble, feront ce même nombre.

On peut partager le nombre 3 qui exprime le troisième degré : 1<sup>o</sup>. en 1, 1, 1 ; 2<sup>o</sup>. en 1, 2.

Ainsi les équations du troisième degré ne peuvent être réduites qu'en trois équations du premier degré, ou en deux équations, l'une du premier, & l'autre du second degré.

On peut partager le nombre 4 qui exprime le quatrième degré : 1<sup>o</sup>. en 1, 1, 1, 1 ; 2<sup>o</sup>. en 1, 1, 2 ; 3<sup>o</sup>. en 1, 3 ; 4<sup>o</sup>. en 2, 2. Ainsi les équations réduites du 4<sup>e</sup> degré ne peuvent être divisées sans reste que par quatre équations chacune du premier degré, ou par trois, dont deux soient du premier, & la troisième du second degré ; ou par deux, dont l'une soit du premier, & l'autre du troisième degré ; ou par deux, dont chacune soit du second degré.

On peut appliquer facilement ce qu'on vient de dire aux degrez plus élevez.

Lorsqu'on cherche les équations commensurables plus simples, par lesquelles une équation composée peut être exactement divisée, l'ordre naturel & la facilité de l'opération exigent qu'on commence par les plus simples ; c'est-à-dire, 1<sup>o</sup>. qu'on cherche les équations du premier degré par lesquelles elle peut être divisée ; & après en avoir trouvé une, qu'on cherche encore si le quotient peut être divisé par une équation du premier degré, en continuant ainsi jusqu'à ce qu'on trouve un quotient qui ne puisse être divisé par une équation du premier degré : 2<sup>o</sup>. si la proposée ne peut être divisée par une équation du premier degré, ou si l'on est arrivé à un quotient qui ne le puisse être, il faut chercher si elle, ou le quotient ne peuvent point être divisés par une du second degré ; & si on n'en peut trouver du second degré, il en faut chercher une du troisième ; & ainsi de suite, ne passant aux degrez plus composez, qu'après être assuré qu'on ne peut trouver d'équations plus simples, qui fassent exactement la division de la proposée.

Il faut même remarquer, qu'en cherchant ainsi les équations commensurables plus simples, qui sont des diviseurs exacts d'une proposée, il faut se borner à celle dont le

degré est la moitié du degré de la proposée, lorsque la proposée est d'un degré pair ; par exemple, si elle est du quatrième degré, il ne faut pas passer le second ; si elle est du sixième, ne pas passer le troisième, &c. & si la proposée est d'un degré impair, il faut se borner à l'équation qui est moindre d'un demi que la moitié du degré de la proposée, ainsi il faut se borner à une équation du second degré, lorsque la proposée est du cinquième degré, à une du troisième, lorsque la proposée est du septième, &c.

La raison est que, quand on aura ces équations moindres jusqu'à celle du degré, qui est la moitié de celui de la proposée, ou d'un demi moindre que la moitié de celui de la proposée, en divisant la proposée par ces équations moindres, les quotiens sont les équations plus élevées, dont la proposée est le produit ; & si l'on ne trouve aucune de ces équations moindres, on est assuré que la proposée n'est pas divisible par les équations plus élevées, puisqu'elle ne le sçauroit être par ces équations plus élevées, qu'elle ne le soit aussi par les moindres, dont le degré joint avec celui des plus élevées, feroit le degré de l'équation proposée.

D'où il suit, que si une équation du troisième degré ne se peut diviser par une du premier degré, elle est irréductible ; si une du quatrième ne peut être divisée par une du premier, & par une du second, elle est irréductible ; si une du cinquième ne le peut être par une du premier, ou par une du second, elle est irréductible, & ainsi de suite.

On a déjà donné la méthode générale pour trouver les équations commensurables du premier degré, par lesquelles une équation composée peut être exactement divisée ; ainsi on supposera dans cette section, qu'on a déjà trouvé toutes les équations simples commensurables du premier degré, par lesquelles une équation composée peut être exactement divisée, & qu'il ne s'agit plus que de trouver les autres équations commensurables du second, troisième degré, &c. par lesquelles elle peut se diviser exactement. On ne parlera point du troisième degré, puisqu'il suffit de trouver si une équation du troisième degré peut ou ne peut pas se diviser sans reste par une équation du premier degré, pour sçavoir si elle est réductible ou irréductible.

On n'appliquera aussi les méthodes qu'on va donner, qu'aux

équations du quatrième, cinquième & sixième degré, parce que dans l'usage ordinaire, on n'a pas besoin des degrez plus élevez, où les calculs sont immenses; cependant ces méthodes peuvent s'étendre à tous les degrez.

Pour mettre de l'ordre dans cette section, on expliquera, 1°. la méthode de trouver les équations commensurables du second degré, par lesquelles les équations du quatrième, cinquième & sixième degré peuvent être divisées exactement, lorsqu'il manque quelque terme dans une de ces équations du second degré, dont elles sont le produit, comme aussi la méthode de trouver les équations du second, troisième & quatrième degré, dont les équations du cinquième & sixième peuvent être le produit, lorsqu'il manque quelque terme dans celle de ces deux équations plus simples, qui est du troisième degré, ou du quatrième. 2°. La méthode de trouver les mêmes équations commensurables plus simples, par lesquelles les équations du quatrième, cinquième & sixième degré peuvent être divisées sans reste, lorsqu'il ne manque aucun terme dans ces équations plus simples.

### PROBLÈME III.

64. *TROUVER les équations commensurables du second degré, par lesquelles une équation réduite du quatrième peut être divisée sans reste, lorsque le second terme manque dans une de ces équations du second degré. Trouver l'équation du second degré, & celle du troisième ou du quatrième, par lesquelles les équations réduites du cinquième & sixième degré peuvent être divisées sans reste, lorsqu'il manque quelque terme dans l'une ou l'autre de ces équations du second & troisième, ou quatrième degré. Trouver enfin les deux équations chacune du troisième degré, par lesquelles une équation réduite du sixième degré, peut être divisée sans reste, lorsqu'il manque un ou plusieurs termes dans une de ces équations plus simples du troisième degré.*

#### M É T H O D E.

10. **P**OUR le trouver généralement, il faut supposer que toutes les équations du quatrième, cinquième & sixième degré, sont exprimées par ces formules.

$$x^4 + nx^3 + px^2 + qx + r = 0.$$

$$x^5 + nx^4 + px^3 + qxx + rx + s = 0.$$

$$x^6 + nx^5 + px^4 + qx^3 + rxx + sx + t = 0.$$

Les

Les lettres  $n, p, q$ , &c. marquent d'une manière générale les coefficients avec leurs signes; c'est-à-dire, quoique ces lettres  $n, p, q$ , &c. aient les signes  $+$ , il faut supposer que ces signes marquent ceux des termes des équations qu'expriment ces formules; & quand ils marquent des moins, il faut changer les signes dans les formules qu'on trouvera dans les résolutions devant ces lettres, aux degrés impairs; par exemple, si  $+n$  marque un coefficient négatif, on marquera dans les formules des résolutions le signe  $-$  devant  $n, n^2$ , &c. Lorsqu'il manquera quelques termes dans les équations que représentent les formules, on supposera les mêmes termes des formules égaux à zéro.

20. Il faut supposer les deux équations plus simples qu'on cherche, exprimées d'une manière indéterminée, c'est-à-dire, de manière que chacune ait la même inconnue  $x$  que la proposée, & que les coefficients de leurs termes soient marquez par des lettres indéterminées; on prendra pour ces lettres indéterminées, les lettres  $f, g, h, i, k, l, m$ , laissant les lettres  $a, b, c, d, e$ , pour marquer les grandeurs connues & déterminées; les lettres  $v, x, y, z$ , pour marquer les inconnues; & les lettres  $n, p, q, r, s, t$ , pour marquer les coefficients des formules d'une manière générale.

Ainsi pour le quatrième degré, on supposera que les équations du second degré qu'on cherche, sont  $xx + fx + g = 0$ , &  $xx + hx + i = 0$ ; pour le cinquième degré,  $xx + fx + g = 0$ , &  $x^3 + bxx + ix + k = 0$ ; pour le sixième degré,  $xx + fx + g = 0$ , &  $x^3 + bx^3 + ixx + kx + l = 0$ ; ou bien lorsque l'on cherche pour le sixième degré deux équations chacune du troisième degré, on supposera  $x^3 + fxx + gx + h = 0$ , &  $x^3 + ixx + kx + l = 0$ .

Mais parceque dans ce Problème on suppose que le second terme manque dans une des deux équations plus simples, on supposera dans le quatrième degré  $xx + fx + g = 0$ , &  $xx + i = 0$ ; pour le cinquième degré,  $xx + fx + g = 0$ , &  $x^3 + ix + k = 0$ ; pour le sixième,  $xx + fx + g = 0$ , &  $x^3 + ixx + kx + l = 0$ ; ou bien  $x^3 + gx + h = 0$ , &  $x^3 + ixx + kx + l = 0$ .

Si c'étoit quelque autre terme qui manquât dans l'une ou l'autre des deux équations plus simples de chaque degré, on:

supposeroit dans les équations indéterminées qu'on vient de former, que ces termes sont évanouis.

3°. Il faut multiplier les deux équations indéterminées qui sont pour chaque degré, l'une par l'autre, & leur produit sera une équation indéterminée du même degré que la proposée.

On supposera chaque terme de cette équation indéterminée (excepté le premier) égal à celui qui lui répond dans la formule; c'est-à-dire, le second terme de l'indéterminée égal au second terme de la proposée, le troisième égal au troisième, &c. ce qui donnera autant d'équations particulières qu'on a supposé de lettres indéterminées.

4°. On regardera toutes ces équations particulières comme les équations du Problème, qu'il faut réduire à une seule, dont l'inconnue soit la lettre indéterminée de celle des deux équations indéterminées plus simples, qui n'a que les seuls premier & dernier termes, ou dont l'inconnue soit la lettre indéterminée qui marque le coefficient du second terme de la plus simple des deux équations indéterminées, ou si le second terme en est évanoui, la lettre indéterminée qui marque le coefficient du troisième terme de la même équation; c'est-à-dire, on dégagera toutes les déterminées comme étant des inconnues, observant de ne pas dégager l'indéterminée, qui doit servir d'inconnue à l'équation du Problème.

Cette équation qui a pour inconnue une des lettres indéterminées des équations indéterminées, s'appelle la *Réduite*.

5°. On cherchera la valeur commensurable de l'indéterminée de la réduite par la méthode générale, ou lorsque la réduite n'est que du second degré, par la méthode qu'on a donnée pour le second degré.

Ou bien on trouvera une seconde réduite qui ait pour inconnue la même indéterminée, & on cherchera le diviseur commun des deux réduites, & ensuite la valeur de l'inconnue du diviseur commun.

La valeur de l'indéterminée de la réduite étant connue, en la substituant dans les équations particulières, on déterminera tous les coefficients indéterminés, & par conséquent on aura les deux équations qu'on cherche.

Ou bien on substituera la valeur de l'indéterminée de la réduite dans la plus simple des deux équations indétermi-



nées qu'on a supposées, & l'on aura après les substitutions, les formules qui marquent une des équations plus simples, par lesquelles la proposée peut se diviser exactement, si elle n'est pas irréductible, ou bien on aura les formules des deux équations plus simples, si on a fait toutes les substitutions. On s'en servira ensuite pour réduire une équation composée aux plus simples dont elle est composée.

Tout ceci s'éclaircira par les applications qu'on en va faire aux équations du quatrième, cinquième & sixième degré.

*Application de la méthode aux équations du quatrième degré.*

**P**OUR trouver les équations continentes du second degré, par lesquelles une équation réductible du quatrième degré peut se diviser sans reste, dans les cas où le second terme manque dans l'une des deux équations du second degré qui en sont les diviseurs.

1<sup>o</sup>. On supposera la formule du quatrième degré  $x^4 + nx^3 + pxx + qx + r = 0$ .

2<sup>o</sup>. On supposera les deux équations indéterminées du second degré  $xx + fx + g = 0$ ,  $xx + i = 0$ , dans lesquelles  $f, g, i$ , sont des indéterminées, & le second terme est évanoui dans la seconde  $xx + i = 0$ .

3<sup>o</sup>. On prendra le produit de ces deux équations du second degré, & l'on aura l'équation indéterminée du quatrième degré  $x^4 + fx^3 + gxx + fix + gi = 0$ .

$$+ ixx$$

On comparera les termes de cette équation (excepté le premier) avec ceux de la formule, qui leur répondent; c'est-à-dire, on les supposera égaux; ce qui donnera ces quatre équations, 1<sup>re</sup>,  $f = n$ ; 2<sup>e</sup>,  $g + i = p$ ; 3<sup>e</sup>,  $fi = q$ ; 4<sup>e</sup>,  $gi = r$ .

4<sup>o</sup>. On regardera ces quatre équations particulières comme les équations du Problème; les indéterminées  $f, g, i$ , seront considérées comme des inconnues qu'il faut dégager, & il faut réduire ces équations à une seule équation qui ait pour inconnue l'indéterminée  $i$  de l'équation  $xx + i = 0$ .

La première équation  $f = n$ , détermine déjà la valeur de  $f$ ; & la substituant dans la troisième  $fi = q$ , l'on aura  $ni = q$ ; & divisant chaque membre par  $n$ , l'on aura  $i = \frac{q}{n}$ .

Cette égalité rendant  $i$  déterminée, l'équation indéterminée  $xx + i = 0$ , devient déterminée, & l'on a  $xx + \frac{q}{n}$

$= 0$ , pour l'une des deux équations du second degré, par lesquelles une équation du quatrième degré peut se diviser exactement, lorsqu'elle est le produit de deux équations du second degré, dans l'une desquelles le second terme est évanoui.

On peut déterminer l'autre équation indéterminée  $xx + fx + g = 0$ , en substituant la valeur de  $i$ , qui est  $\frac{p}{2}$ , dans la seconde équation  $g + i = p$ , ou dans la quatrième  $gi = r$ ; car la seconde donnera, après la substitution,  $g = p - \frac{p}{2}$ , & la quatrième  $g = \frac{r}{\frac{p}{2}}$ ; ainsi l'équation indéterminée  $xx + fx + g = 0$ , se changera en l'équation déterminée  $xx + nx + p - \frac{r}{\frac{p}{2}} = 0$ , ou bien en  $xx + nx + \frac{2r}{p} = 0$ .

On peut encore trouver une autre équation pour déterminer la lettre indéterminée  $i$ ; car en prenant les valeurs de  $g$  dans la seconde & dans la quatrième équation particulière  $g + i = p$ , &  $gi = r$ , l'on aura  $g = p - i$ ,  $g = \frac{r}{i}$ ; par conséquent  $p - i = \frac{r}{i}$ ; & multipliant par  $i$ , l'on aura l'équation du second degré  $ii - pi + r = 0$ , qui est celle qu'on a nommée la réduite; & la résolvant, on trouvera  $i = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - r}$ .

*Application des formules qu'on vient de trouver, à une équation particulière du quatrième degré.*

**S**OIT l'équation du quatrième degré  $x^4 + 3ax^3 + abxx - aaax - 3a^2x - a^3b = 0$ . Il s'agit de trouver si elle n'est point réductible en deux équations du second degré, dans l'une desquelles le second terme soit évanoui.

1°. Afin que la formule du quatrième degré  $x^4 + nx^3 + pxx + qx + r = 0$ , représente cette équation, il faut supposer  $+n = +3a$ ;  $+p = ab - aa$ ;  $+q = -3a^2$ ;  $+r = -a^3b$ .

2°. Il faut mettre dans la formule  $xx + \frac{r}{n} = 0$ , la grandeur représentée par  $+\frac{r}{n}$ , qui est  $-3a^2$  divisée par  $+3a = -aa$ ; & l'on aura au lieu de  $xx + \frac{r}{n} = 0$ , l'équation  $xx - aa = 0$ .

3°. Il faut diviser la proposée par  $xx - aa = 0$ , & l'on trouve que la division se fait sans reste, & que le quotient exact est  $xx + 3ax + ab = 0$ .

Ainsi la proposée n'est pas du quatrième degré, mais elle se réduit aux deux équations du second degré  $xx - aa = 0$ ,  $xx + 3ax + ab = 0$ .

On trouveroit aussi l'équation  $xx + 3ax + ab = 0$ , en mettant dans la formule  $xx + nx + p - \frac{r}{n} = 0$ , les grandeurs représentées par  $n, p, \frac{r}{n}$ .

*Application de la méthode du troisième Problème aux équations du cinquième degré.*

**P**OUR trouver les équations commensurables du second & du troisième degré, par lesquelles une équation réductible du cinquième degré peut se diviser sans reste, supposé que le second terme manque dans l'équation du second degré.

1°. Après avoir supposé la formule du cinquième degré  $x^5 + nx^4 + px^3 + qxx + rx + s = 0$ , on supposera 2°. les deux équations indéterminées  $xx + g = 0$ ,  $x^3 + hxx + ix + k = 0$ ; dans lesquelles  $g, h, i, k$ , sont indéterminées, & le second terme est évanoui dans  $xx + g = 0$ .

3°. On en prendra le produit  $x^5 + hxx^3 + ix^3 + kxx + gix + gx^3 + ghxx + gk = 0$ ; & comparant les termes de cette équation avec ceux de la formule, on aura les cinq équations particulières qui suivent. 1°.  $h = n$ ; 2°.  $i + g = p$ ; 3°.  $k + gh = q$ ; 4°.  $gi = r$ ; 5°.  $gk = s$ .

4°. Regardant ces équations comme celles du Problème, on les réduira à une seule, qui n'aura pour inconnue que la lettre indéterminée  $g$ .

On trouve d'abord que l'indéterminée  $h$  est égale à  $n$ ; & prenant dans la seconde & la quatrième la valeur de  $i$ , & comparant ces valeurs de  $i$ , l'on trouve la réduite qu'on cherche,  $i = p - g = \frac{r}{g}$ ; donc  $gg - pg + r = 0$ .

Résolvant cette réduite, on trouve  $g = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - r}$ ; par conséquent  $xx + g = 0$ , se change en  $xx + \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - r} = 0$ .

On peut trouver une autre réduite en comparant les valeurs de  $k$  prises dans la troisième & la cinquième équation; car l'on aura  $k = q - ng = \frac{s}{g}$ ; donc  $ngg - qg + s = 0$ , ou bien  $gg - \frac{q}{n}g + \frac{s}{n} = 0$ ; & résolvant cette équation, on trouve  $g = \frac{1}{2n} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4n^2} - \frac{s}{n}}$ ; par conséquent  $xx + g = 0$ , se change en  $xx + \frac{1}{2n} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4n^2} - \frac{s}{n}} = 0$ .

On peut, si l'on veut, par les substitutions déterminer l'équation  $x^5 + bxx + ix + k = 0$ ; mais cela est assez inutile, car quand on voudra voir si une équation particulière du cinquième degré se peut diviser sans reste par une plus simple du second degré, dans laquelle le second terme soit évanoui, & par une du troisième degré, il suffira de substituer dans la formule  $xx + \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - r} = 0$ , ou dans  $xx + \frac{q}{2n} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4n^2} - \frac{r}{n}} = 0$ , les grandeurs représentées par  $n, p, q, r, s$ , & diviser ensuite l'équation proposée par cette équation du second degré qu'on vient de trouver, car si la proposée se peut diviser sans reste par cette équation du second degré, le quotient sera l'équation du troisième degré, dont la proposée est composée, & si elle ne peut se diviser sans reste par cette équation du second degré, la proposée ne sauraît être réduite en deux équations dont l'une soit du second degré, où le second terme est évanoui, & l'autre du troisième degré.

*Application de la méthode du troisième Problème aux équations du sixième degré.*

LORSQU'UNE équation du sixième degré dont la formule générale est  $x^6 + nx^5 + px^4 + qx^3 + rxx + sx + t = 0$ , peut être exactement divisée par une équation du second degré dont le second terme est évanoui, & par une du 4<sup>e</sup> degré, qui a tous ses termes; on supposera 1<sup>o</sup>. pour les trouver, les deux équations indéterminées  $xx + g = 0$ , &  $x^4 + bx^3 + ixx + kx + l = 0$ , & après en avoir trouvé le produit  $x^6 + bx^5 + ix^4 + kx^3 + lxx + gkx + gl = 0$ , on comparera

$$+ gx^4 + ghx^3 + gixx$$

les termes de ce produit avec ceux de la formule générale qui leur répondent; ce qui donnera les six équations particulières suivantes.

$$1^e, b = n; \quad 2^e, i + g = p; \quad 3^e, k + gh = q; \quad 4^e, l + gi = r; \\ 5^e, gk = s; \quad 6^e, gl = t.$$

2<sup>o</sup>. Regardant ces équations comme celles du Problème, on cherchera la réduite, qui n'ait pour inconnue que la lettre indéterminée  $g$ .

On la trouvera en comparant les deux valeurs de  $k$  prises dans la troisième & la cinquième; car on aura  $k = q - ng = \frac{s}{g}$ ; d'où l'on déduira  $ngg - qg + s = 0$ , ou bien  $gg - \frac{s}{n}g$

$+ \frac{1}{n} = 0$ , qui étant résolue, donnera  $g = \frac{q}{2n} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4n^2} - \frac{1}{n}}$ ; substituant cette valeur de  $g$  dans  $xx + g = 0$ , elle sera changée en  $xx + \frac{q}{2n} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4n^2} - \frac{1}{n}} = 0$ , qui est la formule dont on a besoin.

Car quand on aura une équation particulière du sixième degré, pour voir si elle peut être divisée par une du second, où le second terme manque, & par une du quatrième qui ait tous ses termes, on substituera dans la formule  $xx + \frac{q}{2n} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4n^2} - \frac{1}{n}} = 0$ , les grandeurs représentées par les lettres  $n, q, s$ ; & on divisera ensuite la proposée par l'équation qu'on trouvera; & si la division est exacte, on aura ce qu'on cherche.

*Autre application de la méthode du troisième Problème  
aux équations du cinquième degré.*

QUAND une équation du cinquième degré, dont la formule générale est  $x^5 + nx^4 + px^3 + qxx + rx + s = 0$ , se peut diviser exactement par une équation du second degré qui a tous ses termes, & par une autre du troisième degré, dont le second terme est évanoui; on supposera pour les trouver, 1<sup>o</sup>. ces deux équations indéterminées  $xx + fx + g = 0$ ,  $x^3 + ix^2 + k = 0$ ; & après avoir trouvé leur produit  $x^5 + fx^4 + ix^3 + kxx + f kx + gk = 0$ , on comparera les

$+ gx^3 + fixx + gix$   
termes de ce produit avec ceux de la formule générale qui leur répondent, ce qui donnera les cinq équations particulières suivantes; 1<sup>re</sup>,  $f = n$ ; 2<sup>e</sup>,  $i + g = p$ ; 3<sup>e</sup>,  $k + fi = q$ ; 4<sup>e</sup>,  $fk + gi = r$ ; 5<sup>e</sup>,  $gk = s$ .

2<sup>o</sup>. On cherchera par ces équations une réduite qui n'ait pour inconnue que l'indéterminée  $g$ , & on la trouvera en prenant la valeur de  $i$  dans la 2<sup>e</sup>, qui est  $i = p - g$ ; & substituant cette valeur de  $i$  dans la 3<sup>e</sup>, on aura une valeur de  $k = q - np + ng$ ; enfin comparant cette valeur de  $k$  avec une autre valeur de  $k$  prise dans la 5<sup>e</sup>, qui est  $k = \frac{s}{g}$ , l'on aura la réduite  $q - np + ng = \frac{s}{g}$ , qui se réduit à  $ngg - npg + sg$

$- s = 0$ , ou bien  $gg - pg - \frac{s}{n} = 0$ , laquelle étant résolue,

lue, l'on aura  $g = \frac{1}{2}p - \frac{q}{2n} \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - \frac{q^2}{n} + \frac{s}{n}}$ .

Substituant les valeurs de  $f = n$  & de  $g$  dans  $xx + fx + g = 0$ ,

l'on aura  $xx + nx + \frac{1}{2}p - \frac{q}{2n} \pm \sqrt{\frac{1}{2}p - \frac{q}{2n} + \frac{r}{n}} = 0$ , qui est la formule dont on a besoin.

On peut encore trouver une seconde réduite qui n'ait d'inconnue que l'indéterminée  $g$ , en prenant les valeurs de  $k$  dans la troisième & la quatrième équation; car l'on aura  $k = q - ni = \frac{q - ni}{n}$ ; & mettant dans cette équation la valeur de  $i$  prise dans la seconde, qui est  $i = p - g$ , l'on aura  $q - np + ng = \frac{q - p(g + ng)}{n}$ , qui se réduit à  $gg - pg + r = 0$ :  
 $-ng + np$   
 $-ng$

Cette équation étant résolue, on aura  $g = \frac{1}{2}p + \frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{2}p + \frac{r}{2} - r - np + ng}$ .

Substituant les valeurs de  $f$  & de  $g$  dans  $xx + fx + g = 0$ , on aura  $xx + nx + \frac{1}{2}p + \frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{2}p + \frac{r}{2} - r - np + ng} = 0$ , qui est une seconde formule pour la résolution.

*Application de ces formules à une équation particulière du cinquième degré.*

**S**OIT une équation du 5<sup>e</sup> degré  $x^5 + ax^4 - aax^3 + aabxx + abx^3 - a^1xx + a^3bb = 0$ ; il faut voir si elle ne peut point se réduire à deux équations plus simples, l'une du second degré, & l'autre du troisième dont le second terme soit évanoui, qui en soient des diviseurs.

1<sup>o</sup>. Pour la rapporter à la formule générale, il faut supposer  $+n = +a$ ,  $+p = -aa + ab$ ,  $+q = +aab - a^3$ ,  $+r = 0$ ,  $+s = +a^3bb$ .

2<sup>o</sup>. Il faut substituer dans la formule  $xx + nx + \frac{1}{2}p - \frac{q}{2n} \pm \sqrt{\frac{1}{2}p - \frac{q}{2n} + \frac{r}{n}} = 0$ , les valeurs des lettres  $n$ ,  $p$ , &c. & l'on trouve que  $\frac{1}{2}p - \frac{q}{2n} = -\frac{aa+ab}{2} - \frac{ab+aa}{2} = 0$ ; ainsi le carré  $\frac{1}{2}p - \frac{q}{2n} = 0$ ; mais  $\sqrt{+\frac{r}{n}} = \sqrt{+aabb} = ab$ , ainsi la formule se change en  $xx + ax + ab = 0$ .

Divisant la proposée par  $xx + ax + ab = 0$ , on trouve le quotient exact  $x^3 - aax + aab = 0$ . Ce qui étoit proposé.

On trouveroit la même équation  $xx + ax + ab = 0$ , en se servant de la seconde formule  $xx + nx + \frac{1}{2}p + \frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{2}p + \frac{r}{2} - r - np + ng} = 0$ .

*Autre*

*Autre application de la méthode du troisième Problème  
aux équations du sixième degré.*

LORSQU'UNE équation du sixième degré, représentée par la formule générale  $x^6 + nx^5 + px^4 + qx^3 + rxx + sx + t = 0$ , est le produit d'une équation du second degré qui a tous ses termes, & d'une autre du quatrième, dont le second terme est évanoui, pour trouver les formules propres à la réduire à ces deux équations plus simples :

1°. Après avoir supposé ces deux équations indéterminées  $xx + fx + g = 0$ ,  $x^4 + ixx + kx + l = 0$ , & pris leur produit  $x^6 + fx^5 + gx^4 + kx^3 + lxx + gkx + gl = 0$ , on com-  
 $+ ix^4 + fix^3 + gixx + flx$   
 $+ f k x x$

parera les termes de ce produit avec ceux de la formule générale qui leur répondent ; & l'on trouvera les six équations particulières qui suivent : 1<sup>re</sup>,  $f = n$  ; 2<sup>e</sup>,  $g + i = p$  ; 3<sup>e</sup>,  $k + fi = q$  ; 4<sup>e</sup>,  $l + gi + fk = r$  ; 5<sup>e</sup>,  $gk + fl = s$  ; 6<sup>e</sup>,  $gl = t$ .

2°. Considérant ces six équations comme celles du Problème, on cherchera en dégageant les indéterminées comme si c'étoit des inconnues, une réduite dont l'inconnue soit l'indéterminée  $g$  ; & l'on trouvera par la 2<sup>e</sup>,  $i = p - g$ , par la 3<sup>e</sup>,  $k = q - fi = q - np + ng$ , par la 4<sup>e</sup>,  $l = r - gp + gg - nq + np - nng$  ; par la 5<sup>e</sup>,  $l = \frac{-rs + nps - nsg}{n}$ .

Comparant ces deux valeurs de  $l$ , on aura la réduite qu'on cherche, qui étant ordonnée, est  $2ngg - 2npg + n^2p = 0$  ;

$$\begin{array}{r} + qg - nnq \\ - n^2g + nr \\ - s \end{array}$$

ou bien divisant le tout par  $2n$ ,  $gg - \frac{2pg + \frac{1}{2}g - nng}{2} + \frac{np - nq + r - \frac{1}{2}}{2} = 0$ .

On peut encore trouver une seconde réduite du second degré dont  $g$  soit l'inconnue ; 1°. en comparant les valeurs de  $l$  prises dans la cinquième & sixième équation ; car l'on aura  $l = \frac{-rs + nps - nsg}{n} = \frac{r}{n}$ , qui se réduit à  $ngg - npg - s + qg + \frac{n^2}{2} = 0$  ; d'où l'on déduira  $gg = pg + \frac{s}{n}$ . L'on a déjà par la  
 $- \frac{1}{2}g - \frac{r}{n}$

$$\text{premiere réduite } gg = \frac{2pg - \frac{1}{n}g + nng}{2} - \frac{np + nq - r + \frac{1}{n}}{2}$$

$$\text{par consequent } pg + \frac{1}{n} = \frac{2pg - \frac{1}{n}g + nng - np + nq - r + \frac{1}{n}}{2} - \frac{\frac{1}{n}g - \frac{1}{n}}{2}$$

ôtant les fractions, ordonnant cette équation, & faisant en sorte que le premier terme n'ait pour coëfficient que l'unité,

$$\text{on aura la seconde réduite } gg - \frac{npq + nqg - rg - \frac{1}{n}g}{nn + \frac{1}{n}}$$

$$+ \frac{2r}{nn + \frac{1}{n}} = 0.$$

Quand on voudra examiner si une équation particuliere du sixième degré est le produit de deux équations commensurables plus simples, dont l'une est du second degré avec tous ses termes, & l'autre du quatrième, dont le second terme est évanoui, il faudra, après avoir substitué dans laquelle on voudra des deux réduites précédentes, les grandeurs de l'équation proposée, représentées par les lettres  $n, p, q$ , &c. trouver la valeur de l'indéterminée  $g$ , & substituer ensuite cette valeur, & celle de  $f$ , dans  $xx + fx + g = 0$ , & diviser la proposée par l'équation réelle dans laquelle  $xx + fx + g = 0$  aura été changée; & si la division se fait exactement, on aura les deux équations plus simples du second & du quatrième degré, auxquelles la proposée peut être réduite.

Ou bien, si l'on veut, on pourra substituer les grandeurs de la proposée, représentées par  $n, p, q$ , &c. dans les deux réduites, & trouver ensuite le plus grand diviseur commun des deux réduites après la substitution; ce plus grand diviseur commun fera trouver facilement la valeur de  $g$ ; après quoi on la substituera avec la valeur de  $f$  dans  $xx + fx + g = 0$ , & on divisera la proposée par l'équation du second degré qui en naîtra.

*Autre application de la méthode du troisième Problème  
aux équations du sixième degré.*

QUAND une équation du sixième degré, représentée par la formule generale  $x^6 + nx^5 + px^4 + qx^3 + rxx + sx + t = 0$ , est le produit de deux équations plus simples chacune du troisième degré, dans l'une desquelles le second terme est évanoui; pour trouver les formules ou les réduites propres à trouver ces deux équations plus simples.



1<sup>o</sup>. Après avoir supposé les deux équations indéterminées  
 $x^2 + gx + h = 0$ ,  $x^3 + ix + kx + l = 0$ , & pris leur pro-  
 duit  $x^5 + ix^4 + gx^4 + hx^3 + hixx + hix + hl = 0$ , on com-  
 $+ kx^4 + lx^3 + gkxx + glx$   
 $+ gix^3$

parera les termes de ce produit avec ceux de la formule  
 générale; ce qui donnera les six équations particulières qui  
 suivent: 1<sup>re</sup>,  $i = n$ ; 2<sup>e</sup>,  $g + k = p$ ; 3<sup>e</sup>,  $h + l + gi = q$ ; 4<sup>e</sup>,  $h^2$   
 $+ gk = r$ ; 5<sup>e</sup>,  $hk + gl = s$ ; 6<sup>e</sup>,  $hl = t$ .

2<sup>o</sup>. Pour trouver la réduite dont  $g$  soit l'inconnue, on aura  
 par la 2<sup>e</sup>  $k = p - g$ ; par la 3<sup>e</sup>,  $l = q - h - ng$ ; par la 4<sup>e</sup>,  
 $k = \frac{r - h^2}{g}$ ; par la 5<sup>e</sup>,  $l = \frac{s - hp + hg}{g}$ .

Comparant les deux valeurs de  $k$ , l'on aura  $p - g = \frac{r - h^2}{g}$   
 d'où l'on déduit  $h = \frac{gs - ps + r}{n}$ . Il faut remarquer cette va-  
 leur de  $h$ .

Comparant ensuite les deux valeurs de  $l$ , on aura  $q - h$   
 $- ng = \frac{s - hp + hg}{g}$ , qui se réduit à  $-nng + qg - s = 2hg$   
 $- hp$ ; d'où l'on déduit  $h = \frac{-nng + qg - s}{2g - p}$ .

Comparant ensemble les deux valeurs de  $h$ , on trouvera  
 $\frac{gs - ps + r}{n} = \frac{-nng + qg - s}{2g - p}$ , qui se réduit à  $2g^3 + nngg - nqg + ns$   
 $- 3pgg + 2rg - pr$   
 $+ ppg$

$= 0$ , qui est la réduite qu'on cherche.

Pour trouver une seconde réduite dont  $g$  soit l'incon-  
 nue, on comparera ensemble la valeur de  $h = \frac{gs - ps + r}{n}$ ,  
 déjà trouvée, avec la valeur de  $h$  prise dans la sixième équation,  
 qui est  $h = \frac{r}{g}$ , après avoir mis dans  $h = \frac{r}{g}$  la valeur de  
 $l = q - h - ng = \frac{-gs + ps - r}{n} - ng + q = \frac{-gs + ps - nng - r + nq}{n}$ ,  
 & l'on aura  $\frac{gs - ps + r}{n} = \frac{-gs + ps - nng - r + nq}{n}$ ; après en avoir ôté  
 les fractions, on aura  $-g^4 - 2pg^3 - nppg + nng - nqr = 0$ .

$$\begin{aligned} &+ nng^3 + ppgg - 2prg + pr \\ &- nqgg + npqg + nns \\ &+ 2rgg \end{aligned}$$

qui est une seconde réduite, qu'on abaissera au second degré  
 en prenant dans la réduite précédente la valeur de  $g^4$  & de  $g^3$ ,  
 & les substituant dans cette équation. L'opération se fait de  
 la manière suivante.

Il faut multiplier la 2<sup>e</sup>  $-g^4 - 4pg^3 - 2nppg + 2nng - 2nqr = 0$   
 seconde réduite par 2,  $+ 2nng^3 + 2ppgg - 4prg + 2pr$   
 & l'on aura  $- 2nqgg + 2npqg + 2nns$   
 $+ 4rgg$

Il faut multiplier la première réduite par  $g$ , & l'on aura

$$2g^4 = -nng^3 + nqgg - nsg \\ + 3pg^3 - 2rpg + prg \\ - ppeg$$

& substituer dans la seconde la valeur de  $2g^4$ , & l'on aura

$$-pg^3 - 2nnppeg + 2nnrg - 2nqr = 0 \\ + nng^3 + ppeg - 3prg + 2rr \\ - nqgg + 2npqg + 2nnr \\ + 2rpg - nsg$$

Il faut substituer la valeur de  $g^3$ , prise de la première réduite, dans cette équation. Pour cela il faut multiplier cette équation par 2, & l'on aura

$$-2pg^3 - 4nnppeg + 4nnrg - 4nqr = 0 \\ + 2nng^3 + 2ppeg - 6prg + 4rr \\ - 2nqgg + 4npqg + 4nnr \\ + 4rpg - 2nsg$$

& substituer la valeur de  $-2pg^3 + 2nng^3$ , que l'on voit ici, (qui est prise de la première réduite multipliée par  $-p + nn$ ) dans l'équation précédente; & on trouvera enfin cette seconde réduite du 2<sup>e</sup> degré,

$$\left. \begin{array}{l} -2pg^3 \\ + 2nng^3 \end{array} \right\} = \begin{array}{l} + nnppeg - npqg + nps \\ - n^2gg + n^2qg - n^2s \\ - 3ppeg + 2prg - ppr \\ + 3nnppeg - 2nnrg + nnpr \\ + p^2g \\ - nnppeg \end{array}$$

$$-ppeg - 4prg + 4rr = 0 \\ - n^2gg + 3npqg + 4nnr \\ + 4rpg + 2nnrg + 4nqr \\ - 2nqgg - 2nsg - ppr \\ + p^2g + nps \\ + n^2qg - nnpr \\ - nnppeg - n^2s$$

ou bien en changeant tous les signes, on aura cette seconde réduite du 2<sup>e</sup> degré.

$$+ ppeg + 4prg - 4rr = 0 \\ + n^2gg - 3npqg - 4nnr \\ - 4rpg - 2nnrg - 4nqr \\ + 2nqgg + 2nsg + ppr \\ - p^2g - nps \\ - n^2qg - nnpr \\ + nnppeg + n^2s$$

Quand on voudra voir si une équation particulière du sixième degré est le produit de deux plus simples commensurables chacune du troisième degré, dont l'une des deux n'ait pas son second terme, 1<sup>o</sup>. il faudra substituer les grandeurs de l'équation représentées par  $n$ ,  $p$ ,  $q$ , &c. dans ces deux réduites; trouver leur plus grand commun diviseur; & par le plus grand diviseur commun, trouver la valeur de  $g$ ; ou bien la trouver seulement en résolvant la seconde réduite du second degré.

2<sup>o</sup>. Il faudra substituer la valeur de  $g$  qu'on vient de trouver, dans l'équation  $h = \frac{gg - ps + r}{s}$ , ce qui donnera la valeur de  $h$ .

3°. Il faudra substituer les valeurs de  $g$  & de  $h$  dans  $x' + gx + h = 0$ , & diviser la proposée par l'équation qui naîtra de la substitution, & si la division est exacte, on aura les deux équations, dont la proposée est le produit.

## A V E R T I S S E M E N T.

**L**ES applications qu'on vient de faire de la méthode du troisième Problème suffisent pour la faire concevoir, & pour apprendre à trouver soi-même les formules des résolutions de tous les cas où il manque un ou plusieurs termes dans les équations simples, dont la composée est le produit; on les peut voir dans l'onzième règle de Mr Hudde dans la lettre de la réduction des équations, qui est à la fin du premier Volume de la Geometrie de Mr Descartes.

*Démonstration du troisième Problème.*

**L**ES deux équations indéterminées qu'on suppose, comme dans le premier exemple  $xx + fx + g = 0$ ,  $xx + i = 0$ , représentent par leurs coefficients indéterminez  $f$ ,  $g$ ,  $i$ , les deux équations réelles plus simples, dont la proposée, qui est représentée par la formule générale  $x^4 + nx^3 + pxx + qx + r = 0$ , est le produit; par conséquent le produit de ces deux équations indéterminées, qui est  $x^4 + fx^3 + gxx + fix + ixx$

+  $gi = 0$ , représente l'équation proposée, & n'est qu'une même équation, que quelques-uns appellent *identique*; ainsi l'une est égale à l'autre, & l'on a l'équation  $x^4 + fx^3 + gxx + fix + gi = x^4 + nx^3 + pxx + qx + r$ ; ou +  $ixx$

bien  $x^4 + fx^3 + gxx + fix + gi = 0$ .

+  $ixx$

—  $x^4$  —  $nx^3$  —  $pxx$  —  $qx$  —  $r$

Les termes de l'une sont égaux aux termes correspondans de l'autre, ou (si l'on veut) chaque terme de l'une moins le terme correspondant de l'autre, est égal à zero; l'on a donc autant d'équations particulières pour déterminer les indéterminées, qui peuvent être regardées comme les inconnues du Problème, qu'on a supposé d'indéterminées; ainsi on les peut toutes déterminer.

Or il est évident qu'après qu'on aura trouvé les valeurs

réelles des indéterminées, si on substitue ces valeurs à leur place dans les deux équations indéterminées  $xx + fx + g = 0$ ,  $xx + i = 0$ , ces deux équations étant devenues réelles, de feintes qu'elles étoient, leur produit fera précisément la proposée : car les valeurs réelles des indéterminées n'ont été trouvées qu'en vertu de cette supposition. Elles sont donc, étant devenues réelles, les deux équations plus simples qu'on cherchoit, par lesquelles la proposée peut être exactement divisée.

La méthode du troisième Problème fait donc trouver ce qui étoit proposé.

*Remarques sur la méthode qui emploie dans les équations outre les inconnues, des grandeurs indéterminées.*

65. LA méthode de se servir d'équations qui contiennent des grandeurs indéterminées, est un des principes les plus féconds de l'Analyse pour faire des découvertes, c'est-à-dire, pour résoudre les Problèmes les plus composés. Cette méthode consiste à représenter par des grandeurs indéterminées les grandeurs véritables que l'on cherche ; à supposer que cette expression indéterminée est égale à l'expression de ces mêmes grandeurs que l'on a trouvée par le Problème qu'on veut résoudre, c'est-à-dire, que cette expression indéterminée est égale à l'équation qui exprime ce Problème, & à supposer aussi que chacun des termes de l'expression indéterminée est égal au terme correspondant de l'équation qu'on veut résoudre ; à trouver par le moyen des équations particulières que fournit cette supposition, les valeurs des indéterminées que l'on a supposées ; enfin à substituer ces valeurs à la place des indéterminées dans l'expression indéterminée qui représente les grandeurs véritables que l'on cherche, qui par ces substitutions devient la véritable expression de ces grandeurs. Comme on se servira beaucoup de cette méthode dans le reste de ce Traité, il est bon de faire ici quelques remarques qui serviront à la faire mieux concevoir, & à en rendre l'usage plus facile.

1°. Pour former ces équations feintes ou indéterminées, qui deviennent ensuite réelles, il faut que les grandeurs indéterminées qu'on y emploie, expriment les rapports de celles qu'on cherche par leur moyen : par exemple, quand on

veut chercher les équations plus simples auxquelles une équation composée réductible peut être réduite, lorsqu'il manque quelque terme dans quelque'une de ces équations plus simples, on doit aussi supposer qu'il est évanoui dans les équations indéterminées ; les coefficients de ces équations indéterminées doivent représenter les coefficients connus des équations réelles qu'elles représentent ; c'est pourquoi il doit y avoir une indéterminée pour chacun, afin qu'en déterminant chaque indéterminée, on puisse trouver chacun de ces coefficients ; lorsque quelque'une des équations plus simples auxquelles une équation composée peut être réduite, renferme des racines égales, il faut ne mettre qu'une même indéterminée pour chacune des racines égales ; & ainsi de tous les autres rapports possibles qu'il faut représenter par les indéterminées.

2°. Il ne faut employer dans les équations indéterminées, qu'autant de lettres indéterminées, qu'on peut faire d'équations particulières, parcequ'autrement on ne pourroit pas les dégager toutes, c'est-à-dire, trouver la valeur de toutes.

3°. On doit faire en sorte que toutes les équations particulières qui servent à trouver les valeurs des indéterminées, & les réduites qui en naissent, ne soient pas aussi difficiles ou plus difficiles à résoudre, que les équations mêmes dont on cherche la résolution par ces équations indéterminées, puisqu'autrement cette voye seroit inutile.

Ainsi il faut que ces équations soient ou lineaires, ou du second degré, ou du moins d'un degré inférieur à celui de l'équation qu'on veut résoudre par cette voye : où s'il arrivoit que ces équations particulières, ou les réduites, fussent d'un degré égal à celui de l'équation qu'on veut résoudre, ou même plus élevé, il faudroit que la valeur de l'indéterminée qui sert d'inconnue à ces réduites, se pût trouver en divisant la réduite par une équation lineaire de l'inconnue de la réduite plus ou moins un diviseur de son dernier terme, ou qu'elle pût se trouver par une équation du second degré : car alors, quoique la réduite fût d'un degré plus élevé que l'équation qu'on veut résoudre, la résolution en seroit plus facile.

4°. Lorsque pour la résolution d'un Problème ou d'une équation composée, par exemple du cinquième degré, on

n'a besoin que d'une équation d'un degré inférieur, par exemple du second degré; on supposera une équation indéterminée ou feinte du second degré, qui représentera par le moyen des indéterminées l'équation du second degré dont on a besoin, & ensuite on la multipliera par une équation indéterminée du degré, qui étant joint avec celui du second, fait le degré de la proposée; dans le cinquième degré, il faudra multiplier l'équation du second par une du troisième, laquelle équation du troisième degré ait une indéterminée dans chacun de ses termes, excepté le premier; il faudra ensuite comparer les termes de l'équation indéterminée qui naîtra de cette multiplication, avec ceux de la proposée qui leur répondent, & l'on aura autant d'équations particulières que l'on a supposé d'indéterminées, & l'on pourra en trouver les valeurs. Ou bien au lieu d'élever l'équation indéterminée du degré inférieur à celui de la proposée, en la multipliant par une autre équation indéterminée, on pourra diviser la proposée par l'équation indéterminée du degré inférieur à celui de la proposée, jusqu'à ce qu'on soit arrivé à un reste où l'inconnue soit d'un degré moindre que dans l'équation indéterminée qui a servi de diviseur: & alors il faudra supposer ce reste égal à zéro, & chacun de ses termes égal à zéro, & l'on aura par ces suppositions autant d'équations particulières qu'on a supposé d'indéterminées; & l'on s'en servira pour trouver les réduites qui donneront les valeurs des indéterminées de l'équation indéterminée qu'on a supposée: Et on aura la résolution qu'on cherche.

Tout ce qu'on vient de dire s'éclaircira par l'usage qu'on en fera dans la suite.

#### P R O B L È M E I V.

66. *TROUVER les équations commensurables plus simples par lesquelles une équation composée du 4<sup>e</sup>, 5<sup>e</sup>, & 6<sup>e</sup> degré, qui est réductible, peut se diviser exactement, lorsqu'il n'y a aucun terme évanoui dans ces équations plus simples, & que la moindre est au moins du second degré.*

#### M É T H O D E.

ON fera les mêmes choses qu'au Problème précédent, excepté qu'on ne supposera aucun terme évanoui dans les équations

équations indéterminées, & qu'on laissera dans les réduites la lettre indéterminée qui fait le dernier terme de l'une des deux équations indéterminées, sans en dégager la valeur, & elle marquera un des diviseurs du dernier terme de la proposée : cela abrégera de beaucoup le calcul des formules, & rendra les réduites plus simples, comme on le verra dans l'application de ce Problème au 4<sup>e</sup>, 5<sup>e</sup>, & 6<sup>e</sup> degré.

*Pour le quatrième degré.*

**T**O U T E S les équations du quatrième degré sont représentées par la formule générale  $x^4 + nx^3 + pxx + qx + r = 0$ .

Pour trouver les deux équations du second degré qui ont tous leurs termes, par lesquelles une équation réductible du quatrième, peut être exactement divisée, on supposera les deux équations indéterminées  $xx + fx + g = 0$ ,  $xx + hx + i = 0$ ; & après en avoir pris le produit

$$\begin{aligned} x^4 + fx^3 + gxx + ghx + gi = 0; \\ + hx^3 + ixx + fix \\ + fbxx \end{aligned}$$

on en comparera les termes avec ceux de la formule générale qui leur répondent, & l'on aura les quatre équations particulières suivantes: 1<sup>e</sup>,  $f + h = n$ ; 2<sup>e</sup>,  $g + i + fh = p$ ; 3<sup>e</sup>,  $gh + fi = q$ ; 4<sup>e</sup>,  $gi = r$ .

On regardera  $g$  comme connue, & elle marquera un diviseur exact du dernier terme de la proposée, puisque le dernier terme de la proposée est le produit des deux derniers termes des deux équations du second degré, dont la proposée est le produit. On cherchera une valeur de  $f$  qui ne contienne que des connues avec  $g$ ; pour la trouver, on prendra la valeur de  $h$  dans la première & la troisième équation, & l'on aura  $h = n - f = \frac{n - fi}{f}$ ; on prendra ensuite la valeur de  $i$  dans la quatrième équation, qui est  $i = \frac{r}{g}$ , & on la substituera dans l'équation qu'on vient de trouver, &

l'on aura  $n - f = \frac{q - \frac{fr}{g}}{f}$ , d'où l'on déduira  $f = \frac{q - \frac{fr}{g}}{\frac{r}{g} - g}$ ;

on substituera cette valeur de  $f$  dans  $xx + fx + g = 0$ , &c.

l'on aura  $xx + \frac{q - \frac{fr}{g}}{\frac{r}{g} - g}x + g = 0$ .

Quand on voudra examiner si une équation particulière du quatrième degré, peut se diviser exactement par deux

autres du second degré, on prendra tous les diviseurs du dernier terme de la proposée, & si elle est litterale & homogene, il suffira de prendre les diviseurs de deux dimensions. On substituera ces diviseurs successivement avec le signe de +, & ensuite celui de —, dans la formule  $xx + \frac{q - \frac{r}{x}}{\frac{r}{x} - g}x + g = 0$ , au lieu de  $g$ ; comme aussi les valeurs de  $n, q, r$ ; & on divisera la proposée par l'équation qui naîtra de la substitution; & si la division est exacte, on aura ce qu'on cherche.

Par exemple, on voudroit sçavoir si l'équation

$$x^4 + 2ax^3 - acxx + 2abbx + aabc = 0, \\ - 2bx^3 - 5abxx - 2aacx$$

est reduitible en deux équations du second degré.

1°. Afin que la formule generale du quatrieme degré  $x^4 + nx^3$ , &c. représente la proposée, il faut supposer  $n = 2a - 2b$ ,  $p = -ac - 5ab$ ,  $q = 2abb - 2aac$ ,  $r = +aabc$ .

2°. Il faut prendre parmi les diviseurs du dernier terme de la proposée, ceux qui sont de deux dimensions, c'est-à-dire,  $aa, ab, ac, bc$ .

2°. Il faut substituer chacun de ces diviseurs successivement avec le signe +, & ensuite avec le signe —, dans la formule  $xx + \frac{q - \frac{r}{x}}{\frac{r}{x} - g}x + g = 0$ , à la place de  $g$ , & y substituer aussi les valeurs de  $n, q, r$ : l'on trouvera qu'en y substituant à la place de  $g$ ,  $+aa, -aa, +ab$ , l'on n'auroit pas un diviseur exact de la proposée, mais en substituant  $-ab$  à la place de  $g$ , la formule est changée en  $xx + 2ax - ab = 0$ , par laquelle la proposée se divise sans reste, & l'on trouve le quotient  $xx - 2bx - ac = 0$ .

Ainsi la proposée n'est pas du quatrieme degré, mais elle se réduit aux deux équations précédentes du second degré.

On peut encore trouver une réduite dont  $f$  soit l'inconnue, & dans laquelle  $g$  soit regardée comme une connue qui représente un diviseur du dernier terme de la proposée, en prenant deux valeurs de l'indéterminée  $i$ , l'une dans la 2<sup>e</sup> & l'autre dans la 4<sup>e</sup> équation particuliere; & l'on aura  $i = p - g - fb = \frac{r}{x}$ ; substituant la valeur de  $b = n - f$  dans cette équation, l'on aura  $p - g - nf + ff = \frac{r}{x}$ , ou bien  $ff - nf + p = 0$ , qui est la réduite qu'on cherche.

$$\frac{-g}{\frac{r}{x}}$$



Résolvant cette équation du second degré, on aura  $f = \frac{1}{2}n \pm \sqrt{\frac{1}{4}nn - p + g + \frac{r}{2}}$ ; substituant cette valeur de  $f$  dans  $xx + fx + g = 0$ , on aura la formule  $xx + x \times \frac{1}{2}n \pm \sqrt{\frac{1}{4}nn - p + g + \frac{r}{2}} + g = 0$ . Cette formule servira à faire trouver les équations du second degré, dans lesquelles se peut réduire une équation particulière du quatrième degré, comme dans l'exemple précédent.

*Pour le cinquième degré.*

POUR trouver les deux équations commensurables, l'une du second degré; & l'autre du troisième, qui aient tous leurs termes, par lesquelles une équation réductible du 5<sup>e</sup> degré représentée par la formule générale  $x^5 + nx^4 + px^3 + qxx + rx + s = 0$ , peut se diviser exactement; on supposera, 1<sup>o</sup>.  $xx + fx + g = 0$ ,  $x^3 + hxx + ix + k = 0$ : Et après avoir pris leur produit  $x^5 + fx^4 + ix^3 + kxx + f kx + hx^4 + gx^3 + ghxx + gix + fhx^3 + fixx$

+  $gk = 0$ , on comparera les termes de ce produit avec ceux de la formule; & l'on aura les cinq équations particulières qui suivent: 1<sup>re</sup>,  $f + h = n$ ; 2<sup>e</sup>,  $i + g + fh = p$ ; 3<sup>e</sup>,  $k + gh + fi = q$ ; 4<sup>e</sup>,  $fk + gi = r$ ; 5<sup>e</sup>,  $gk = s$ .

2<sup>o</sup>. On cherchera une réduite du second degré, dont  $f$  soit l'inconnue, & on regardera  $g$  comme une connue qui représente un diviseur du dernier terme de l'équation du cinquième degré qu'on veut résoudre. Pour la trouver, on prendra les valeurs de  $h$  dans la première & la seconde, & l'on aura  $h = n - f = \frac{n-f}{1}$ ; d'où l'on déduira  $i = ff - nf + p - g$ : On prendra une autre valeur de  $i$  dans la quatrième, & l'on aura  $i = \frac{r-fk}{g}$ ; substituant dans cette valeur de  $i$  celle de  $k$  prise dans la cinquième équation, qui est  $k = \frac{s}{g}$ , l'on aura  $i = \frac{r - \frac{sf}{g}}{g} = ff - nf + p - g$ . Cette équation étant mise en ordre, on aura la réduite qu'on cherche,  $ff - nf + p = 0$ .

$$+ \frac{if}{g} - g$$

On peut trouver une autre réduite du second degré, en prenant la valeur de  $h$  dans la première & la troisième

équation, car l'on aura  $h = n - f = \frac{n-f-i}{i}$ ; ou bien  $gn - gf = q - fi - k$ ; substituant dans cette équation la valeur de  $i$  prise dans la quatrième, qui est  $i = \frac{n-f-k}{q}$ , l'on aura  $gn - gf = q - \frac{f(n-f-k)}{q} - k$ . Enfin substituant dans cette équation la valeur de  $k$  prise dans la cinquième, qui est  $k = \frac{f}{i}$ , on aura  $gn - gf = q - \frac{f}{i} + \frac{ff}{ii} - \frac{f}{i}$ , qui se réduit à  $ff - \frac{f^2}{i} - \frac{f^2}{i} = 0$ ,

$$+ \frac{f^2}{i} - \frac{g}{i} \\ + \frac{ff}{i}$$

C'est la seconde réduite qu'on cherchoit.

Quand on voudra voir si une équation particulière du cinquième degré est reductible en deux plus simples, l'une du second & l'autre du troisième degré, on prendra tous les diviseurs de son dernier terme; & si elle est litterale & homogene, il suffira de prendre ceux qui sont de deux dimensions; on les substituera les uns après les autres dans laquelle on voudra de ces deux réduites sous le signe +, & ensuite sous le signe —; on y substituera aussi les grandeurs de la proposée représentées par  $n, p, q$ , &c. on prendra ensuite la valeur de  $f$ , & on la substituera, comme aussi le diviseur pris pour  $g$ , dans  $xx + fx + g = 0$ ; & si la proposée se divise exactement par l'équation qui naîtra de la substitution, on aura ce qu'on cherche: sinon, on mettra un autre diviseur du dernier terme à la place de  $g$  dans la réduite, & on continuera l'operation comme on vient de le prescrire.

On pourroit aussi substituer les diviseurs du dernier terme les uns après les autres avec le signe +, & ensuite avec le signe —, dans les deux réduites, avec les valeurs de  $n, p, q$ , &c. & trouver ensuite le plus grand diviseur commun des réduites; & par le plus grand diviseur commun, trouver la valeur de  $f$ , & la substituer avec celle de  $g$ , dans  $xx + fx + g = 0$ , & diviser ensuite la proposée par l'équation qui en naîtroit.

Voici un exemple qui fera concevoir les deux manieres d'appliquer la methode à une équation particulière.

Pour voir si l'équation  $x^5 + 2ax^4 - 3aax^3 - aabxx + a^3bx - 4abx^3 + 3aabbx + a^3bb = 0$ , peut être exactement divisée par une équation

du second degré, & par une du troisieme degré, qui ayent tous leurs termes : 1°. il faut prendre les diviseurs du dernier terme qui sont de deux dimensions; ces diviseurs sont  $ab$ ,  $aa$ ,  $bb$ .

2°. Afin que la formule generale  $x^3 + nx^2$ , &c. représente la proposée, il faut supposer  $n = 2a$ ,  $p = -3aa - 4ab$ ,  $q = -aab$ ,  $r = +a^3b + 3aabb$ ,  $s = +a^3bb$ .

3°. Il faut substituer dans laquelle on voudra des deux réduites,  $+ab$  à la place de  $g$ , & les valeurs de  $n$ ,  $p$ ,  $q$ , &c. à leur place; & comme la valeur de  $f$  qu'on trouve après la substitution de  $+ab$  à la place de  $g$ , étant substituée dans  $xx + fx + ab = 0$ , l'équation qui en vient n'est pas un diviseur exact de la proposée, il faut substituer  $-ab$  à la place de  $g$ , dans laquelle on voudra des réduites, & les valeurs de  $n$ ,  $p$ ,  $q$ , &c. & l'on trouvera au lieu de la premiere réduite cette équation  $ff - af - 2aa = 0$ ; & au lieu de la seconde réduite l'on trouvera  $ff + af + 2ab = 0$ .

4°. Ayant trouvé par le moyen de l'une ou l'autre de ces deux réduites que  $f = -a$ , on substituera  $-a$  au lieu de  $f$  dans  $xx + fx + g = 0$ , &  $-ab$  à la place de  $g$ ; & l'on aura  $xx - ax - ab = 0$ , par laquelle divisant la proposée, on trouvera le quotient juste  $x^3 + 3axx - 3abx - aab = 0$ ; ainsi la proposée n'est pas du cinquieme degré, mais elle se réduit aux deux équations précédentes du second & du troisieme degré.

On peut aussi trouver la valeur de  $f$ , en prenant le plus grand diviseur commun des deux réduites, après qu'on y aura substitué  $-ab$  à la place de  $g$ , & les valeurs de  $n$ ,  $p$ ,  $q$ , &c. car l'on trouvera que le plus grand diviseur commun est  $f + a = 0$ , par conséquent  $f = -a$ .

Cette maniere de trouver la valeur de  $f$  par le plus grand diviseur commun des réduites, après qu'on y a fait les substitutions, est d'usage, lorsque les réduites sont au-dessus du second degré; mais quand les réduites ne passent pas le second degré, il est d'ordinaire plus court de prendre la valeur de  $f$  dans une seule réduite.

*Pour le fixième degré.*

*LORSQU'IL* peut se réduire à une équation du second degré & à une autre du 4<sup>e</sup>, dans lesquelles aucun terme n'est évanoui.

**I**L faut supposer les deux équations indéterminées  $xx + fx + g = 0$ ,  $x^2 + hx^2 + ixx + kx + l = 0$ ; & après avoir pris leur produit  $x^4 + hx^3 + ix^2 + kx^2 + lxx + flx + gl = 0$ ;  
 $+ fx^3 + gx^2 + ghx^2 + gixx + gkx$   
 $+ fhx^2 + fix^2 + fkxx$

il faut comparer les termes du produit avec ceux de la formule générale du fixième degré  $x^4 + nx^3 + px^2 + qx^2 + rxx + sx + t = 0$ , qui leur répondent; ce qui donnera les six équations particulières qui suivent: 1<sup>e</sup>,  $h + f = n$ ; 2<sup>e</sup>,  $i + g + fh = p$ ; 3<sup>e</sup>,  $k + gh + fi = q$ ; 4<sup>e</sup>,  $l + gi + fk = r$ ; 5<sup>e</sup>,  $fl + gk = s$ ; 6<sup>e</sup>,  $gl = t$ .

Pour trouver une réduite dont  $f$  soit l'inconnue, & dans laquelle  $g$  représente un diviseur du dernier terme de la proposée, on prendra deux valeurs de  $b$  dans la première & la seconde équation, & l'on aura  $h = n - f = \frac{n-f}{1}$ ; d'où l'on déduira  $i = ff - nf + p - g$ ; comparant cette valeur de  $i$  avec une autre prise dans la quatrième, on aura  $i = \frac{r-l-fk}{g} = ff - nf + p - g$ ; ou bien  $r - l - fk = gff - gnf + gp - gg$ ; mettant dans cette équation la valeur de  $l$  prise dans la sixième équation, qui est  $l = \frac{t}{g}$ , l'on aura  $r - \frac{t}{g} - fk = gff - gnf + gp - gg$ ; substituant la valeur de  $l = \frac{t}{g}$  dans la cinquième, on aura  $k = \frac{s - \frac{fl}{g}}{g}$ . Cette valeur étant substituée à la place de  $k$  dans  $r - \frac{t}{g} - fk = gff - gnf + gp - gg$ , l'on aura la réduite  $r - \frac{t}{g} - \frac{sf + \frac{ff}{g}}{g} = gff - gnf + gp - gg$ , qui se réduit à  $ff - \frac{ff}{g} - nf + p + \frac{f}{g} - g$   
 $- \frac{t}{g}$   
 $+ \frac{t}{g}$

$= 0$ ; c'est la réduite qu'on cherche.

On peut trouver une seconde réduite en comparant la valeur de  $i$  déjà trouvée, qui est  $i = ff - nf + p - g$ , avec une autre valeur de  $i$  prise dans la troisième équation, & l'on aura  $i = \frac{q - fh - gk}{g} = ff - nf + p - g$ ; il faut substituer

Dans cette équation la valeur de  $b$  prise dans la première équation, qui est  $b = n - f$ , & la valeur de  $k$  prise dans la cinquième équation, qui est  $k = \frac{1}{2} \frac{fl}{f}$ ; & substituant à la place de  $l$  sa valeur  $l = \frac{1}{2} \frac{ff}{f}$  prise dans la sixième équation, on aura  $k = \frac{1}{2} \frac{ff}{f}$ ; substituant donc les valeurs de  $k$  & de  $b$  dans  $1 - \frac{1}{2} \frac{ff}{f} = ff - nf + p - g$ , l'on aura

$$q - \frac{1}{2} \frac{ff}{f} - \frac{gn + gf}{f} = ff - nf + p - g$$

qui se réduit à  $f^3 - nff - 2gf + gn = 0$ ;  
 $+ pf + \frac{1}{2}$   
 $-\frac{1}{2} \frac{ff}{f} - q$

c'est la seconde réduite qu'on cherchoit.

On se servira de ces réduites pour trouver si une équation du sixième degré se peut réduire en deux plus simples qui aient tous leurs termes, dont l'une soit du second degré, & l'autre du quatrième, comme on l'a enseigné dans le cinquième degré.

*Pour le sixième degré, lorsqu'il peut se réduire à deux équations du troisième degré qui ont tous leurs termes.*

IL faut supposer les deux équations indéterminées  $x^3 + fxx + gx + b = 0$ ,  $x^3 + ixx + kx + l = 0$ ; & après avoir trouvé leur produit  $x^6 + fx^5 + gx^4 + bx^3 + hixx + hkx + hl + ix^5 + kx^4 + lx^3 + flxx + glx + fix^4 + gix^3 + gkxx + ffx^3$

$= 0$ ; on comparera les termes de ce produit avec ceux de la formule générale du sixième degré  $x^6 + nx^5 + px^4 + qx^3 + rxx + sx + t = 0$ , qui leur répondent; ce qui donnera les six équations particulières qui suivent: 1<sup>e</sup>,  $f + i = n$ ; 2<sup>e</sup>,  $g + k + fi = p$ ; 3<sup>e</sup>,  $b + l + gi + fk = q$ ; 4<sup>e</sup>,  $hi + fl + gk = r$ ; 5<sup>e</sup>,  $hk + gl = s$ ; 6<sup>e</sup>,  $hl = t$ .

Pour trouver une réduite dont  $f$  soit l'inconnue, & dans laquelle  $b$  représente un diviseur du dernier terme de la proposée, lequel diviseur est de trois dimensions dans les équations littérales & homogenes; il faut prendre dans la première & la seconde équation deux valeurs de  $i$ , & l'on aura  $i = n - f = \frac{n-f}{1}$ ; d'où l'on déduira  $k = ff - nf$

+  $p - g$ ; on prendra une autre valeur de  $k$  dans la cinquième  $k = \frac{1-hl}{b}$ ; par conséquent  $ff - nf + p - g = \frac{1-hl}{b}$ . On substituera dans  $\frac{1-hl}{b}$ , la valeur de  $l$  prise dans la sixième équation  $l = \frac{t}{b}$ ; & l'on aura  $ff - nf + p - g = \frac{1-h\frac{t}{b}}{b}$ ; d'où l'on déduira  $g = \frac{-bff + hnf - ph + s}{\frac{t}{b} - h}$ . Il faut remarquer cette première valeur de  $g$ .

Pour avoir une seconde valeur de  $g$  à comparer avec cette première, on se servira de la troisième équation, qui donnera  $g = \frac{1-h-l-fl}{i}$ ; substituant dans cette valeur celle de  $l = \frac{t}{b}$  prise dans la sixième équation, celle de  $i$  prise dans la première, qui est  $i = n - f$ , & celle de  $k$  prise dans la seconde, qui est  $k = p - g - fi = p - g - nf + ff$ , l'on aura  $g = \frac{q - h - \frac{t}{b} - pf + gf + nff - f^3}{n - f}$ ; d'où l'on

déduira  $g = \frac{f^3 - nff + pf + \frac{t}{b} + h - q}{2f - n}$ , qui est la seconde

valeur de  $g$ ; comparant les deux valeurs de  $g$ , on aura  $-\frac{bff + hnf - ph + s}{\frac{t}{b} - h} = \frac{f^3 - nff + pf + \frac{t}{b} + h - q}{2f - n}$ , qui

se réduit à  $f^3 - \frac{t}{b}nff - 2hnff + \frac{bnnf - 2sf}{\frac{t}{b} + b} - \frac{hnp + ns - \frac{t}{b}q + hq}{\frac{t}{b} + b} + pf + \frac{t}{b} - h$

$= 0$ ; c'est la première réduite qu'on cherche.

Pour trouver une seconde réduite dont  $f$  soit l'inconnue, on prendra deux valeurs de  $k$ , l'une dans la seconde équation particulière, & l'autre dans la quatrième; & l'on aura  $k = p - g - fi = \frac{1-hl-fl}{i}$ ; substituant dans cette équation la valeur de  $i$  prise dans la première équation  $i = n - f$ , celle de  $l$  prise dans la sixième, qui est  $l = \frac{t}{b}$ , & la première valeur de  $g$ , qu'on a fait remarquer ci-dessus, l'équation  $-g + p - fi = \frac{1-hl-fl}{i}$ , sera changée en celle-ci,

$\frac{bff - hnf + hp - s}{\frac{t}{b} - h} + p - nf + ff = \frac{1 - hn + hf - \frac{t}{b}f}{\frac{1-hf + hnf - hp + s}{\frac{t}{b} - h}}$ ; d'où

étant les fractions, & faisant en sorte que le premier terme n'ait que l'unité pour coefficient, l'on trouvera l'équation suivante,

suivante, qui est la seconde réduite qu'on cherchoit,

$$\begin{aligned}
 f^3 - 2nf^2 - \frac{b^2ff}{f} + \frac{bnrf}{f} - \frac{bp^2}{f} &= 0. \\
 + 2pff - 2npf + pp \\
 + nnff + \frac{nf}{b} + \frac{p^2}{f} \\
 - \frac{ff}{b} - \frac{nf}{b^2} - \frac{p^2}{b} \\
 + \frac{3pf}{b} - \frac{np}{b} \\
 - 3bf + \frac{p^2}{b} \\
 + \frac{b^3f}{f} + 2bn \\
 - 2r \\
 - \frac{b^2p}{f} \\
 + \frac{bb^2r}{f}
 \end{aligned}$$

On se servira de ces réduites pour trouver si une équation du sixième degré peut se réduire en deux du troisième qui aient tous leurs termes, comme on l'a enseigné dans le cinquième degré : Mais il faut remarquer que quand on aura trouvé une valeur de  $f$ , il faudra la substituer dans l'une des deux valeurs de  $g$ , laquelle on voudra, pour déterminer la valeur de  $g$ , afin de la substituer avec celle de  $f$ , & avec le diviseur pris pour  $h$  dans  $x^3 + fxx + gx + h = 0$ ; & après ces substitutions, on divisera la proposée par cette équation ainsi changée.

Ceux qui voudront prendre la peine du calcul, pourront abaisser cette seconde réduite par le moyen de la première, au second degré, comme on l'a fait dans le problème précédent, *pag.* 147 & 148.

La démonstration de ce quatrième Problème est la même que celle du troisième.

## C O R O L L A I R E I.

**I**L est évident que ce quatrième Problème comprend le précédent, car quand il arrive qu'il y a un terme évanoui dans l'une des deux équations plus simples, dans lesquelles une équation du 4<sup>e</sup>, 5<sup>e</sup> & 6<sup>e</sup> degré se peut réduire, on trouve alors une valeur de l'indéterminée qui répond à ce terme, prise dans les réduites de ce quatrième Problème, égale à zéro.

## C O R O L L A I R E II.

**L**ORSQU'APRÈS avoir substitué successivement tous les diviseurs du dernier terme de la proposée dans les réduites,

on ne peut trouver aucunes valeurs des indéterminées, qui étant substituées dans  $xx + fx + g = 0$ , ou  $x' + fxx + gx + h = 0$ , les rendent des diviseurs exacts de la proposée, c'est une marque certaine que la proposée est irréductible.

## PROBLÈME V.

*qui contient les deux précédens.*

67. **TROUVER** les équations plus simples commensurables, par lesquelles une équation réductible de quelque degré qu'elle puisse être, peut se diviser exactement, soit que ces équations plus simples aient tous leurs termes, soit qu'elles en aient d'évanouis.

### AVERTISSEMENT.

**L**A méthode qu'on va expliquer suffit seule pour réduire toutes les équations composées réductibles aux plus simples degrez, ou pour s'assurer si elles sont irréductibles; mais dans la crainte que l'extrême longueur du calcul ne rebutât le Lecteur, on a cru qu'il étoit nécessaire de faire précéder les méthodes du troisième & quatrième Problème, dont le calcul est bien moins embarrassant, & qui cependant suffisent pour réduire les équations. Pour faire concevoir clairement cette méthode, on l'appliquera en l'énonçant aux équations du quatrième degré: Il faut se rendre cette application familière pour entendre la démonstration.

### MÉTHODE GÉNÉRALE.

1<sup>o</sup>. **I**L faut d'abord supposer que  $xx + fx + g = 0$ , représente par ses indéterminées  $f, g$ , l'équation du second degré, par laquelle une équation composée se peut diviser exactement.

2<sup>o</sup>. Il faut diviser la formule générale du degré de l'équation qu'on voudra réduire, par  $xx + fx + g = 0$ , & continuer la division jusqu'à ce qu'on soit arrivé à un reste où l'inconnue  $x$  soit moins élevée d'un degré que dans  $xx + fx + g = 0$ .

3<sup>o</sup>. Il faut supposer chaque terme de ce reste égal à zero, ce qui donnera autant d'équations qu'on a supposé d'indéterminées.

Au lieu de faire ce qui est marqué dans le second & troisième article, on pourra multiplier  $xx + fx + g = 0$ , par une autre équation indéterminée, dont le degré joint avec



celui de  $xx + fx + g = 0$ , fasse celui de l'équation qu'on veut réduire; par exemple, pour le 4<sup>e</sup> degré, il faudra multiplier  $xx + fx + g = 0$ , par  $xx + bx + i = 0$ ; pour le 5<sup>e</sup> degré, par  $x^3 + bxx + ix + k = 0$ ; pour le 6<sup>e</sup>, par  $x^4 + bxx^2 + ixx + kx + l = 0$ ; & ainsi des autres.

Il faudra ensuite comparer les termes du produit avec ceux de la formule generale du degré de l'équation qu'on veut réduire, qui leur répondent, comme dans le troisième & quatrième Problème; ce qui donnera autant d'équations particulieres qu'il y a d'indéterminées dans les deux équations indéterminées qu'on a multipliées l'une par l'autre.

Il faudra dégager les indéterminées de l'équation indéterminée  $xx + bx + i = 0$ , ou  $x^3 + bxx + ix + k = 0$ , &c. en se servant des premieres équations particulieres, & en substituant leurs valeurs dans les deux dernieres, on aura précisément les deux mêmes équations trouvées par le second & troisième article.

Par exemple, pour réduire une équation du 4<sup>e</sup> degré, on prendra la formule generale du 4<sup>e</sup> degré  $x^4 + nx^3 + pxx + qx + r = 0$ , & l'équation indéterminée  $xx + fx + g = 0$ , on divisera la première par la seconde, comme on le voit ici :

AVERTISSEMENT.  $x^4 + nx^3 + pxx + qx + r$   $\left( \begin{array}{l} xx + fx + g \\ xx + nx + p \end{array} \right)$   
*marque que la*  $- x^3 - 2gxx - ngx - pg$   $\left( \begin{array}{l} -fx - g \\ -nx - p \end{array} \right)$   
*grandeur est effa-*  $- 2nfx + fgx + gg$   $-fx - g$   
*cée; ainsi 2 x<sup>2</sup>*  $+ 2ffxx + pfx + nfg$   $-nx - p$   
*marque que x<sup>2</sup> est*  $+ fgx - ff$   $-fx - g$   
*tranchée par une*  $+ nffx$   $-nx - p$   
*ligne.*  $- f^2x$

Et la division sera continuée jusqu'à ce qu'on ait trouvé le reste  $- f^2x + nffx + fgx - pfx + fgx - ngx + qx - ffg + nfg + gg - pg + r$ , dans lequel  $x$  est d'un degré moins élevée que dans le diviseur  $xx + fx + g$ .

On supposera chaque terme de ce reste égal à zero, & l'on aura les deux équations  $- f^2 + nff - pf - ng = 0$ ,

$$\begin{array}{r} - 2gf + 2g \\ - pg \\ + r \end{array}$$

ou bien en transposant,  $f^2 - nff + pf + ng = 0$ ,

$$\begin{array}{r} 2gf - 2g \\ + pg \\ - r \end{array}$$

On trouveroit les deux mêmes équations en comparant les termes du produit de  $xx + fx + g = 0$ , par  $xx + bx + i = 0$ , qui est  $x^4 + fx^3 + gxx + ghx + gi = 0$ , avec ceux

$$+ bx^3 + ixx + fix + fbx$$

de la formule generale  $x^4 + nx^3 + pxx + qx + r = 0$ ; car en dégagant les indéterminées  $b$  &  $i$  dans les premières des quatre équations particulières que donneront ces comparaisons, qui sont : 1<sup>e</sup>,  $f + b = n$ ; 2<sup>e</sup>,  $g + i + fb = p$ ; 3<sup>e</sup>,  $gh + fi = q$ ; 4<sup>e</sup>,  $gi = r$ , l'on trouveroit  $b = n - f$ ,  $i = p - g - nf + ff$ ; & substituant les valeurs de  $b$  & de  $i$  dans la 3<sup>e</sup> & la 4<sup>e</sup>, l'on auroit  $f = \frac{q - ng + if}{p - g - nf + ff}$ ; d'où l'on déduiroit  $f^2 - nff - 2gf + ng = 0$ , &  $g = \frac{r}{p - g - nf + ff}$

$$+ pf - q$$

d'où l'on déduiroit  $gff - ngf - gg = 0$ .

$$+ pg - r$$

4<sup>o</sup>. Pour trouver les valeurs de  $f$  & de  $g$  par le moyen de ces deux équations, on choisira laquelle on voudra des deux indéterminées  $f$ ,  $g$ , pour en faire l'inconnue de la réduite; supposé qu'on se détermine à  $g$ , on ordonnera chacune de ces deux équations par rapport à l'inconnue  $f$  qu'on veut faire disparaître de la réduite, & on regardera  $g$  comme connue, jusqu'à ce qu'on ait trouvé la réduite dont  $g$  soit l'inconnue.

Pour trouver cette réduite, on cherchera le plus grand diviseur commun des deux équations précédentes; & quand on sera arrivé à un reste où  $f$  soit lineaire, on mettra ce reste à part, & le supposant égal à zero, on prendra dans l'équation lineaire faite de ce reste, la valeur de  $f$  lineaire, laquelle ne contiendra que des grandeurs connues avec la seule inconnue  $g$ . Il faut remarquer cette valeur de  $f$ , parce que quand on aura trouvé la valeur de  $g$  dans la réduite, en la substituant dans cette valeur de  $f$ , on rendra  $f$  toute connue.

On continuera de chercher le plus grand diviseur commun avec le reste où  $f$  est lineaire, comme si on n'avoit pas mis ce reste à part; & quand l'inconnue  $f$  aura disparu, on supposera le reste qui n'aura point d'autre inconnue que  $g$ , égal à zero; & ordonnant l'équation qui en naîtra par

rapport à l'inconnue  $g$ , elle sera la réduite qu'on cherche.

Dans notre exemple on cherchera le plus grand diviseur commun de  $f^3 - nff - 2gf + ng = 0$ , & de  $gff - ngf$   
 $+ pf - q$

$- gg = 0$ ; & quand on sera arrivé au reste  $- ggf + rf$   
 $+ pg$   
 $- r$

$+ ngg - qg$ , où  $f$  est lineaire, on le supposera égal à zero, d'où l'on déduira  $f = \frac{ngg - qg}{gg - r}$ . Il faut remarquer cette équation lineaire, qui fera trouver la valeur de  $f$ , quand  $g$  sera connue.

On continuera ensuite la recherche du plus grand diviseur commun des deux équations précédentes, comme si on ne s'étoit pas arrêté à mettre à part la valeur de  $f$ , en divisant  $gff - ngf - gg = 0$ , par le reste  $- ggf + ngg = 0$ , jus-  
 $+ pg$   $+ rf - qg$   
 $- r$

qu'à ce que l'inconnue  $f$  ait disparu, & l'on supposera le reste qui ne contiendra plus  $f$ , égal à zero, & après avoir ordonné ce reste par rapport à l'inconnue  $g$ , on aura la réduite  $g^3 - pg^2 + nqg^2 - qqg^2 + nqrqg - prrg + r^3 = 0$ .  
 $- rg^2 - nmrq^2 - rrgg$   
 $+ 2prg^3$

Si l'on vouloit trouver la réduite où  $f$  fût l'inconnue, on ordonneroit les deux équations trouvées par le second & troisième article de la méthode, par rapport à l'inconnue  $g$ , & l'on auroit  $gg + nfg + r = 0$ , &  $2fg - f^2 = 0$ .

$$\begin{array}{r} - pg \\ - ffg \\ - ng + nff \\ - pf \\ + q \end{array}$$

On chercheroit leur plus grand diviseur commun, & on feroit d'abord l'operation, jusqu'à ce qu'on fût arrivé à un reste où  $g$  fût lineaire. Mais comme  $g$  est lineaire dans la seconde équation, ce reste est tout trouvé sans operer, & l'on a  $g = \frac{f^2 - nff + pf - q}{2f - n}$ .

Il faudroit ensuite continuer l'operation pour trouver le plus grand diviseur commun, jusqu'à ce que  $g$  eût disparu dans le reste. Il faudroit supposer ce reste où  $g$  n'est plus, égal à zero, & ordonner l'équation par rapport à l'inconnue  $f$ , & l'on auroit la réduite.

$$\begin{aligned}
 f^4 - 3nf^3 + 3n^2f^2 - 4npf^2 + ppff - naqf - qq &= 0 \\
 + 2pf^3 - n^3f^2 + naqf - nppf + npq & \\
 + 2nnpff + 4nrf - nar & \\
 - 4rff &
 \end{aligned}$$

Si le second terme étoit évanoui dans une équation du quatrième degré, alors  $n$  étant zero, toutes les grandeurs de la réduite précédente où se trouve  $n$ , devenant zero, l'on auroit la réduite du 3<sup>e</sup> degré  $f^3 + 2pf^2 + ppff - qq = 0$ .  
— 4rff.

Pour trouver, par le moyen de ces réduites, si une équation particulière du quatrième degré, par exemple  $x^4 + 2ax^3 - acxx + 2abbx + aabc = 0$ , peut se diviser —  $2bx^3 - 5abxx - 2aacx$  exactement par deux équations commensurables du second degré, il faut supposer, afin que la formule générale représente la proposée,  $n = 2a - 2b$ ,  $p = -ac - 5ab$ ,  $q = 2abb - 2aac$ ,  $r = +aabc$ ; & ensuite substituer dans laquelle on voudra des deux réduites, à la place de  $n$ ,  $p$ ,  $q$ , &c. les grandeurs qu'elles représentent.

Il faut ensuite trouver tous les diviseurs du dernier terme de la réduite ainsi changée; & si la proposée est littérale & homogène, il faudra prendre les seuls diviseurs de deux dimensions dans la réduite dont  $g$  est l'inconnue, & ceux d'une seule dimension dans la réduite dont  $f$  est l'inconnue.

Si l'on se sert de la réduite dont  $g$  est l'inconnue, comme  $g$  représente un diviseur de deux dimensions du dernier terme de la proposée, il n'y a parmi tous les diviseurs du dernier terme de la réduite, qui sont de deux dimensions, que ceux qui sont communs avec ceux du dernier terme de la proposée, qui peuvent servir; ce qui est un abrégé lorsqu'on se sert de la réduite dont  $g$  est l'inconnue.

Il faut substituer les diviseurs dont on vient de parler successivement avec le signe de + & celui de —, à la place de  $g$ , dans la réduite, ou à la place de  $f$ , si l'on se sert de la seconde réduite; ou bien diviser successivement la réduite par  $g$  ou  $f$  plus ou moins chacun de ces diviseurs.

Celui de ces diviseurs dont la substitution rendra toutes les grandeurs de la réduite égales à zero, ou par le moyen duquel la division se fera sans reste, sera la valeur de  $g$  ou de  $f$ .

Dans notre exemple , après avoir mis dans la réduite dont  $g$  est l'inconnue, à la place de  $n, p, \&c.$  les grandeurs de la proposée qu'elles représentent, elle se trouve changée en celle-ci.

$$\begin{aligned} g^4 + acg^3 + 4aabbg^2 - 4aab^2g^2 + 4a^2b^2cgg + a^2bbc^2g + a^2b^2c^2 &= 0 \\ + 5abg^3 - 4ab^2g^2 + 6a^2bbc^2g - 4a^2b^2cgg + 5a^2b^2c^2g & \\ - 4a^2c^2g^2 - 4a^2bccg^2 - 4a^2bccg^2 & \\ + 3aabbcg^2 - 4a^2bcg^2 + 3a^2bbccg^2 & \\ - 4aab^2c^2g^2 & \\ - 2a^2bccg^2 & \end{aligned}$$

Les diviseurs du dernier terme , qui sont de deux dimensions, sont  $ab, ac, bc, aa, bb, cc$ , parmi lesquels il n'y en a de communs avec les diviseurs du dernier terme de la proposée, que  $ab, ac, bc, aa$ . Ainsi il ne faut se servir que de ces quatre.

Or on trouve que substituant  $-ab$  à la place de  $g$ , dans la réduite, toutes les grandeurs se détruisent par des signes contraires ; ou bien qu'en faisant la division de la réduite par  $g + ab = 0$ , la division se fait sans reste : Ainsi  $g = -ab$ .

Il faut après avoir trouvé cette valeur de  $g$ , la substituer avec les valeurs de  $n, q, r$ , dans l'équation où  $f$  est lineaire, qui est  $f = \frac{22}{22} - \frac{72}{22}$ , & l'on trouve  $f = 2a$ .

Il faut mettre ces valeurs de  $f$  & de  $g$  dans l'équation indéterminée  $xx + fx + g = 0$ , & l'on aura  $xx + 2ax - ab = 0$ , qui est l'équation commensurable du second degré, par laquelle la proposée peut être exactement divisée : si l'on fait la division, le quotient  $xx - 2bx - ac = 0$ , sera l'autre équation, par laquelle la proposée se peut exactement diviser.

On trouveroit aussi la seconde équation du second degré, en substituant les valeurs de  $n, p, q, r, f, g$ , dans le quotient indéterminé, qui est  $xx + nx + p = 0$ .

$$\begin{aligned} -fx - g \\ -nf \\ +ff \end{aligned}$$

*Démonstration du cinquième Problème.*

ON suppose que  $x^4 + nx^3 + pxx + qx + r = 0$ , représente toute l'équation du quatrième degré, qui se peut exactement diviser par deux autres commensurables du 2<sup>e</sup> degré, dont l'une est représentée par  $xx + fx + g = 0$ :

Ainsi  $f$  &  $g$  représentent des grandeurs commensurables. Selon cette supposition, en divisant  $x^2 + nx^2$ , &c. par  $xx + fx + g = 0$ , la division doit être exacte, & le quotient est  $xx + nx + p = 0$ .

$$\begin{array}{r} -fx - g \\ -nf \\ +ff \end{array}$$

Puisque la division est supposée se faire sans reste, le reste

$$\begin{array}{r} +qx + r \\ -ngx - pg \\ +2fgx + gg \\ -pfx + nfg \\ +nffx - ffg \\ -f^2x \end{array}$$

doit donc être égal à zero, & les grandeurs de chaque terme du reste se doivent détruire; & effectivement elles se détruiraient si l'on mettoit à la place des lettres  $n, p, q, r, f, g$ , les grandeurs qu'elles représentent; car autrement la division ne se feroit pas sans reste, contre la supposition.

Chacun des termes du reste donne donc une équation, dont le 2<sup>e</sup> membre est zero. Ainsi  $-f^2 + nff - pff - ng$   
 $+ 2gf + q$

$$= 0, \quad -gff + ngf + gg = 0.$$

$$\begin{array}{r} -pg \\ +r \end{array}$$

Si l'on conçoit dans chacune à la place des lettres, les grandeurs qu'elles représentent, toutes les grandeurs se détruiront par des signes contraires. Donc  $f +$  ou  $-$  la grandeur commensurable qu'elle représente, est une équation lineaire, qui est un diviseur exact de l'une & de l'autre de ces deux équations; par la nature des équations.

De même  $g +$  ou  $-$  la grandeur commensurable qu'elle représente, est une équation lineaire, qui est un diviseur exact de ces deux mêmes équations, supposé qu'on les ordonne par rapport à l'indéterminée  $g$ ; par conséquent en recherchant le plus grand diviseur commun de ces deux équations, qui en ont un où  $f$  est lineaire, ou bien un où  $g$  est lineaire: Quand on sera arrivé à un reste dans lequel  $f$  ou bien  $g$  seront lineaires, ce sera un diviseur commun des deux équations. Ce reste est  $f = \frac{ng - pg}{g - f}$ , ou bien  
 $g =$

$\bar{g} = \frac{f^2 - nff + pf - q}{2f - n}$ . Ce reste est donc une équation lineaire, qui contient une racine commensurable de chacune de ces deux équations.

Si on continue la recherche du plus grand diviseur commun, jusqu'à ce que  $f$  ou  $g$  disparaissent, le nouveau reste qui ne contiendra point  $f$ , ou point  $g$ , sera donc égal à zero, puisque le reste précédent où  $f$ , ou bien où  $g$  étoit lineaire, est supposé un diviseur exact, qui doit laisser zero pour reste de la division : Ce dernier reste qui est la réduite, est donc tel, qu'en mettant à la place de l'inconnue  $f$  ou  $g$  de cette réduite, la grandeur commensurable qu'elle représente, & y mettant aussi les grandeurs représentées par  $n, p, q$ , &c. toutes les quantitez se détruiront par des signes contraires.

Par conséquent, selon la nature des équations, après avoir substitué dans la réduite les grandeurs représentées par  $n, p, q$ , &c.  $f +$  ou  $-$  un diviseur du dernier terme de la réduite, ou bien  $g +$  ou  $-$  un diviseur du dernier terme de la réduite, est une équation lineaire qui divise exactement la réduite, & qui en contient la racine; c'est-à-dire, la valeur de  $f$  ou de  $g$ .

La méthode fait donc trouver, lorsque l'équation proposée est réducible, les valeurs de  $f$  & de  $g$ , qui étant mises à leur place dans  $xx + fx + g = 0$ , changent cette équation indéterminée en une autre déterminée, qui est un diviseur exact de la proposée. Ce qu'il falloit démontrer.

*Remarques sur la méthode du cinquième Problème.*

I:

68. IL suffit ici d'avoir fait concevoir, & d'avoir démontré la méthode, ceux qui voudront prendre la peine du calcul, pourront supputer deux réduites pour le cinquième degré, & deux pour le sixième, dont les inconnues soient  $f$  &  $g$ ; & de plus trois réduites pour le sixième degré, lorsqu'il peut se réduire à deux équations chacune du troisième degré; dont les inconnues seront les indéterminées  $f, g, h$ , de l'équation indéterminée  $x^3 + fxx + gx + h = 0$ .

Ils pourront toujours trouver par le moyen de ces réduites, si une équation quelconque du 4<sup>e</sup>, 5<sup>e</sup> & 6<sup>e</sup> degré est réducible; & les équations plus simples auxquelles on la

peut réduire, par les seules substitutions des grandeurs de la proposée, représentées par  $n, p, q$ , &c.

Pour abréger le calcul qu'il faut faire pour trouver ces réduites, on pourra supposer le second terme, où est  $n$ , de chaque formule générale, évanoui; & alors il faudra faire évanouir le second terme d'une équation proposée, lorsqu'on voudra voir si elle est réductible.

## I I.

Lorsqu'on se sert de la réduite dont l'inconnue  $g$  ou  $h$  est le dernier terme de l'équation indéterminée  $xx + fx + g = 0$ , ou bien  $x^3 + fxx + gx + h = 0$ , la grandeur représentée par  $g$  ou  $h$ , devant être un diviseur exact du dernier terme de la proposée, lorsque cette grandeur est commensurable; on a cet avantage de n'avoir besoin pour trouver la racine de la réduite, que des diviseurs du dernier terme de la proposée, communs avec ceux du dernier terme de la réduite: & de plus si l'équation proposée est littérale & homogène, on n'a besoin que des diviseurs du dernier terme de la proposée qui sont de deux dimensions, lorsque l'on cherche une équation représentée par  $xx + fx + g = 0$  du second degré; & de ceux qui sont de trois dimensions, lorsqu'on cherche une équation du troisième degré représentée par  $x^3 + fxx + gx + h = 0$ .

Lorsqu'on se sert de la réduite dont l'indéterminée  $f$  des équations  $xx + fx + g = 0$ ,  $x^3 + fxx + gx + h = 0$  est l'inconnue, ou bien l'indéterminée  $g$  de l'équation  $x^3 + fxx + gx + h = 0$ , on a cet avantage que quand l'équation du second ou du troisième degré, par laquelle la proposée se peut exactement diviser, a le second terme évanoui, on le trouve tout d'un coup, car après la substitution des grandeurs représentées par  $n, p$ , &c. dans la réduite, cette réduite se peut abaisser d'un degré; c'est-à-dire,  $f$  se trouve avoir une valeur égale à zéro.

Il faut entendre la même chose de la réduite, dont l'inconnue est l'indéterminée  $g$  de l'équation  $x^3 + fxx + gx + h = 0$ .

## I I I.

Lorsqu'en examinant par la méthode qu'on vient d'expliquer, si une équation proposée est réductible, on ne trouve aucune valeur commensurable de l'inconnue de la



réduite, on est assuré que la proposée est irréductible.

## A V E R T I S S E M E N T.

**L**Es méthodes qu'on vient de donner pour trouver si une équation est réductible, demandent un long calcul, c'est pourquoi il seroit à souhaiter qu'on eût une méthode courte pour trouver quand une équation est irréductible. En voici une qui peut servir en plusieurs rencontres.

*Méthode pour trouver tout d'un coup, en plusieurs cas, si une équation littérale est irréductible.*

69. **I**L faut supposer chaque lettre différente de l'équation proposée égale à un nombre, comme à 1, ou à 2, &c. ou bien supposer toutes les lettres différentes égales, ou seulement quelques-unes. On peut aussi supposer l'unité ou le même nombre égal à plusieurs lettres différentes de la proposée; (on suppose qu'on n'a point abrégé l'équation proposée en supposant plusieurs connues différentes exprimées par une seule lettre.)

Il faut ensuite substituer les nombres ou les lettres qu'on a supposé égales à celles de l'équation, à leur place dans la proposée. Si la nouvelle équation qui en résulte, est irréductible; c'est une marque certaine que la proposée est irréductible.

*Démonstration.* Par la supposition, l'équation nouvelle qui résulte des substitutions, est irréductible. Mais si la proposée étoit réductible en deux autres équations plus simples, cette équation qui résulte des substitutions seroit nécessairement réductible, comme on va le montrer: Ainsi si l'équation qui résulte des substitutions est irréductible, la proposée l'est aussi. Car si la proposée étoit réductible en deux autres plus simples, on pourroit concevoir qu'on substituât dans ces deux plus simples, à la place des lettres différentes qu'elles contiennent, les mêmes nombres ou lettres qu'on leur a supposés égaux dans la proposée, & on conçoit évidemment que le produit de ces plus simples ainsi changées, donneroit l'équation même qui a résulté des substitutions. Elle seroit donc réductible en ces deux plus simples changées par les substitutions qu'on y a conçues. Elle ne seroit donc pas irréductible. Ce qui est contre la supposition.

## REMARQUE.

Cependant, quand en substituant des nombres ou des lettres à la place des lettres différentes d'une équation proposée, l'équation qui en résulte est réductible, ce n'est pas une marque certaine que la proposée soit réductible; car si on suppose dans l'équation irréductible  $x^3 - 3axx + 3abx - aab = 0$ , que  $b = a$ , l'équation  $x^3 - 3axx + 3aax - a^3 = 0$ , qui en résultera, sera réductible.

Cela vient de ce que les lettres connues dans une équation littérale, représentant toutes les grandeurs possibles, on peut supposer de ces grandeurs à leur place qui soient telles, qu'elles donnent une nouvelle équation de même forme que la proposée qui ait des racines commensurables; car il y a des équations réductibles possibles de la même forme que la proposée, & la généralité ou l'indétermination, pour ainsi parler, des lettres de la proposée, est cause qu'elle représente ces équations réductibles de même forme, aussi bien que les autres qui ne sont pas réductibles.

## COROLLAIRE DU CINQUIÈME PROBLÈME,

*Où l'on explique la méthode de trouver tous les diviseurs du dernier terme d'une équation, lorsque ce dernier terme est très-composé.*

70. LA méthode du Problème précédent peut servir à trouver tous les diviseurs du dernier terme d'une équation littérale, quelque composé qu'il puisse être, comme on le va voir dans l'exemple suivant.

$$\begin{aligned} \text{Soit l'équation } & x^4 + abx^3 + aadx^2 + a'dx + a^4d = 0. \\ & - acx^3 - abdx^2 - aabdx - a^3bd \\ & + b^2bx^3 + bcdx^2 + abcdx - a^3cd \\ & + aabxx + a^3bx + aabbd \\ & - a^3xx - aabcx + 2aabcd \\ & + aacxx + ab^3x - ab^3d \\ & - abbx^2 - abccd \\ & + b^3cd \end{aligned}$$

dont le dernier terme est très-composé.

Pour trouver tous les diviseurs de ce dernier terme, 1°. on feindra que c'est une équation; & prenant une des lettres qui s'y trouvent, comme  $a$ , pour l'inconnue de cette équation feinte, on ordonnera l'équation feinte par rapport à l'inconnue  $a$ ; & l'on aura l'équation feinte,

$$\begin{aligned} da^4 - bda^3 + bbd aa - b^3da + b^3cd &= 0. \\ - cda^3 + 2bcd aa - bccda \end{aligned}$$

2°. On verra si tous les termes ne sont point multipliés par une même grandeur, & comme on trouve qu'ils le sont par  $d$ , on les divisera par  $d$ , qui est déjà un des diviseurs simples du dernier terme; il le faut mettre à part, & l'équation feinte sera  $a^4 - ba^3 + bbaa - b'a + b'c = 0$ .

$$-ca^3 + 2bcaa - bcca$$

3°. Il faut chercher par le premier Problème, si une équation lineaire de l'inconnue  $a$  plus ou moins un diviseur du dernier terme  $b'c$ , ne seroit point un diviseur exact de cette équation feinte: Si l'on en trouvoit une qui fût un diviseur exact, on la mettroit à part, comme étant un diviseur lineaire du dernier terme de la proposée, & on chercheroit de même si le quotient n'auroit point de semblables diviseurs lineaires; ce qu'on continueroit jusqu'à ce qu'on trouvât un quotient qui n'eût plus de ces diviseurs lineaires.

Si le premier terme  $a^4$  de l'équation feinte avoit un autre coefficient que l'unité, on se serviroit du second Problème pour trouver les diviseurs de l'équation feinte, dans lesquels l'inconnue  $a$  fût lineaire. Mais comme l'équation feinte qui sert d'exemple n'a aucun de ces diviseurs dans lesquels  $a$  soit lineaire, il faut trouver les diviseurs dans lesquels  $a$  soit du second degré.

4°. Pour les trouver, on y appliquera la méthode du cinquième Problème; c'est-à-dire, supposant que la formule  $x^4 + nx^3 + pxx + qx + r = 0$ , représente cette équation feinte, on supposera  $n = -b - c$ ,  $p = bb + 2bc$ ,  $q = -b'$ ,  $r = b'c$ .

On substituera ces valeurs à la place de  $n, p, q, r$ , dans la réduite  $g^6 - pg^5 + nqg^4 - qqg^3 + nqrgg - prrg + r^3 = 0$ ;

$$-rg^4 - nnr^2g^3 - rrgg + 2prg^2$$

& elle sera changée en cette autre réduite,

$$\begin{aligned} g^6 - bbg^5 + b'g^5 - b'g^5 + b'cgg - b'cgg + b'c^3 &= 0; \\ -2bcg^4 + bbccg^4 - b'c^2g^4 + b'c^2gg - 2b'c^2g & \\ + bc^2g^4 + b'cg^4 + b'c^2gg & \\ - b'c^2g^3 & \end{aligned}$$

Il faudra chercher les diviseurs de deux dimensions communs au dernier terme  $b'c^3$  de cette réduite, & au dernier terme  $b'c$  de l'équation feinte: ces diviseurs sont  $bb, bc$ . Il faudra ensuite substituer successivement  $+bb, -bb, +bc$

—  $bc$  à la place de  $g$  dans la réduite; & parcequ'on trouve que la substitution de  $+bb$  fait détruire toutes les quantitez de la réduite par des signes contraires,  $bb$  est une valeur de  $g$ , c'est-à-dire  $g = bb$ .

Il faut substituer  $bb$  au lieu de  $g$ , & les valeurs de  $n, q, r$ , à leur place, dans  $f = \frac{ng^2 - qg}{3g - r}$ ; & l'on trouvera  $f = -c$ . Substituant ces valeurs de  $f$  & de  $g$  dans  $xx + fx + g = 0$ , qui est dans cet exemple  $aa + fa + g = 0$ , on la changera en  $aa - ca + bb = 0$ , qui est un diviseur exact de la proposée; le quotient est  $aa - ab + cd = 0$ . Ainsi les diviseurs de deux dimensions de la proposée sont  $aa - ac + bb$ ,  $aa - ab + cd$ .

Comme il n'y a pas d'autres diviseurs plus composez à chercher dans notre exemple, pour avoir tous les diviseurs du dernier terme de la proposée, il n'y a qu'à multiplier ceux qu'on a trouvez les uns par les autres, & on les aura tous.

Ce qui étoit proposé.

#### R E M A R Q U E.

**S**I le dernier terme de l'équation feinte du dernier terme de la proposée, étoit encore fort composé, on feroit de ce dernier terme de l'équation feinte, une seconde équation feinte, & on en trouveroit tous les diviseurs, comme on les a trouvé de la première, & ils serviroient ensuite à trouver tous les diviseurs de la première équation feinte.

Cette méthode n'a pas besoin de démonstration, après celle du cinquième Problème.

## SECTION IV.

Où l'on explique la maniere de résoudre les équations qui ont toutes leurs racines égales, ou qui en ont seulement quelques-unes d'égales & commensurables, & la maniere d'abaisser à un moindre degré les équations qui ont quelques-unes de leurs racines égales & incommensurables, & de diminuer le nombre de leurs inconnues, lorsqu'elles en ont plusieurs.

## PROBLÈME VI.

71. RESOUDRE une équation composée, dont toutes les racines sont égales; c'est-à-dire, trouver toutes les racines égales.

IL est évident qu'il suffit d'en trouver une seule; pour cela il faut prendre la racine du dernier terme de la proposée, dont l'exposant soit égal à celui du degré de la proposée, & elle sera la racine de la proposée.

Par exemple, l'équation  $x^3 - 3axx + 3aax - a^3 = 0$ ; contient trois racines égales; pour les trouver, il faut tirer la racine troisième du dernier terme  $a^3$ , & l'on aura  $a$  pour la racine de la proposée, c'est-à-dire  $x = a$ .

De même supposé qu'on sçache que l'équation  $x^4 - 4x^3\sqrt{2} + 6xx\sqrt{4} - 4x\sqrt{8} + 2 = 0$ , a toutes les racines égales, la racine quatrième du dernier terme, qui est  $\sqrt{2}$ , est la racine de la proposée, c'est-à-dire  $x = \sqrt{2}$ .

La démonstration est évidente, si l'on fait reflexion que le dernier terme de l'équation est le produit de toutes les racines.

## PROBLÈME VII.

72. LORSQU'IL y a plusieurs racines égales positives dans une équation composée quelconque, les trouver lorsqu'elles sont commensurables, & abaisser l'équation à un moindre degré, lorsque les racines égales sont incommensurables.

## MÉTHODE GÉNÉRALE.

1°. ON supposera que chaque racine égale est représentée par  $f$ , ainsi  $x = f$ ,  $x - f = 0$ ; &  $xx - 2fx + ff = 0$ ,

représente une équation de deux racines égales;  $x^3 - 3fx + 3ffx - f^3 = 0$ , représente une équation de trois racines égales;  $x^4 - 4fx^3 + 6ffxx - 4f^3x + f^4 = 0$ , en représente une de quatre racines égales, &c.

2<sup>o</sup>. Il faudra diviser la formule générale des équations du second degré, du troisième, du quatrième, &c. par  $xx - 2fx + ff = 0$ , lorsque l'on cherchera deux racines égales; il faudra diviser la formule du troisième, quatrième degré, &c. par  $x^3 - 3fx + 3ffx - f^3 = 0$ , lorsqu'on cherchera trois racines égales; & ainsi de suite. Il faudra continuer la division jusqu'à ce qu'on soit arrivé à un reste, dans lequel  $x$  soit moins élevée d'un degré que dans le diviseur.

3<sup>o</sup>. Il faudra supposer chacun des termes de ce reste égal à zéro, & y mettre l'inconnue  $x = f$  à la place de  $f$ .

Ces équations seront les formules générales propres à faire trouver les racines égales dans chaque degré, quand elles sont commensurables; ou à abaisser l'équation qui aura des racines égales à un moindre degré, quand elles sont incommensurables.

*Application de la méthode aux équations du 2<sup>e</sup>, 3<sup>e</sup>, 4<sup>e</sup>, 5<sup>e</sup> & 6<sup>e</sup> degré, qui ont deux racines égales.*

*Pour le second degré.*

1<sup>o</sup>. IL faut diviser  $xx + nx + p = 0$ , par  $xx - 2fx + ff = 0$ ; & l'on aura le reste  $+ nx + 2fx + p - ff$ , où  $x$  est d'un degré moins élevée que dans le diviseur.

2<sup>o</sup>. Il faut supposer chaque terme de ce reste égal à zéro; & l'on aura  $2f + n = 0$ ,  $-ff + p = 0$ ; il faut substituer dans ces équations  $x = f$ , à la place de  $f$ , & l'on aura  $2x + n = 0$ ,  $-xx + p = 0$ ; ce qui donne immédiatement la valeur de  $x$  dans le second degré: car  $x = -\frac{n}{2}$ ; ou bien encore  $xx = p$ ; d'où l'on déduit  $x = \sqrt{p}$ .

*Pour le troisième degré.*

1<sup>o</sup>. ON divisera  $x^3 + nxx + px + q = 0$ , par  $xx - 2fx + ff = 0$ , jusqu'à ce qu'on soit arrivé au reste  $+ px + 2nfx + 3ffx + q - nff - 2f^3$ .

2<sup>o</sup>. On supposera chaque terme de ce reste égal à zéro; & après avoir mis dans les deux équations qui en naîtront,  $x$  à la place de  $f$ , l'on aura  $3xx + 2nx + p = 0$ , &  $-2x^3 - nxx + q = 0$ .

*Pour*

*Pour le quatrième degré.*

ON trouvera par une semblable operation ces deux formules  $+4x^3 + 3nxx + 2px + q = 0$ , &  $-3x^3 - 2nx^2 - pxx + r = 0$ .

*Pour le cinquième degré.*

ON trouvera  $5x^4 + 4nx^3 + 3pxx + 2qx + r = 0$ , &  $-4x^4 - 3nx^3 - 2px^2 - qxx + s = 0$ .

*Pour le sixième degré.*

ON trouvera ces deux formules  $6x^5 + 5nx^4 + 4px^3 + 3qxx + 2rx + s = 0$ , &  $-5x^5 - 4nx^4 - 3px^3 - 2qx^2 - rxx + t = 0$ .

*Application de la méthode aux équations qui ont trois racines égales.*

*Pour le troisième degré.*

IL faut diviser  $x^3 + nxx + px + q = 0$ , par  $x^3 - 3fxx + 3ffx - f^3 = 0$ , & le reste  $+nxx + px + q = 0$ ,  
 $+3fxx - 3ffx + f^3$

contenant  $xx$ , qui est moins élevée d'un degré que  $x^3$  dans le diviseur; on supposera chacun des termes de ce reste égal à zero, & l'on y substituera  $x$  à la place de  $f$ ; ce qui donnera les trois formules suivantes  $3x + n = 0$ ,  $-3xx + p = 0$ ,  $+x^3 + q = 0$ .

*Pour le quatrième degré.*

ON trouvera par une semblable operation en divisant  $x^4 + nx^3$ , &c. par  $x^4 - 3fxx$ , &c. le reste  $+6ffxx + 3nfx + pxx - 8f^3x - 3nffx + qx + 3f^4 + nf^3 + r = 0$ ; on supposera chaque terme égal à zero; & après avoir substitué  $x = f$  à la place de  $f$ , on aura les trois formules suivantes,  $+6xx + 3nx + p = 0$ ,  $-8x^3 - 3nxx + q = 0$ ,  $+3x^6 + nx^3 + r = 0$ .

*Pour le cinquième degré.*

EN divisant  $x^5 + nx^4$ , &c. par  $x^5 - 3fxx$ , &c. on trouvera le reste  $+10f^3xx - 15f^4x + 6f^5$   
 $+6nffxx - 8nf^3x + 3nf^4$   
 $+3pfx - 3pffx + pf^3$   
 $+qxx + rx + s$

dont on supposera chaque terme égal à zero, & on substituera  $x = f$  à la place de  $f$  dans les trois équations qui en viendront; ce qui donnera les trois formules suivantes.

$$10x^3 + 6nxx + 3px + q = 0.$$

$$-15x^4 - 8nx^3 - 3pxx + r = 0$$

$$6x^5 + 3nx^4 + px^3 + s = 0.$$

*Pour le sixième degré.*

EN divisant  $x^6 + nx^5$ , &c par  $x^3 - 3fxx$ , &c. on trouvera le reste  $+15f^2xx - 24f^3x + 10f^4$

$$+10nf^3xx - 15nf^4x + 6nf^5$$

$$+6pffxx - 8pf^3x + 3pf^4$$

$$+3qfxx - 3qffx + qf^3$$

$$+rxx + sx + t$$

on supposera chaque terme de ce reste égal à zero, & après avoir substitué  $x = f$ , à la place de  $f$ , dans les trois équations qui en viendront, on aura les trois formules suivantes,

$$15x^4 + 10nx^3 + 6pxx + 3qx + r = 0.$$

$$-24x^5 - 15nx^4 - 8px^3 - 3qxx + s = 0$$

$$+10x^6 + 6nx^5 + 3px^4 + qx^3 + t = 0$$

#### A V E R T I S S E M E N T.

ON trouvera par de semblables operations, en divisant les formules generales  $x^4 + nx^3$ , &c.  $x^5 + nx^4$ , &c.  $x^6 + nx^5$ , &c. par  $x^3 - 4fx^2 + 6ffxx - 4f^3x + f^4 = 0$ , les formules pour trouver les quatre racines égales des équations du 4<sup>e</sup>, 5<sup>e</sup>, & 6<sup>e</sup> degré; & ainsi de suite.

On pourroit trouver les mêmes formules, si on élevoit l'équation qui représente les racines égales au degré de la proposée, en la multipliant par une autre équation indéterminée, & comparant ensuite les termes de ce produit avec ceux de la formule generale du même degré.

*Remarque sur les formules qui doivent servir à trouver les racines égales d'une équation.*

73. L E s deux formules qu'on a trouvées dans chaque degré pour découvrir les racines égales, lorsqu'il y en a deux dans une équation, ne sont chacune que l'équation même dont les termes sont multipliés de suite par les termes d'une progression arithmétique, qui va en diminuant, le premier terme



de l'équation par le premier de la progression, le second par le second, & ainsi de suite.

Le premier terme de la progression arithmétique, qui fait trouver la première formule dans chaque degré, est toujours égal à l'exposant de la puissance de l'inconnue dans le premier terme; dans le second degré, où l'exposant de la puissance  $xx$  dans le premier terme est 2, le premier terme de la progression arithmétique est 2; dans le 3<sup>e</sup> degré, c'est 3; dans le 4<sup>e</sup>, c'est 4; & ainsi de suite: d'où l'on voit que chaque terme de la progression arithmétique, qui fait trouver la première formule, est égal à l'exposant de la puissance de l'inconnue  $x$ , dans le terme de l'équation qu'il doit multiplier, & que zero se trouve sous le dernier terme. Ainsi dans le second degré, la progression arithmétique pour trouver la première formule, est 2, 1, 0; dans le 3<sup>e</sup> degré, 3, 2, 1, 0; dans le 4<sup>e</sup> degré, 4, 3, 2, 1, 0; & ainsi de suite.

La progression arithmétique qui fait trouver la seconde formule, est dans le second degré  $-1, 0, +1$ ; dans le 3<sup>e</sup> degré,  $-2, -1, 0, +1$ ; dans le 4<sup>e</sup>,  $-3, -2, -1, 0, +1$ ; dans le 5<sup>e</sup>,  $-4, -3, -2, -1, 0, +1$ ; dans le 6<sup>e</sup>,  $-5, -4, -3, -2, -1, 0, +1$ .

Les trois formules qu'on a trouvées pour découvrir les racines égales des équations, lorsqu'il y en a trois, sont aussi les termes de l'équation même de chaque degré, multipliez de suite par les termes du produit de deux progressions arithmétiques. Pour la première formule du 3<sup>e</sup> degré, les deux progressions sont

$$3, 2, 1, 0.$$

$$2, 1, 0, -1.$$

Leur produit est  $6, 2, 0, 0.$

Divisant chaque terme par 2, l'on a  $3, 1, 0, 0.$

Pour la seconde formule du 3<sup>e</sup> degré, les deux progressions arithmétiques sont

$$3, 2, 1, 0.$$

$$-1, 0, +1, +2.$$

Leur produit est  $-3, 0, +1, 0.$

Pour la troisième formule du 3<sup>e</sup> degré, les deux progressions arithmétiques sont

$$2, 1, 0, -1.$$

$$1, 0, -1, -2.$$

Leur produit est  $2, 0, 0, +2.$

Divisant chaque terme par 2, l'on a  $1, 0, 0, 1.$

Z ij

# 180 ANALYSE DEMONTREE

Pour la premiere formule du 4<sup>e</sup> degré, les deux progres-  
sions arithmetiques sont

$$4, 3, 2, 1, 0.$$

$$3, 2, 1, 0, -1.$$

Leur produit est

$$12, 6, 2, 0, 0,$$

Divisant chaque terme par 2, l'on a 6, 3, 1, 0, 0.

Pour la seconde formule du 4<sup>e</sup> degré, les deux progres-  
sions sont

$$4, 3, 2, 1, 0.$$

$$-2, -1, 0, +1, +2.$$

Leur produit est

$$-8, -3, 0, +1, 0.$$

Pour la troisieme formule du 4<sup>e</sup> degré, les deux progres-  
sions sont

$$3, 2, 1, 0, -1.$$

$$2, 1, 0, -1, -2.$$

Leur produit est

$$6, 2, 0, 0, +2.$$

Divisant chaque terme par 2, l'on a 3, 1, 0, 0, 1.

Pour la premiere formule du 5<sup>e</sup> degré, les deux progres-  
sions sont

$$5, 4, 3, 2, 1, 0.$$

$$4, 3, 2, 1, 0, -1.$$

Leur produit est

$$20, 12, 6, 2, 0, 0.$$

Divisant chaque terme par 2, l'on a 10, 6, 3, 1, 0, 0.

Pour la seconde formule du 5<sup>e</sup> degré, les deux progres-  
sions sont

$$5, 4, 3, 2, 1, 0.$$

$$-3, -2, -1, 0, +1, +2.$$

Leur produit est

$$-15, -8, -3, 0, +1, 0.$$

Pour la troisieme formule du 5<sup>e</sup> degré, les deux progres-  
sions sont

$$4, 3, 2, 1, 0, -1.$$

$$3, 2, 1, 0, -1, -2.$$

Leur produit est

$$12, 6, 2, 0, 0, +2.$$

Divisant chaque terme par 2, l'on a 6, 3, 1, 0, 0, 1.

Pour la premiere formule du 6<sup>e</sup> degré, les deux progres-  
sions sont

$$6, 5, 4, 3, 2, 1, 0.$$

$$5, 4, 3, 2, 1, 0, -1.$$

Leur produit est

$$30, 20, 12, 6, 2, 0, 0.$$

Divisant chaque terme par 2, l'on a 15, 10, 6, 3, 1, 0, 0.

Pour la seconde formule du 6<sup>e</sup> degré, les deux progres-  
sions sont

$$6, 5, 4, 3, 2, 1, 0.$$

$$-4, -3, -2, -1, 0, +1, +2.$$

Leur produit est

$$-24, -15, -8, -3, 0, +1, 0.$$

Pour la troisième formule du 6<sup>e</sup> degré, les deux progressions sont

$$5, 4, 3, 2, 1, 0, -1.$$

$$4, 3, 2, 1, 0, -1, -2.$$

Leur produit est  $20, 12, 6, 2, 0, 0, +2.$

Divisant chaque terme par 2, l'on a  $10, 6, 3, 1, 0, 0, 1.$

S'il y avoit quatre racines égales, on trouveroit quatre formules pour les découvrir dans chaque degré, dont chacune seroit le produit des termes de l'équation proposée, par les termes du produit de trois progressions arithmétiques.

S'il y avoit cinq racines égales, on trouveroit cinq formules pour les découvrir dans chaque degré; chacune de ces formules seroit le produit des termes de l'équation, par les termes du produit de quatre progressions arithmétiques; & ainsi de suite. Il est facile de les trouver par la méthode.

*Application de la méthode à des exemples, c'est-à-dire, aux équations particulières qui ont plusieurs racines égales.*

## E X E M P L E I.

L'EQUATION  $x^3 + 3xx - 9x + 5 = 0$ , a deux racines égales; pour les trouver, il n'y a qu'à substituer dans les deux formules du troisième degré,  $3xx + 2nx + p = 0$ ,  $-2x^3 - nxx + q = 0$ , les valeurs de  $n, p, q$ ; ou bien, ce qui est plus court, il n'y a qu'à multiplier les termes de la proposée, par les termes de la progression arithmétique,  $3, 2, 1, 0$ ; ou bien, ce qui est la même chose, multiplier chaque terme de la proposée par le nombre qui est l'exposant du degré où l'inconnue  $x$  est élevée dans ce terme, & le dernier terme où  $x$  n'est point par zero; & l'on aura  $3x^3 + 6xx - 9x = 0$ ; qui se réduit à  $3xx + 6x - 9 = 0$ , qui peut encore être divisée par 3, & l'on aura  $xx + 2x - 3 = 0$ .

Il faut ensuite multiplier les termes de la proposée par les termes de la progression arithmétique  $-2, -1, 0, +1$ ; & l'on aura  $-2x^3 - 3xx + 5 = 0$ .

Pour trouver ensuite la racine égale de la proposée, il n'y a qu'à chercher le plus grand diviseur commun de deux de ces trois équations; sçavoir la proposée  $x^3 + 3xx - 9x + 5 = 0$ , & les deux autres qu'on vient de former;  $xx + 2x - 3 = 0$ ,  $-2x^3 - 3xx + 5 = 0$ ; l'on trouvera que  $-x$

$+1=0$ , ou bien  $x-1=0$ , est ce plus grand diviseur commun; ainsi  $x=1$ , & 1 est la racine égale qu'on cherche.

## E X E M P L E I I.

P O U R trouver les racines égales de  $x^4 - 4x + 3 = 0$ , qui en contient deux, on multipliera chaque terme par l'exposant de  $x$ , & le dernier terme par zero; & l'on aura  $4x^4 - 4x = 0$ , qui se réduit à  $4x^3 - 4 = 0$ ; divisant par 4, l'on aura  $x^3 - 1 = 0$ ; d'où l'on déduit  $x = 1$ : ainsi il est inutile de multiplier la proposée par l'autre progression arithmétique  $-3, -2, -1, 0, +1$ , puisque la racine qu'on cherche est  $x = 1$ ; & l'on trouvera que  $x - 1 = 0$ , est un diviseur commun de la proposée, & de  $x^3 - 1 = 0$ .

## E X E M P L E I I I.

P O U R trouver chacune des trois racines égales que contient l'équation  $x^4 - 6xx + 8x - 3 = 0$ , on la multipliera par les termes du produit des deux progressions.

$$4, 3, 2, 1, 0.$$

$$3, 2, 1, 0, -1.$$


---

qui est . . . 12, 6, 2, 0, 0,

ou plutôt par la moitié de chaque terme de ce produit, qui étant divisé par 2, se réduit à 6, 3, 1, 0, 0; & l'on aura  $6x^4 - 6xx = 0$ , qui se réduit à  $xx - 1 = 0$ , d'où l'on déduit  $x = 1$ ; ainsi 1 est la racine égale qu'on cherche.

Si l'on n'avoit pas trouvé d'abord la racine égale qu'on cherche, on auroit multiplié la proposée par les termes du produit des deux progressions

$$4, 3, 2, 1, 0.$$

$$-2, -1, -0, +1, +2.$$


---

$$-8, -3, 0, +1, 0.$$

& ensuite par les termes du produit des deux autres progressions

$$3, 2, 1, 0, -1.$$

$$2, 1, 0, -1, -2.$$


---

qui est . . . 6, 2, 0, 0, +2.

ou plutôt par les termes de la moitié de ce produit, qui sont 3, 1, 0, 0, 1.

Il auroit ensuite fallu chercher le plus grand diviseur com-

mun de la proposée, & de quelque'une des trois équations formées par le produit des progressions arithmétiques; ou ce qui est quelquefois plus facile, il auroit falu trouver le plus grand diviseur commun de deux de ces trois équations, & il auroit falu connoître la racine qu'on cherche.

*Démonstration du septième Problème.*

**P**OUR rendre cette démonstration plus claire, on l'appliquera à un exemple du troisiéme degré. On suppose que  $x^3 + nxx + px + q = 0$ , représente une équation qui a deux racines égales positives commensurables, & que  $xx - 2fx + ff = 0$ , représente l'équation composée de ces deux racines égales; ainsi  $f$  représente chacune de ces racines égales, &  $x = f$ , ou bien  $x - f = 0$ .

1<sup>o</sup>. Il est évident que quand la proposée contient deux racines égales commensurables,  $xx - 2fx + ff = 0$ , divise la proposée sans reste; par conséquent le reste  $3ffx - 2f^3$   
 $+ 2nfx - nff$   
 $+ px + q$

est égal à zero; & de plus, chaque terme de ce reste est égal à zero, autrement la division ne se feroit pas sans reste, contre la supposition.

2<sup>o</sup>. Il est donc clair que si l'on conçoit la grandeur commensurable que représente  $f$ , mise à la place de  $f$ , dans les deux équations du reste  $3ff + 2nf + p = 0$ ,  $- 2f^3 - nff + q = 0$ ; ou, ce qui est la même chose,  $3xx + 2nx + p = 0$ ,  $- 2x^3 - nxx + q = 0$ ; toutes les quantitez de chacune de ces équations se détruiront par des signes contraires: Donc  $x$  moins cette grandeur, est une équation lineaire qui divise exactement l'une & l'autre. Par la supposition, cette équation lineaire divise aussi la proposée; par conséquent la proposée & ces deux équations ont un diviseur commun, qui est une équation lineaire faite de  $x$ , moins la grandeur représentée par  $f = 0$ : Il est donc évident qu'en cherchant le diviseur commun de la proposée & de ces deux équations, on aura la racine qu'on cherche. Ainsi la méthode fait trouver necessairement la racine égale commensurable qu'on cherche. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Ce même raisonnement peut s'appliquer à tous les degrez, & à toutes les racines égales que peut contenir chaque degré.

## C O R O L L A I R E.

**I**L suit de là que quand on ne trouve point de diviseur commun, la racine égale est incommensurable.

*Démonstration du cas où les racines égales sont incommensurables.*

**S**UPPOSÉ que  $x^3 + nx^2 + pxx + qx + r = 0$ , représente une équation qui a deux racines égales incommensurables, & que  $f$  représente chacune de ces racines égales; l'on aura  $x - f = 0$ ; &  $xx - 2fx + ff = 0$ , représentera l'équation composée de ces deux racines égales;  $x^3 - 3fxx + 3ffx - f^3 = 0$ , en représentera une composée de trois racines égales, &c. Il est évident que si la grandeur incommensurable, représentée par  $f$ , étoit mise à sa place dans  $xx - 2fx + ff = 0$ , la proposée seroit divisée sans reste par cette équation ainsi changée; par conséquent le reste  $4f^3x + 3nffx + 2pfx + qx - 3f^4 - 2nf^3 - pff + r$ , seroit égal à zero, & chaque terme égal à zero, puisqu'autrement la division ne seroit pas sans reste. Si donc l'on conçoit que la grandeur incommensurable représentée par  $f$ , est substituée dans  $4f^3 + 3nff + 2pf + q = 0$ , &  $-3f^4 - 2nf^3 - pff + r = 0$ ; ou, ce qui revient au même, dans  $4x^3 + 3nxx + 2px + q = 0$ ,  $-3x^4 - 2nx^3 - pxx + r = 0$ , il est certain que les quantitez de chacune de ces deux équations se détruiront par des signes oppoiez. Les deux équations représentées par  $4x^3 + 3nxx + 2px + q = 0$ , &  $-3x^4 - 2nx^3 - pxx + r = 0$ , ont donc une racine commune, quoiqu'elle soit incommensurable, laquelle est aussi une racine de la proposée.

La méthode du septième Problème fait donc trouver, quand une équation a des racines égales incommensurables, une équation abaissée à un moindre degré, qui a néanmoins pour une de ses racines, une des racines égales de la proposée. *Ce qu'il falloit démontrer.*

## C O R O L L A I R E.

**Q**UAND il y a deux racines égales dans une équation, on la peut abaisser à une équation d'un degré moindre que la proposée; quand il y en a trois, on la peut abaisser à une équation moindre de deux degrés que la proposée; & ainsi de suite.

AVERTISSEMENT.

## A V E R T I S S E M E N T.

**Q**UAND les racines égales étant commensurables, on abaisse l'équation qui les contient, en la divisant par l'équation composée des racines égales, il est évident que l'équation abaissée contient les autres racines de la proposée : Mais quand elles sont incommensurables, l'équation abaissée a encore la racine égale qui lui est commune avec la proposée ; mais il ne s'ensuit pas qu'elle contienne les autres racines de la proposée.

*Autre démonstration de l'usage des progressions arithmétiques, pour découvrir les racines égales des équations composées.*

## T H E O R È M E.

74. *LORSQU'UNE équation n'a que des racines égales positives, si on multiplie de suite ses termes par ceux d'une progression arithmétique quelconque, le produit sera une équation qui aura encore toutes les racines égales de la première, excepté une seule.*

Ainsi lorsqu'une équation est composée de deux racines égales positives, le produit aura encore une de ces racines ; si elle est composée de 3, le produit en aura 2 ; si elle l'est de 4, le produit en aura 3 ; & ainsi de suite.

D'où il suit que quand l'équation est composée de trois racines égales, si on multiplie de suite ses termes par ceux de deux progressions arithmétiques quelconques ; ou, ce qui est la même chose, par les termes du produit de deux progressions arithmétiques quelconques, l'équation qui en viendra aura encore une des racines égales de la première.

Si elle est composée de quatre racines égales, & qu'on multiplie de suite ses termes par trois progressions arithmétiques quelconques, ou par les termes de leur produit, l'équation qui en viendra aura encore une des racines égales de la première, & ainsi de suite.

## D É M O N S T R A T I O N.

**P**OUR le démontrer, il n'y a qu'à prendre les équations  $xx - 2fx + ff = 0$ ,  $x^3 - 3fxx + 3ffx - f^3 = 0$ , &c. qui représentent toutes les équations composées de deux, de trois racines égales, &c. & multiplier les termes de suite de

ces équations par ceux de la progression arithmétique  $a, a+b, a+2b, a+3b, \&c.$  qui représente en general toutes les progressions arithmétiques; & diviser par  $x-f=0$ , l'équation qui viendra du produit de la première  $xx-2fx+ff=0$ ; diviser par  $xx-2fx+ff=0$ , celle qui viendra du produit de la seconde  $x^3-3fxx, \&c.$  & ainsi de suite; & l'on trouvera que la division se fera exactement.

Par exemple, si on multiplie  $x^3-3fxx+3ffx-f^3=0$ ,  
 par  $a, a+b, a+2b, a+3b$   
 on aura le produit  $ax^3-3afxx+3affx-f^3=0$   
 $-3bfxx+6bffx-3bf^3$

divisant ce produit par  $xx-2fx+ff=0$ , on trouvera que la division se fait exactement, & que le quotient exact est  $ax-af-3bf$ .

De plus, le produit est toujours une équation; car en substituant  $f$  à la place de  $x$  dans le produit, tous les termes se détruisent par des signes oppoiez.

Si on multiplioit les termes du produit par la même progression arithmétique generale, ou par quatre des termes de cette progression pris de suite, le produit qu'on trouveroit, (qui seroit le même qu'on auroit trouvé en multipliant d'abord l'équation  $x^3-3fxx, \&c.$  par les termes du produit des deux progressions, terme par terme) se pourroit diviser exactement par  $x-f=0$ .

Et comme les formules des équations des racines égales sont generales, & que l'expression de la progression arithmétique est aussi generale, il est évident que la démonstration est generale.

#### C O R O L L A I R E I.

**S**I tous les termes d'une équation  $xx-2fx+ff=0$ ,  $x^3-3fxx+3ffx-f^3=0$ , &c. qui n'a que des racines égales, sont multipliez par une même grandeur quelconque  $c$ , & qu'on multiplie les termes du produit  $cxx-2cfx+cff=0$ , par les termes d'une progression arithmétique, il est évident que le produit qui en viendra, se pourra diviser exactement par le même diviseur  $x-f=0$ .

#### T H E O R È M E.

**U**N E équation qui contient des racines égales, & des racines inégales, peut être conçue comme étant le produit de



L'équation composée des seules racines égales, par l'équation composée des seules racines inégales. Par exemple, une équation du cinquième degré qui contiendra deux racines égales, & trois inégales, peut être conçu comme le produit de  $xx - 2fx + ff = 0$ , par  $x^3 + nxx + px + q = 0$ .

Ce produit peut être conçu distingué en quatre parties, comme on le voit ici:

$$\begin{array}{rcl}
 \overline{xx - 2fx + ff} \times x^3 & = & x^5 - 2fx^4 + ff x^3 \text{ Première Partie.} \\
 \overline{xx - 2fx + ff} \times nxx & = & + nx^5 - 2nfx^4 + nff xx \text{ Seconde Partie.} \\
 \overline{xx - 2fx + ff} \times px & = & + px^3 - 2pfx x + pff x \text{ Troisième.} \\
 \overline{xx - 2fx + ff} \times q & = & + qxx - 2qfx + qff \text{ Quatr.}
 \end{array}$$

$a, a+b, a+2b, a+3b, a+4b, a+5b$

Si on multiplie les termes de suite de l'équation du cinquième degré, qui est le produit des deux autres, par la progression arithmétique générale  $a, a+b$ , &c. il est évident que les trois termes de la première partie seront multipliés par les trois termes  $a, a+b, a+2b$ ; les trois termes de la seconde partie, par  $a+b, a+2b, a+3b$ ; les trois termes de la troisième, par  $a+2b, a+3b, a+4b$ ; les trois termes de la quatrième, par  $a+3b, a+4b, a+5b$ .

Il est évident, par le premier Corollaire, qu'après ces multiplications, le produit de chaque partie pourra se diviser exactement par  $x-f=0$ ; par conséquent l'équation entière se pourra diviser exactement par  $x-f=0$ .

## C O R O L L A I R E I I.

C'E qu'on vient de démontrer, fait voir clairement que quand une équation a des racines égales, & des racines inégales, si on en multiplie les termes de suite par ceux d'une progression arithmétique quelconque, l'équation qui viendra du produit aura encore toutes les racines égales de la première, excepté une.

On prouvera de même que si une équation a trois racines égales, avec des racines inégales, & qu'on en multiplie les termes par ceux de deux progressions arithmétiques quelconques, ou par les termes de leur produit, l'équation qui en viendra aura encore une des racines égales de la première, & ainsi des autres cas.

*Usage des progressions arithmétiques, pour résoudre les équations qui ont des racines égales, ou pour les abaisser à un moindre degré.*

75. QUAND par la nature du Problème on connoîtra qu'une équation composée a des racines égales, si elle en a deux, il faut multiplier ses termes par ceux d'une progression arithmétique arbitraire: On pourra encore les multiplier par les termes d'une autre progression; les équations qui viendront de ces multiplications auront une racine commune entr'elles & avec la proposée; ainsi il faudra chercher leur commun diviseur, qu'on trouvera toujours si la racine est commensurable: & si elle est incommensurable, il y aura quelque équation parmi celles qu'on a trouvées, qui sera d'un moindre degré, & qui aura encore parmi ses racines, la racine égale de la proposée.

S'il y avoit dans la proposée trois racines égales, on trouveroit des équations en multipliant les termes de la proposée par ceux de deux progressions arithmétiques arbitraires, qui auroient encore une des racines égales de la proposée.

S'il y avoit quatre racines égales, il faudroit se servir de trois progressions arithmétiques arbitraires; & ainsi de suite.

Il faut choisir parmi les progressions arithmétiques, celles qui donneront une équation plus facile à résoudre.

On remarquera que quand il y a des termes évanouis dans l'équation qui a des racines égales, comme dans l'équation  $x^4 + 0x^3 + 0xx - 4x + 3 = 0$ , il faut remplir par des zeros les termes évanouis, afin qu'en se servant de la progression arithmétique, on y puisse distinguer les termes qui doivent multiplier ceux de la proposée qui leur répondent.

*Application de la méthode précédente à des exemples de Geometrie; c'est-à-dire, à des équations qu'on trouve en résolvant des Problèmes de Geometrie, dont la résolution donne la résolution de ces Problèmes.*

#### AVERTISSEMENT.

IL y a plusieurs Problèmes de Geometrie qu'on résout par cette méthode des racines égales; car la résolution de plusieurs Problèmes dépend souvent de ce qu'en supposant qu'une des inconnues de l'équation du Problème a deux ou plusieurs

valeurs égales, ou que deux inconnues ont deux ou plusieurs valeurs égales, il arrive qu'en multipliant les termes de l'équation par ceux d'une ou de plusieurs progressions arithmétiques, on peut par le moyen des équations nouvelles qui en viennent, déterminer la valeur de celle des inconnues qui donne la résolution du Problème, ou faire évanouir une ou plusieurs des inconnues de l'équation du Problème; ce qui donne une nouvelle équation qui résout le Problème.

## E X E M P L E I.

ON a l'équation  $x^3 - axx + y^3 = 0$ , qui exprime un Problème de Geometrie; on demande la valeur de  $x$ , lorsque  $x$  a deux valeurs égales dans cette équation.

Il faut multiplier les termes de l'équation par ceux de la progression 3, 2, 1, 0, ou chaque terme de l'équation par l'exposant de la puissance de  $x$  dans ce terme.

$$\begin{array}{rcccc} x^3 & + & 0xx & - & axx & + & y^3 & = & 0. \\ 3 & & 2 & & 1 & & 0 & & \\ \hline 3x^3 & & & - & axx & & & = & 0. \end{array}$$

L'on trouve l'équation nouvelle  $3x^3 - axx = 0$ , ou bien  $3xx = ay$ ; d'où l'on déduit  $y = \frac{3xx}{a}$ , &  $y^3 = \frac{27x^3}{a^3}$ ; mettant ces valeurs de  $y$ ,  $y^3$ , dans la proposée, elle se change en celle-ci,  $x^3 - 3x^3 + \frac{27x^3}{a^3} = 0$ ; ou bien  $27x^3 - 2a^3 = 0$ ; d'où l'on déduit  $x = \sqrt[3]{\frac{2a^3}{27}} = \frac{1}{3} a \sqrt[3]{2}$ . Ce qui étoit proposé.

On trouvera aussi  $y = \frac{1}{3} a \sqrt[3]{4}$ , en mettant la valeur de  $x$  dans  $y = \frac{3xx}{a}$ .

On détermineroit de même les valeurs de  $x$  & de  $y$ , en multipliant la proposée  $x^3 - axx + y^3 = 0$ , par la progres-

$$\begin{array}{rcccc} & & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline & & & & & & & & \end{array}$$

$$- 2ayx + 3y^3 = 0;$$

sion 0, 1, 2, 3, car l'on auroit la nouvelle équation  $- 2ayx + 3y^3 = 0$ , ou bien  $- 2ax + 3yy = 0$ : en se servant des deux équations  $3xx - ay = 0$ , &  $- 2ax + 3yy = 0$ , dans lesquelles  $x$  doit avoir une même valeur, on auroit par la premiere  $xx = \frac{ay}{3}$ ; & par la seconde,  $x = \frac{3yy}{2a}$ ; donc  $xx = \frac{9y^2}{4a} = \frac{ay}{3}$ ; d'où l'on déduit  $y^3 = \frac{4a^3}{27}$ , &  $y = \frac{1}{3} a \sqrt[3]{4}$ ;

Aa iij

substituant cette valeur de  $y$  dans  $x = \frac{122}{12}$ , l'on aura  $x = \frac{1}{3} a^{\frac{3}{2}}$ , comme on l'avoit déjà trouvé.

Enfin on trouveroit les mêmes valeurs de  $x$  & de  $y$  par la méthode du plus grand commun diviseur ; car puisque la proposée  $x^3 - ayx + y^3 = 0$ , & chacune des deux nouvelles équations trouvées par le moyen de la progression arithmétique,  $3xx - ay = 0$ ,  $-2ax + 3yy = 0$ , ont une racine commune, on doit trouver cette racine commune en cherchant le plus grand commun diviseur de  $x^3 - ayx + y^3 = 0$ , & de laquelle on voudra des deux autres, par exemple, de  $3xx - ay = 0$ , jusqu'à ce qu'on soit arrivé au diviseur  $-2ax + 3yy = 0$ , dans lequel  $x$  est linéaire, qui sera un diviseur exact, en supposant égal à zero le reste qu'il fait trouver,  $27y^3 - 4a^3 = 0$ , dans lequel  $x$  n'est plus ; car l'équation du reste donne  $y^3 = \frac{4a^3}{27}$ , ou  $y = \frac{1}{3} a^{\frac{3}{4}}$  ; & substituant cette valeur dans le diviseur où  $x$  est linéaire,  $-2ax + 3yy = 0$ , l'on trouve  $x = \frac{1}{3} a^{\frac{3}{2}}$ , comme on l'avoit trouvé.

#### AVERTISSEMENT.

ON a mis ces trois manières de déterminer les valeurs de  $x$  & de  $y$ , lorsque  $x$  a deux racines égales, afin d'en faire concevoir le rapport.

#### REMARQUE.

IL faut remarquer qu'on ne peut supposer que le dernier diviseur où  $x$  est linéaire, soit un diviseur exact, en faisant le reste qui ne contient plus  $x$ , égal à zero, que quand il y a une ou plusieurs indéterminées dans ce reste ; car s'il n'y avoit que des grandeurs déterminées dans le reste, on ne pourroit pas les supposer toutes ensemble égales à zero, à moins qu'elles ne se détrussissent par des signes opposés : mais quand il y a des indéterminées dans le reste, elles se déterminent par cette supposition, que le reste est égal à zero, ou que chacun des termes du reste est égal à zero, de manière que les valeurs des indéterminées trouvées par la supposition du reste égal à zero, étant substituées à leur place dans la proposée, & dans le diviseur où  $x$  est linéaire, ce diviseur ainsi déterminé, est nécessairement un diviseur exact de la proposée.

EXEMPLE II.

SOIT l'équation  $ax - yy = 0$ , &  $x = s - \sqrt{rr - tt - 2ty - yy}$ ; en substituant la valeur de  $x$ , prise dans la seconde, dans  $ax - yy = 0$ , après avoir ôté les incommensurables, on trouvera l'équation suivante,  $y^4 - 2asyy + 2aaty + aass = 0$ ;  
 $+ aayy \quad - aarr$   
 $+ aatt$

on suppose que  $x, y, r$ , sont des inconnues, & que  $a, s, t$ , sont connues.

1°. Il s'agit d'abaisser l'équation précédente  $y^4 - 2asyy$ , &c.  
 $+ aayy$

à un moindre degré, & de trouver les valeurs de  $y$  par les seules grandeurs connues, en supposant que  $y$  a deux valeurs égales dans l'équation  $y^4$ , &c.

Il faut multiplier les termes de l'équation, chacun par l'exposant de la puissance de  $y$ , qui est dans ce terme; c'est-à-dire, par 4, 3, 2, 1, 0.

$$\begin{array}{r} y^4 - 2asyy + 2aaty + aass = 0; \\ + aayy \quad - aarr \\ + aatt \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4, \quad 3, \quad 2, \quad 1, \quad 0 \\ \hline \end{array}$$

& l'on aura le produit  $4y^4 - 4asyy + 2aaty = 0$ ,  
 $+ 2aayy$

ou bien  $2y^4 - 2asy + aat = 0$ , qui est une équation du  
 $+ aay$

troisième degré, par laquelle on peut déterminer la valeur de  $y$ , parcequ'elle ne contient que des grandeurs connues avec l'inconnue  $y$ ; ainsi l'on a trouvé l'équation proposée.

2°. En supposant à présent qu'il n'y a dans l'équation précédente  $y^4 - 2asyy + 2aaty + aass = 0$ , que la grandeur  $a$   
 $+ aayy \quad - aarr$   
 $+ aatt$

de connue, & que toutes les autres sont inconnues, il s'agit de trouver la valeur de  $t$ , qui ne contienne d'inconnue que  $y$ , en supposant que  $y$  a trois valeurs égales dans l'équation précédente.

Il faut dans ce cas multiplier l'équation proposée par les termes des deux progressions arithmétiques ici marquées,

$$\begin{array}{r}
 y^4 * \quad 2asyy + 2aaty + aass = 0, \\
 + aayy \quad - aarr \\
 + aatt:
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 4, 3, 2, \quad 1, \quad 0, \\
 2, 1, 0, \quad -1, \quad -2,
 \end{array}$$

& l'on aura le produit  $8y^4 - 2aaty = 0$ , qui se réduit à  $4y^4 - aat = 0$ ; d'où l'on déduit  $t = \frac{4y^4}{a}$ . Ce qui étoit proposé.

3°. En supposant que toutes les lettres de la même équation sont des inconnues, excepté la grandeur  $a$ , & que  $y$  a trois valeurs égales; il faut trouver une équation qui ne contienne pour inconnues que  $s$  &  $t$ , & que toutes les autres inconnues ne s'y trouvent point.

Il faut multiplier l'équation  $y^4 * - 2asyy + 2aaty + aass = 0$ , par les termes des deux progressions arithmétiques ici marquées,

$$\begin{array}{r}
 4, 3, 2, \quad 1, \quad 0, \\
 0, 1, 2, \quad 3, \quad 4,
 \end{array}$$

& l'on trouvera l'équation  $0, - 8asyy + 6aaty = 0$ , qui se réduit à  $- 4asy + 3aat = 0$ ; d'où l'on déduit

$y = \frac{3aat}{4s - 2a} = \frac{3at}{4s - 2a}$ ; supposant, pour abréger le calcul,  $4s - 2a = 4v$ ; c'est-à-dire,  $s - \frac{1}{2}a = v$ , l'on aura  $y = \frac{3at}{4s - 2a} = \frac{3at}{4v}$ ; d'où l'on déduira  $y^4 = \frac{27a^3t^3}{64v^4}$ ; mettant cette valeur de  $y^4$  dans  $4y^4 - aat = 0$ , qu'on a trouvée dans le second article, l'on aura  $\frac{27a^3t^3}{16v^4} - aat = 0$ , qui se réduit à  $27att - 16v^4 = 0$ , qui est l'équation qu'on cherche, car en mettant  $s - \frac{1}{2}a = v$ , à la place de  $v$  dans  $27att - 16v^4 = 0$ , l'on aura  $27att - 16s^4 + 24ass - 12aas + 2a^4 = 0$ .

On trouveroit cette même équation en cherchant le plus grand diviseur commun des deux équations  $4y^4 - aat = 0$ , &  $- 4asy + 2aay + 3aat = 0$ , trouvées par les progressions arithmétiques, & continuant la recherche jusqu'à ce que l'inconnue  $y$  ne fût plus dans le reste, car on trouveroit le reste  $27att - 16s^4 + 24ass - 12aas + 2a^4 = 0$ .

ANALYSE



## ANALYSE COMPOSÉE,

O U

ANALYSE QUI ENSEIGNE A RESOUDRE  
les Problèmes qui se réduisent à des équations  
composées.

## L I V R E V.

*De la résolution des équations composées en  
particulier.*

## S E C T I O N I.

*De la résolution des équations du second degré.*

## A V E R T I S S E M E N T.

ON a déjà donné deux manières de résoudre les équations du second degré<sup>\*</sup>; mais on a remis le détail de tout ce qui regarde ces équations à cet endroit, qui en est le lieu propre; c'est pourquoi on va expliquer ici une méthode générale de trouver les deux racines de toutes ces équations, & on l'appliquera à tous les cas possibles.

\* 6;  
& 41.  
*Remarque  
du premier  
exemple.*

On suppose dans ce cinquième Livre, que les équations sont sans fractions & sans incommensurables.

## P R O B L È M E I.

76. TROUVER les deux racines de toute équation du second degré.

## M É T H O D E G É N É R A L E.

ON supposera que l'équation générale  $xx + nx + p = 0$ , représente toutes les équations du second degré; de manière (comme on l'a déjà dit plusieurs fois) que  $+n$  repré-

Tome I.

Bb

sente le coefficient du second terme avec son signe, & zero; si le second terme est évanoui; &  $+p$  représente le dernier terme avec son signe: Ce qu'il faudra toujours entendre dans le 3<sup>e</sup>, 4<sup>e</sup> degré, &c. On supposera ensuite que l'équation lineaire  $x - f + g = 0$ , représente par ses indéterminées  $f, g$ , celle des deux équations lineaires qui contient la premiere racine: Ainsi  $+f - g$  représente la premiere racine.

Pour trouver cette premiere racine & la seconde, on se servira de laquelle on voudra des deux méthodes suivantes.

1<sup>o</sup>. On supposera que la seconde équation lineaire est  $x - f - g = 0$ ; on multipliera  $x - f + g = 0$ , par  $x - f - g = 0$ , & on comparera chaque terme du produit  $xx - 2fx + ff = 0$ , excepté le premier terme, avec le terme corres-

pondant de l'équation generale  $xx + nx + p = 0$ ; ce qui donnera ces deux équations particulières  $-2f = n$ ,  $+ff - gg = +p$ ; d'où l'on déduira  $f = -\frac{n}{2}$ , &  $g = \sqrt{\frac{nn}{4} - p}$ ; mettant ces valeurs de  $f$  & de  $g$  dans les deux équations lineaires indéterminées  $x - f + g = 0$ ,  $x - f - g = 0$ , elles seront changées, la premiere en  $x + \frac{n}{2} + \sqrt{\frac{nn}{4} - p} = 0$ ; la seconde en  $x + \frac{n}{2} - \sqrt{\frac{nn}{4} - p} = 0$ .

Ainsi la formule generale de la premiere racine sera  $x = -\frac{n}{2} - \sqrt{\frac{nn}{4} - p}$ ; la formule generale de la seconde racine sera  $x = -\frac{n}{2} + \sqrt{\frac{nn}{4} - p}$ .

2<sup>o</sup>. Ou bien on divisera l'équation generale  $xx + nx + p = 0$ , par l'équation lineaire indéterminée  $x - f + g = 0$ ; & continuant la division jusqu'à ce que  $x$  ne soit plus dans le reste, on trouvera le reste  $gg - ng + p = 0$ , & le

quotient  $x + n = 0$ : En supposant ce reste égal à zero, &

son second terme aussi égal à zero, l'équation indéterminée  $x - f + g = 0$ , sera un diviseur exact de la proposée; & le quotient  $x + n = 0$  sera exact.



Or par la supposition de ce reste égal à zero, l'on a deux équations particulieres, sçavoir la premiere  $2f = -n$ ; d'où l'on déduit  $f = -\frac{n}{2}$ ; la seconde  $gg^* + p = 0$ , dans

$$\begin{array}{l} +nf \\ +ff \end{array}$$

laquelle substituant  $-\frac{n}{2}$  à la place de  $f$ , l'on trouve  $gg - \frac{n^2}{4} + p = 0$ , d'où l'on déduit  $g = \sqrt{\frac{n^2}{4} - p}$ ; substituant ces valeurs dans le diviseur  $x - f + g = 0$ , & dans le quotient  $x + n + f - g = 0$ , l'on trouve pour le diviseur  $x + \frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{4} - p} = 0$ , & pour le quotient  $x + \frac{n}{2} - \sqrt{\frac{n^2}{4} - p} = 0$ .

Ainsi la formule generale de la premiere racine sera  $x = -\frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{n^2}{4} - p}$ ; & la formule generale de la seconde sera  $x = -\frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{n^2}{4} - p}$ .

*Application des formules de la résolution generale aux équations particulieres du second degré.*

## E X E M P L E I.

**S**OIT l'équation  $xx - ab = 0$ , dont il faut trouver les deux racines.

Pour appliquer l'équation generale  $xx + nx + p = 0$ , à cette équation particuliere, dont le second terme est évanoui, l'on supposera  $n = 0$ ,  $+p = -ab$ ; ainsi dans les deux formules des racines on supposera  $n = 0$ , &  $+p = -ab$ . Substituant donc  $-ab$  au lieu de  $+p$  dans les deux formules generales des racines, la premiere racine de la proposée sera  $x = -\frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{n^2}{4} - p} = -\sqrt{ab}$ ; la seconde sera  $x = -\frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{n^2}{4} - p} = +\sqrt{ab}$ . *Ce qu'il falloit trouver.*

## E X E M P L E I I.

**P**OUR trouver les deux racines de l'équation  $xx - 2bx + cc = 0$ , on supposera  $+n = -2b$ , &  $+p = +cc$ ; on substituera dans les deux formules des racines les grandeurs représentées par  $n$ ,  $p$ , & la premiere racine de la proposée sera  $x = -\frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{n^2}{4} - p} = +b - \sqrt{bb - cc}$ ; & la seconde sera  $x = -\frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{n^2}{4} - p} = +b + \sqrt{bb - cc}$ . *Ce qu'il falloit trouver.*

## E X E M P L E III.

**P**OUR trouver les racines de  $xx + 1x - 2 = 0$ , on supposera  $+n = +1$ , &  $+p = -2$ ; on substituera ces valeurs de  $n, p$ , à leur place dans les formules des racines, & la première racine sera  $x = -\frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{n^2}{4} - p} = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{9}{4}} = -2$ . La seconde racine sera  $x = -\frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{n^2}{4} - p} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{9}{4}} = +1$ ; ainsi l'une des racines de la proposée est la positive  $x = +1$ , & l'autre est la négative  $x = -2$ . *Ce qui étoit proposé.*

## E X E M P L E IV.

**P**OUR trouver les deux racines de l'équation  $xx - 2x + 3 = 0$ , on supposera  $n = -2$ ,  $+p = +3$ ; on substituera ces valeurs de  $n, p$ , à leurs places dans les formules générales des racines, & la première sera  $x = -\frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{n^2}{4} - p} = +1 - \sqrt{1 - 3} = +1 - \sqrt{-2}$ ; la seconde sera  $x = -\frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{n^2}{4} - p} = +1 + \sqrt{1 - 3} = +1 + \sqrt{-2}$ ; d'où l'on voit que les deux racines de la proposée sont imaginaires.

*Démonstration du premier Problème.*

77. **L'**EQUATION lineaire, dont  $x$  est l'inconnue, qui divise exactement une équation du second degré, représentée par l'équation générale  $xx + nx + p = 0$ , contient une de ses racines, & le quotient exact contient l'autre, par la nature des équations. \* Or l'équation lineaire que l'on trouve par la méthode du premier Problème, divise exactement l'équation générale du second degré, puisque le reste de la division est égal à zero, & que ce n'est que par cette supposition qu'elle est déterminée; & le quotient est aussi exact: l'équation lineaire qu'on trouve par la méthode, contient donc une racine de l'équation générale du second degré, & le quotient contient l'autre; l'on a donc par la méthode les formules générales des deux racines de toute équation, du second degré. *Ce qu'il falloit démontrer.*

## R E M A R Q U E S.

## I.

78. **L**ORSQUE le second terme est évanoui, & qu'il y a  $+p$ ; comme dans l'équation  $xx + p = 0$ , les deux racines sont

imaginaires, puisque la première est  $x = -\sqrt{-p}$ ; & la seconde,  $x = +\sqrt{-p}$ .

## I I.

Lorsqu'il y a  $+p$  dans une équation du second degré, & que  $p$  surpasse le carré de la moitié de  $n$ , c'est-à-dire, lorsque  $p$  surpasse  $\frac{1}{4}nn$ , les deux racines sont encore imaginaires, puisque  $\sqrt{\frac{1}{4}nn - p}$  est la racine d'une grandeur négative.

## I I I.

Lorsqu'il y a  $-p$  dans une équation du second degré, les racines sont toujours réelles; car alors la grandeur  $\frac{1}{4}nn + p$ , qui est sous le signe radical, est toujours positive.

Il suit de la seconde & troisième remarque, qu'il ne peut y avoir de racines imaginaires dans une équation du second degré qui a tous ses termes, que quand il y a  $+p$ ; c'est-à-dire, quand les deux racines sont toutes deux positives, ou toutes deux négatives; & qu'elles sont toujours réelles, quand l'une est positive & l'autre négative.

## I V.

Quand l'inconnue a plus de deux dimensions dans le premier terme d'une équation du second degré, comme dans  $x^2 + nxx + p = 0$ , ou en général dans  $x^{2m} + nxx + p = 0$ , ( $m$  représentant un nombre quelconque entier & positif,) quoiqu'il n'y ait que deux racines en la considérant du second degré, qui sont  $xx = -\frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{1}{4}nn - p}$ ,  $xx = -\frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{1}{4}nn - p}$ ; ou en général  $x^m = -\frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{1}{4}nn - p}$ ,  $x^m = -\frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{1}{4}nn - p}$ ; cependant chacune de ces racines, ou chacune des équations simples formée par ces racines,  $xx + \frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{1}{4}nn - p} = 0$ ;  $xx + \frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{1}{4}nn - p} = 0$ ; ou bien en général  $x^m + \frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{1}{4}nn - p} = 0$ ,  $x^m + \frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{1}{4}nn - p} = 0$ , pouvant encore être considérée comme une équation composée, on peut dire que chacune de ces équations simples contient encore autant de racines, que l'exposant 2 de la plus haute puissance de l'inconnue  $xx$ , ou l'exposant  $m$  de l'inconnue  $x^m$ , contient d'unités: car l'inconnue  $x$  a autant de valeurs dans ces équations plus simples, dont l'équation du second degré est composée, que cet exposant de l'inconnue a d'unités. Ce qu'il faut remarquer pour les cas semblables des autres de-

grez représentez en general dans le troisieme degre par  $x^m + nx^{2m} + px^m + q = 0$ ; dans le quatrieme degre, par  $x^{2m} + nx^{3m} + px^{2m} + qx^m + r = 0$ ; & ainsi des autres.

V.

Si l'on ôte separément les incommensurables de chacune des équations lineaires  $x + \frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{1}{4}nn - p} = 0$ ,  $x + \frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{1}{4}nn - p} = 0$ , qui contiennent les racines de l'équation proposée, il en viendra une même équation, qui est la proposée  $xx + nx + p = 0$ ; ce qui peut servir en quelques rencontres à connoître si une équation lineaire contient une des racines de la proposée, lorsqu'elle a des grandeurs incommensurables.

VI.

La méthode de résoudre les équations peut servir à déterminer une grandeur où il y a une ou plusieurs inconnues avec des connues, quoiqu'elles ne forment pas une équation; on en a déjà vu un exemple en résolvant le 6<sup>e</sup> Problème du \*49. 3<sup>e</sup> Livre\*; en voici un autre, l'on a  $x = b + \sqrt{aa - yy - by}$ . Il s'agit de déterminer les cas où la valeur de  $x$  est réelle, & ceux où elle est imaginaire. Il n'y a qu'à supposer que  $yy + by = aa$ ; & résolvant cette équation, on trouvera que la valeur de  $y$  est  $y = -\frac{1}{2}b \pm \sqrt{\frac{1}{4}bb + aa}$ : Ainsi quand  $y$  est égale à cette grandeur, ou moindre que cette grandeur,  $\sqrt{aa - yy - by}$  est zero, ou positive, & la valeur de  $x$  est réelle: mais quand  $y$  surpasse cette grandeur  $-\frac{1}{2}b \pm \sqrt{\frac{1}{4}bb + aa}$ , alors  $\sqrt{aa - yy - by}$ , est la racine d'une grandeur négative, & la valeur de  $x$  est imaginaire.

## SECTION II.

*De la résolution des équations du troisieme degre.*

### AVERTISSEMENT.

POUR abreger & faciliter le calcul, on supposera que le second terme est évanoui dans toutes les équations du troisieme degre qu'on veut résoudre. On a donné la méthode de le faire évanouir, dans l'usage des transformations, dans \*41. le troisieme Livre.\* Ainsi l'équation generale  $x^3 + px + q = 0$ , représentera toutes les équations du troisieme degre, dont le second terme est évanoui.

Il faut remarquer que quand le second terme est évanoui, il y a dans l'équation deux racines positives, & une racine négative égale aux deux positives; ou bien deux racines négatives, & une positive égale aux deux négatives.\*

\* 29, 11.  
Corol.

## P R O B L È M E II.

79. DETERMINER, quand le second terme des équations du troisième degré est évanoui, 1°. les cas où les deux racines positives ou négatives sont égales, ceux où elles sont inégales; 2°. les cas où, étant inégales, les trois racines sont réelles, ceux où il y en a deux d'imaginaires; 3°. & trouver les racines, lorsque les deux positives ou négatives sont égales, & encore lorsque les trois racines, quoiqu'inégales, sont commensurables, ou lorsqu'il y en a quelqu'une de commensurable.

## M É T H O D E G É N É R A L E.

1°. ON supposera, lorsqu'il y a deux racines positives, que la première est  $f - g$ , la seconde  $f + g$ ; & leur somme  $2f$  sera la racine négative; & on fera les trois équations lineaires  $x - f + g = 0$ ,  $x - f - g = 0$ ,  $x + 2f = 0$ .

Lorsqu'il y a deux racines négatives, que la première est  $-f + g$ , la seconde  $-f - g$ ; & leur somme  $-2f$  sera la racine positive, en changeant son signe  $-$ , & supposant  $+2f$ ; & on fera les trois équations lineaires  $x + f - g = 0$ ,  $x + f + g = 0$ ,  $x - 2f = 0$ . On suppose que  $f$  est plus grande que  $g$ ; car autrement  $f - g$  ne seroit pas positive, &  $-f + g$  ne seroit pas négative.

2°. On multipliera les trois premières les unes par les autres, & l'on aura le produit  $x^3 - 3ffx + 2f^3 = 0$ , qui

$$A \quad -ggx - 2ggf$$

est l'équation indéterminée qui représente les équations du troisième degré, dont deux racines sont positives, & la troisième est négative, & égale à la somme des deux positives. On multipliera de même les trois autres équations lineaires les unes par les autres, & leur produit.

$$B \quad x^3 - 3ffx - 2f^3 = 0, \\ -ggx + 2ggf$$

représentera les équations du troisième degré, dont deux racines sont négatives, & la troisième positive, & égale à la somme des deux négatives.

## REMARQUE.

80. ON peut remarquer que le troisième terme de ces deux équations a toujours le signe —, & est une quantité réelle négative, quand les trois racines sont réelles; par conséquent si le troisième terme a le signe +, ou s'il est zero, il y a nécessairement deux racines imaginaires; ainsi dans la formule générale  $p$  doit avoir —, lorsque les trois racines sont réelles, & elle doit être  $x^3 - px \pm q = 0$ , sçavoir +  $q$ , quand deux racines sont positives, & —  $q$ , si deux sont négatives.

3°. On comparera les termes de chacune de ces deux équations indéterminées  $A$  &  $B$ , avec les termes correspondans de l'équation générale  $x^3 - px \pm q = 0$ , excepté le premier terme. L'on aura par le moyen de l'équation  $A$  ces deux équations particulières  $+ 3ff + gg = + p$ ,  $+ 2f^3 - 2ggf = + q$ ; & par l'équation  $B$ ,  $+ 3ff + gg = + p$ ,  $- 2f^3 + 2ggf = - q$ ; d'où l'on déduira pour l'une & l'autre  $+ ff + \frac{2g}{3} = + \frac{p}{3}$ ; & pour l'équation  $A$ ,  $f^3 - ggf = + \frac{q}{2}$ ; & pour l'équation  $B$ ,  $- f^3 + ggf = - \frac{q}{2}$ . Elevant  $+ ff + \frac{2g}{3} = + \frac{p}{3}$  à la troisième puissance, l'on aura  $+ f^6 + ggf^3 + \frac{2}{3} ff^3 + \frac{8}{27} g^3 = \frac{p^3}{27}$ , pour l'équation  $A$  & pour l'équation  $B$ . Elevant aussi  $f^3 - ggf = + \frac{q}{2}$  au quarré, l'on aura pour l'équation  $A$ ,  $f^6 - 2ggf^3 + g^3ff = \frac{q^2}{4}$ . Elevant de même  $- f^3 + ggf = - \frac{q}{2}$  au quarré, l'on aura pour l'équation  $B$ ,  $f^6 - 2ggf^3 + g^3ff = \frac{q^2}{4}$ , qui est la même que celle de l'équation  $A$ . Retranchant à présent chaque membre de l'équation  $f^6 - 2ggf^3 + g^3ff = \frac{q^2}{4}$ , du membre correspondant de l'équation  $f^6 + ggf^3 + \frac{2}{3} ff^3 + \frac{8}{27} g^3 = \frac{p^3}{27}$ , l'on aura l'équation  $3ggf^3 - \frac{25}{3} ff^3 + \frac{8}{27} g^3 = \frac{p^3}{27} - \frac{q^2}{4}$ , qui conviendra à l'équation  $A$  & à l'équation  $B$ . Or chaque membre de cette équation est positif, car  $+ 3ggf^3$  surpasse  $- \frac{25}{3} g^3ff$ , puisqu'en divisant l'une & l'autre par  $ggff$ , le quotient  $3ff$  surpasse le quotient  $- \frac{25}{3} gg$ , car on a supposé que  $f$  surpassoit  $g$ . Tout cela supposé, le Problème est facile à résoudre.

1°. Quand  $\frac{1}{27} p^3 = \frac{1}{4} qq$ , les deux racines positives ou négatives sont égales.

81. QUAND les deux racines positives ou négatives sont égales,

égales,  $g$  est égale à zero dans les équations linéaires  $x - f + g = 0$ ,  $x - f - g = 0$ ,  $x + 2f = 0$ ; & dans les autres  $x + f - g = 0$ ,  $x + f + g = 0$ ,  $x - 2f = 0$ ; par conséquent chaque grandeur du premier membre de l'équation  $3ggf' - \frac{35}{3}ff' + \frac{5}{27} = \frac{p'}{27} - \frac{q}{4}$ , est égale à zero. Donc  $\frac{p'}{27} - \frac{q}{4} = 0$ ; donc  $\frac{1}{27}p'$  est égal à  $\frac{1}{4}qq$ .

2°. *Quand les trois racines sont inégales & réelles,*  
 $\frac{1}{27}p'$  surpasse  $\frac{1}{4}qq$ .

82. QUAND les trois racines sont inégales & réelles, le premier membre de l'équation  $3ggf' - \frac{35}{3}ff' + \frac{5}{27} = \frac{p'}{27} - \frac{q}{4}$ , est positif, le second membre  $\frac{p'}{27} - \frac{q}{4}$ , est donc aussi positif; & par conséquent  $\frac{p'}{27}$  surpasse  $\frac{q}{4}$ .

3°. *Quand  $\frac{1}{27}p'$  est moindre que  $\frac{1}{4}qq$ , il y a deux racines imaginaires.*

83. CAR si les racines étoient toutes réelles, on vient de démontrer que  $\frac{1}{27}p'$  seroit égal à  $\frac{1}{4}qq$ , ou surpasseroit  $\frac{1}{4}qq$ .

4°. *Trouver les racines lorsque les deux positives ou les deux négatives sont égales.*

84. QUAND les deux racines positives, ou les deux négatives sont égales,  $g$  est zero dans les équations linéaires  $x - f + g = 0$ , &c. par conséquent l'équation particulière qui vient de la comparaison des troisièmes termes  $+3ff + gg = +p$ , se réduit à  $+3ff = p$ ; d'où l'on déduit  $+ff = \frac{p}{3}$ . Par la même raison, l'équation  $2f^3 - 2ggf = +q$ ; ou  $-2f^3 + 2ggf = -q$ , se réduit à  $2f^3 = q$ ; d'où l'on déduit  $f^3 = \frac{q}{2}$ . Divisant le premier membre de  $f^3 = \frac{q}{2}$ , par le premier membre de  $ff = \frac{p}{3}$ , & le second par le second, l'on trouve  $\frac{f^3}{ff} = f = \frac{\frac{q}{2}}{\frac{p}{3}} = \frac{3q}{2p}$ ; chacune des racines égales représentées par  $f$ , est donc  $= \frac{3q}{2p}$ ; d'où l'on déduit cette résolution.

*Résolution.*

85. QUAND une équation du troisième degré, dont le second terme est évanoui, a deux racines égales, il faut diviser le triple du dernier terme  $q$ , par le double du coefficient  $p$  du second terme, & le quotient sera une des racines égales.

La troisième racine est égale à deux fois la racine égale;

5°. Trouver les racines d'une équation du troisième degré, dont le second terme est évanoui, lorsqu'elles sont commensurables, ou qu'il y en a quelqu'une de commensurable.

86. SI l'on ôte la grandeur  $p$ , représentée par  $3ff + gg = p$ , de  $4ff$  quarré de la grandeur  $2f$ , qui représente la racine qui est égale à la somme des deux autres, le reste  $ff - gg$  est un diviseur exact de la grandeur  $+q$ , représentée par  $2f^3 - 2ggf = +q$ , pour l'équation  $A$ ; & faisant la division, le quotient est  $2f$ , qui est la racine du quarré  $4ff$ .

Le même reste  $ff - gg$  est aussi un diviseur exact de  $-q$ , représentée par  $-2f^3 + 2ggf = -q$ , pour l'équation  $B$ ; & faisant la division le quotient est  $-2f$ , qui est aussi la racine du quarré  $4ff$ . On déduit de là cette premiere résolution.

*Premiere Résolution.*

QUAND la racine, représentée par  $+ ou - 2f$ , qui est égale à la somme des deux autres, est commensurable, il y a toujours un quarré parfait plus grand que  $p$ , duquel ôtant  $p$  & divisant  $q$  par le reste, la division se fait exactement; & il vient pour quotient exact  $+ ou - 2f$ , qui est la racine de la proposée, égale à la somme des deux autres, & qui est à même tems la racine quarrée juste du quarré parfait qu'on a pris plus grand que  $p$ .

De même si l'on prend le quarré de l'une des racines positives ou négatives,  $f - g$ , ou  $-f + g$ , qui est  $ff - 2gf + gg$ , & qu'on ôte ce quarré de  $3ff + gg = p$ , on aura le reste  $2ff + 2gf$ , qui est un diviseur exact de  $2f^3 - 2ggf = +q$ , pour l'équation  $A$ ; & de  $-2f^3 + 2ggf = -q$ , pour l'équation  $B$ ; & faisant la division, le quotient sera dans le premier cas  $+f - g$ , & dans le second,  $-f + g$ , dont chacun est la racine du quarré parfait  $ff - 2gf + gg$ , qu'on a pris moindre que  $p$ . On trouveroit la même chose en se servant de l'autre racine représentée par  $f + g$ , ou  $-f - g$ ; d'où l'on déduit la seconde résolution.

*Seconde Résolution.*

QUAND les deux racines positives ou négatives, sont commensurables, on peut toujours trouver un quarré parfait moindre que  $p$ , tel qu'étant retranché de  $p$ , le reste soit un diviseur exact de  $+ ou - q$ ; & faisant la division, il



vient un quotient exact, représenté par  $+f-g$ , ou  $-f+g$ , qui est une des deux racines positives ou négatives de la proposée, & qui est à même tems la racine exacte du quarré qu'on a pris moindre que  $p$ .

## R E M A R Q U E.

87. QUAND on aura trouvé une des racines d'une équation du troisiéme degré, en divisant l'équation par  $x +$  ou  $-$  cette racine, le quotient qui sera une équation du second degré, contiendra les deux autres, & on les trouvera en resolvant cette équation du second degré. Ou bien en supposant que la racine trouvée soit  $a$ , si c'est la racine égale à la somme des deux autres, elle sera le coëfficient du second terme de l'équation du second degré qui les contient, & le dernier terme  $q$  de la proposée, divisé par cette racine  $a$ , c'est-à-dire  $\frac{q}{a}$ , fera le produit de ces deux autres racines, par la formation des équations: Ainsi l'équation du second degré, qui contient les deux autres, fera  $xx - ax + \frac{q}{a} = 0$ , quand elles sont positives; la premiere sera donc  $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{q}{a}}$ ; & la seconde,  $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{q}{a}}$ .

L'équation du second degré, qui contient les deux autres, fera  $xx + ax + \frac{q}{a} = 0$ , quand elles sont négatives; la premiere sera donc  $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{q}{a}}$ ; & la seconde,  $x = -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{q}{a}}$ . Mais si la racine découverte  $a$  est une des deux positives ou négatives, elle sera aussi le coëfficient du second terme de l'équation du second degré, qui contient les deux autres; puisque ce coëfficient est l'excès de la racine égale à la somme des deux positives ou négatives, sur celle qui reste à découvrir; & que la racine découverte est aussi ce même excès; &  $\frac{q}{a}$  est le produit des deux qui restent à découvrir: Ainsi l'équation qui contient les deux autres, dont une est toujours positive, & l'autre négative, sera  $xx \pm ax - \frac{q}{a} = 0$ . Il y aura  $+ax$ , quand la racine découverte sera positive, &  $-ax$ , quand elle sera négative. La premiere racine sera donc  $x = \mp \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{q}{a}}$ ; & la seconde sera  $x = \mp \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{q}{a}}$ . Il y aura  $-\frac{1}{2}a$ , quand la racine découverte sera positive; &  $+\frac{1}{2}a$ , quand elle sera négative.

*Application du second Problème à des exemples.*

## E X E M P L E I.

ON propose de trouver les racines de  $x^3 - 12x + 16 = 0$ , pour y appliquer la résolution, on supposera, afin que la formule générale  $x^3 - px + q = 0$ , représente la proposée, que  $-p = -12$ , &  $q = 16$ . Or  $\frac{p^3}{27} = 64$ , &  $\frac{1}{4}qq = 64$ . Cela fait connoître que la proposée contient deux racines égales.

Pour trouver chaque racine égale, on se servira de la formule  $f = \frac{\frac{3}{2}p}{27} = \frac{48}{27} = +2$ ; ainsi la racine égale est  $x = 2$ ; la racine inégale est donc  $x = -4$ .

## E X E M P L E II.

POUR trouver les racines de  $x^3 - 27aax + 54a^3 = 0$ ,  
 $+ 18abx - 54aab$   
 $- 3bbx + 18abb$   
 $= 2b^3$

il faut supposer  $-p = -27aa + 18ab - 3bb$ , &  $q = 54a^3 - 54aab + 18abb - 2b^3$ ; & faisant le calcul, on trouvera que  $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$ ; ce qui fait connoître qu'il y a deux racines égales.

La formule  $f = \frac{\frac{3}{2}p}{27}$ , fera trouver, en divisant le triple du dernier terme par le double du coefficient du troisième terme, le quotient  $3a - b$ : ainsi la racine égale est  $x = 3a - b$ , & la racine inégale est  $x = -6a + 2b$ .

## E X E M P L E III.

POUR trouver les racines de l'équation  $x^3 - 7x + 6 = 0$ , on supposera que la formule générale qui représente cette équation est  $x^3 - px + q = 0$ , &  $p = +7$ ,  $q = +6$ ;  $\frac{p^3}{27} = \frac{343}{27}$ , &  $\frac{1}{4}qq = 9$ . Comme  $\frac{p^3}{27}$  surpasse  $\frac{1}{4}qq$ , cela fait connoître que les trois racines sont réelles & inégales; & le dernier terme  $+6 = q$  étant positif; cela fait connoître qu'il y a deux racines positives, & une négative qui est égale aux deux positives, puisque le second terme est évanoui.

Pour trouver la plus grande racine qui est égale aux deux positives, on prendra un carré parfait plus grand que  $p = 7$ ;

or le premier quarré plus grand que  $p = 7$  est 9. On ôtera  $p = 7$  du quarré 9, & l'on aura le reste 2. On divisera  $q = 6$  par ce reste 2, & le quotient 3 étant la racine quarrée du quarré 9 qu'on a pris, c'est la racine négative qu'on cherche; ainsi  $x = -3$ .

On trouvera les deux autres en divisant la proposée par  $x + 3 = 0$ , car l'on aura pour quotient l'équation du second degré  $xx - 3x + 2 = 0$ , qui les contient, & on trouvera en resolvant cette équation du second degré, que l'une est  $x = 1$ , & l'autre  $x = 2$ . Ou bien nommant  $a$  la racine trouvée 3, l'une des deux positives sera  $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{q}{2}}$   $= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{2}{4} - \frac{6}{2}} = +2$ , & l'autre sera  $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{q}{2}}$   $= \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{2}{4} - \frac{6}{2}} = +1$ .

Si l'on vouloit commencer la résolution par une des deux racines positives, il faudroit prendre un quarré parfait, comme 4, moindre que  $p = 7$ ; & après avoir retranché ce quarré 4 de  $p = 7$ , diviser par le reste 3 le dernier terme  $q = 6$ ; & le quotient 2 étant la racine du quarré 4 qu'on a pris, c'est aussi une des racines positives de la proposée; ainsi  $x = 2$  est une des racines positives de la proposée.

On trouvera les deux autres par la méthode dont on s'est servi, après avoir trouvé la racine négative  $x = -3$ .

## E X E M P L E I V.

ON propose de trouver les racines de l'équation  $x^3 - 1x + 6 = 0$ , qui est représentée par l'équation generale  $x^3 - px + q = 0$ ; de maniere que  $p = 1$ , &  $q = 6$ . Mais étant visible que  $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{27}$  est moindre que  $\frac{1}{4}qq = 9$ , l'on est assuré \* que la proposée a deux racines imaginaires. On \* 83, en donnera la résolution après la démonstration du Problème.

*Démonstration du Problème.*

88. QUAND les trois racines d'une équation du troisième degré, qui a le second terme évanoui, sont réelles, il est évident que  $x - f + g = 0$ ,  $x - f - g = 0$ ,  $x + 2f = 0$ , représentent d'une maniere generale les trois équations lineaires dont cette équation est le produit, lorsqu'il y a deux

racines positives, & leur produit  $x^3 - 3ffx + 2f^3 = 0$ ,  
 $-ggx - 2ggf$   
 représente d'une maniere generale cette équation du troisiéme degré.

Mais quand l'équation a deux racines négatives, il faut se servir des trois équations lineaires  $x + f - g = 0$ ,  $x + f + g = 0$ ,  $x - 2f = 0$ ; & leur produit  $x^3 - 3ffx - 2f^3 - ggx + 2ggf = 0$ , représentera d'une maniere generale l'équation du troisiéme degré.

D'où il suit que ce qu'on découvre par ces équations indéterminées, convient à toutes les équations du troisiéme degré qu'elles représentent.

Quand les deux racines, positives ou négatives, seront égales, il est évident que  $g$  sera égal à zero, & qu'en effaçant les quantitez où se trouve  $g$ , dans les deux produits, ils représenteront l'équation qui aura deux racines égales.

La formule generale  $x^3 - px + q = 0$ , représente aussi d'une maniere generale la même équation du troisiéme degré, lorsque deux de ses racines sont positives, &  $x^3 - px - q = 0$ , lorsque deux de ses racines sont négatives.

Ce que l'on découvre par les équations particulieres qui naissent de la comparaison des termes correspondans des produits & de la formule generale, convient donc aussi aux équations du troisiéme degré, représentées par les produits & par les formules generales.

#### C O R O L L A I R E.

89. **L**ORSQU'EN cherchant la racine qui est égale à la somme des deux autres, c'est-à-dire, la plus grande des trois racines, on ne trouve aucun quarré parfait qui soit tel, que retranchant  $p$  de ce quarré, & divisant  $q$  par le reste, il vienne un quotient exact qui soit la racine du quarré qu'on a pris; la plus grande racine est incommensurable.

De même si en cherchant une des deux moindres racines, on ne trouve aucun quarré parfait moindre que  $p$ , qui soit tel, que ce quarré étant retranché de  $p$ , &  $q$  étant divisé par le reste, il en vienne un quotient exact qui soit la racine du quarré qu'on a pris; les deux moindres racines sont incommensurables.

## REMARQUE.

90. **P**AR le Problème précédent, on trouve toujours les racines d'une équation du troisième degré, lorsqu'il y en a deux d'égales, & lorsque les trois sont réelles, & qu'elles sont commensurables, ou du moins une.

Mais quand elles sont toutes trois réelles & inégales, ce qui arrive \* lorsque  $\frac{1}{27}p^3$  surpasse  $\frac{1}{4}qq$ , & qu'elles sont toutes \* 82. incommensurables: on n'a pas jusqu'à présent trouvé de manière de les exprimer exactement par Algebre, c'est-à-dire, on n'a pas pu trouver d'expression Algebrique réelle qui les exprimât d'une manière incommensurable, avec le signe radical; & c'est ce cas qu'on appelle le cas irréductible du troisième degré: On les trouve cependant par approximation, & on les trouve exactement par la Geometrie.

## PROBLÈME III.

91. **T**ROUVER la racine réelle commensurable ou incommensurable d'une équation du troisième degré dont le second terme est évanoui, & dont deux racines sont imaginaires.

## MÉTHODE.

**L**A méthode est semblable à celle du Problème précédent; il faut seulement remarquer que les équations du troisième degré ont deux racines imaginaires dans ces trois cas; 1°. quand il y a  $+px^*$ ; 2°. quand il y a  $-px$ , & que  $\frac{1}{27}p^3$  \* 80. est moindre que  $\frac{1}{4}qq^*$ ; 3°. quand le second & le troisième \* 83. terme sont évanouis\*, comme dans  $x^3 \pm q = 0$ . Dans ce \* 80. dernier cas la racine réelle est  $x = \sqrt[3]{\mp q}$ . Dans le premier cas, l'équation generale est  $x^3 + px \pm q = 0$ ; & dans le second, l'équation generale est  $x^3 - px \pm q = 0$ .

On supposera pour le premier & second cas, que les trois équations lineaires, dont la proposée est le produit, sont  $x + f + \sqrt{-3gg} = 0$ ,  $x + f - \sqrt{-3gg} = 0$ ,  $x - 2f = 0$ ; & en les multipliant les unes par les autres, on aura le produit  $x^3 - 3ffx - 12f^3 = 0$ , qui représente les rapports des

$A + 3ggx - 6ggf$   
racines de la formule  $x^3 - px - q = 0$ , lorsqu'il y a  $-px - q$ , en supposant  $f$  plus grande que  $g$ ; mais ce produit

représentera les rapports des racines de la formule  $x^3 + px - q = 0$ , en supposant  $f$  moindre que  $g$ .

On supposera encore que les trois équations linéaires sont  $x - f + \sqrt{-3gg} = 0$ ,  $x - f - \sqrt{-3gg} = 0$ ,  $x + 2f = 0$ ; & en les multipliant les unes par les autres, on aura le produit  $x^3 - 3ffx + 2f^3 = 0$ , qui représente les rapports

$$B \quad + 3ggx + 6ggf$$

des racines des équations, dont les formules sont  $x^3 - px + q = 0$ , en supposant  $f$  plus grande que  $g$ ; mais il représentera les rapports des racines des équations dont la formule est  $x^3 + px + q = 0$ , en supposant  $f$  moindre que  $g$ .

On a supposé dans les équations linéaires que la grandeur imaginaire est  $\sqrt{-3gg}$ , quoique cela soit arbitraire; mais cette expression servira dans le calcul qu'on va faire, à trouver plus facilement les formules des résolutions.

On comparera ensuite les termes correspondans des produits des formules, excepté le premier; & l'on aura les équations particulières qui suivent, lorsque la racine réelle  $2f$  est positive; c'est-à-dire, dans l'équation  $A$ :  $1^e$ ,  $-3ff + 3gg = +p$ ; d'où l'on déduit  $ff - gg = +\frac{p}{3}$ ;  $2^e$ ,  $-2f^3 - 6ggf = -q$ ; d'où l'on déduit  $f^3 + 3ggf = +\frac{q}{2}$ .

Et lorsque la racine réelle  $-2f$  est négative; c'est-à-dire, dans l'équation  $B$ , on aura les deux équations:  $1^e$ ,  $-3ff + 3gg = +p$ ; d'où l'on déduit  $ff - gg = +\frac{p}{3}$ ;  $2^e$ ,  $+2f^3 + 6ggf = +q$ ; d'où l'on déduit  $f^3 + 3ggf = \frac{q}{2}$ .

*Résolution des équations du troisième degré, dont deux racines sont imaginaires, lorsque la racine réelle est commensurable.*

92. **S**I l'on prend le carré positif  $4ff$  de la racine réelle, & qu'on lui ajoute  $+p = -3ff + 3gg$ , la somme sera  $ff + 3gg$ . Si l'on divise  $+q = 2f^3 + 6ggf$ , par  $ff + 3gg = 4ff + p$ ; le quotient sera la racine réelle  $2f$ ; d'où l'on déduit cette manière de trouver la racine réelle, quand elle est commensurable.

Il faut prendre un carré positif, & ajouter  $+p$  au carré parfait qu'on a pris; c'est-à-dire, quand il y a  $-p$ , il faut ajouter  $-p$  négatif au carré; & quand il y a  $+p$ , il faut ajouter  $+p$  positif au carré. Il faut diviser  $+q$  par la somme qu'on vient de trouver; & si la division se fait exactement,

ment, & que le quotient soit la racine du quarré qu'on a pris, c'est la racine réelle. Si l'on ne peut pas trouver un tel quarré, la racine réelle est incommensurable. Voici la manière de la trouver.

Si l'on élève l'équation  $ff - gg = \pm \frac{p}{3}$  à la 3<sup>e</sup> puissance, l'on aura  $f^3 - 3ggf + 3g^2ff - g^3 = \pm \frac{p^3}{27}$ . Si l'on élève aussi l'équation  $f^3 + 3ggf = \frac{q}{2}$  au quarré l'on aura  $f^6 + 6ggf^3 + 9g^2ff^2 = \frac{q^2}{4}$ . Si l'on ôte à présent la première de ces deux équations de la seconde, l'on aura  $+9ggf^3 + 6g^2ff^2 + g^3 = \frac{q^2}{4} \mp \frac{p^3}{27}$ . Tirant la racine quarrée de chaque membre, on aura  $3ggf + g^3 = \sqrt{\frac{q^2}{4} \mp \frac{p^3}{27}}$ . Si l'on ajoute cette équation à l'équation  $f^3 + 3ggf = \frac{q}{2}$ , l'on aura  $f^3 + 3ggf + g^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} \mp \frac{p^3}{27}}$ . Tirant la racine cubique de chaque membre, on aura.

$$f + g = \sqrt[3]{\frac{q}{2}} + \sqrt{\frac{q^2}{4} \mp \frac{p^3}{27}}.$$

Divisant l'équation  $ff - gg = \pm \frac{p}{3}$  par la précédente, le premier membre, par le premier membre, le second par le second, l'on aura pour quotient

$$f - g = \frac{\pm \frac{1}{3}p}{\sqrt[3]{\frac{q}{2}} + \sqrt{\frac{q^2}{4} \mp \frac{p^3}{27}}}.$$

Enfin ajoutant les deux équations qu'on vient de trouver,

$$\text{on aura la racine réelle. } 2f = \sqrt[3]{\frac{q}{2}} + \sqrt{\frac{q^2}{4} \mp \frac{p^3}{27}}.$$

$$+ \frac{\pm \frac{1}{3}p}{\sqrt[3]{\frac{q}{2}} + \sqrt{\frac{q^2}{4} \mp \frac{p^3}{27}}}.$$

Quand il y a  $-px$  dans l'équation générale  $x^3 - px + q = 0$ , la grandeur  $\frac{1}{3}p$  aura le signe +, & la grandeur  $\frac{p^3}{27}$  aura le signe —.

Ainsi quand l'équation générale est  $x^3 - px \pm q = 0$ , la formule générale qui marque la racine réelle est.

$$2f = \sqrt[3]{\frac{q}{2}} + \sqrt{\frac{q^2}{4} \mp \frac{p^3}{27}} + \frac{\frac{1}{3}p}{\sqrt[3]{\frac{q}{2}} + \sqrt{\frac{q^2}{4} \mp \frac{p^3}{27}}}.$$

Quand l'équation générale est  $x^3 + px \pm q = 0$ , la formule générale qui marque la racine réelle est.

$$2f = \sqrt[3]{\frac{q}{2}} + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3} - \frac{\frac{1}{3}p}{\sqrt[3]{\frac{q}{2}} + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}.$$

La grandeur  $3gg$  qu'on a prise pour représenter la grandeur imaginaire, sera égale à  $3ff \mp p$ , car  $-3ff + 3gg = \mp p$ ; ajoutant  $+3ff$  à chaque membre, on aura  $3ff - 3ff + 3gg = 3ff \mp p = 3gg$ ; ainsi  $\sqrt{-3gg} = \sqrt{-3ff \mp p}$ .

On déduit de là cette résolution.

*Résolution des équations du troisième degré, dont deux racines sont imaginaires, lorsque la racine réelle est incommensurable.*

93. QUAND l'équation générale est  $x^3 - px + q = 0$ , il faut ôter  $\frac{p^3}{27}$  de  $\frac{1}{4}qq$ ; & après avoir tiré la racine quarrée du reste, l'ajouter à  $\frac{1}{2}q$ , & tirer la racine cubique de sa somme, & ce sera la première partie de la racine réelle.

Il faut diviser  $p$  par le triple de la première partie de la racine, & ajouter le quotient à la première partie, & la somme sera la racine réelle  $2f = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$ .

$$+ \frac{p}{3\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}}$$

Quand l'équation est  $x^3 + px + q = 0$ , on trouvera de même les deux parties de la racine réelle, excepté qu'on ajoutera  $\frac{1}{27}p$  à  $\frac{1}{4}qq$ ; mais on retranchera la seconde partie de la première, & l'on aura  $2f = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$ .

$$- \frac{p}{3\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}}$$

*Application du Problème à des Exemples.*

#### EXEMPLE I.

POUR trouver la racine réelle de  $x^3 - 1x + 6 = 0$ , dont deux racines sont imaginaires, parceque  $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{27}$ , est moindre que  $\frac{1}{4}qq = 9$ ; on prendra le quarré positif  $+4$ , & on lui ajoutera  $-1$ , & la somme sera  $+3$ : on divisera  $q = 6$  par  $3$ , & le quotient  $2$  étant la racine du quarré  $4$  qu'on a pris, c'est aussi la racine réelle de la proposée, qui est négative, parcequ'il y a une racine négative dans la proposée, puisqu'il y a  $+6$  au dernier terme.

La grandeur imaginaire sera  $\sqrt{-3 + 1} = \sqrt{-2}$ .

#### EXEMPLE II.

POUR trouver la racine réelle de  $x^3 + 2x - 12 = 0$ , dont



les deux autres racines sont imaginaires, le troisieme terme  $+ 1x = + px$  ayant le signe  $+$ , on prendra le quarré parfait  $+ 4$ , auquel on ajoutera  $+ p = + 2$ ; & l'on divisera par la somme  $+ 6$  le dernier terme  $q = 12$ , & le quotient 2 étant la racine du quarré 4 qu'on a pris, c'est aussi la racine réelle de la proposée, qui est  $x = 2$ .

La grandeur imaginaire est  $\sqrt{-3-2} = \sqrt{-5}$ .

## E X E M P L E I I I.

P O U R trouver la racine réelle de  $x^3 - 6x - 16 = 0$ , qui a deux racines imaginaires, parceque  $\frac{1}{4} qq = 64$  surpasse  $\frac{1}{27} p^3 = 8$ ; il faut ôter  $\frac{1}{27} p^3 = 8$  de  $\frac{1}{4} qq = 64$ , & la racine quarrée du reste 56 est  $\sqrt{56}$ . Il faut ajouter cette racine à  $\frac{1}{2} q = 8$ , & tirer la racine cubique de la somme, qui est  $\sqrt[3]{8 + \sqrt{56}}$ , & elle sera la premiere partie de la racine qu'on cherche. Il faut diviser  $p = 6$  par le triple de la premiere partie  $3\sqrt[3]{8 + \sqrt{56}}$ , & le quotient  $\frac{2}{\sqrt[3]{8 + \sqrt{56}}}$ , sera la

seconde partie de la racine réelle.

Ainsi la racine réelle est  $x = \sqrt[3]{8 + \sqrt{56}} + \frac{2}{\sqrt[3]{8 + \sqrt{56}}}$ .

La démonstration de ce Problème est la même que du précédent, puisque la méthode est la même.

## C O R O L L A I R E.

Q U A N D la racine réelle est découverte, si l'on veut avoir les deux autres qui sont imaginaires, il n'y a qu'à diviser la proposée par  $x +$  ou  $-$  la racine réelle qu'on a trouvée, mettant  $+$  quand elle est négative, &  $-$  quand elle est positive: Le quotient, qui sera exact, sera une équation du second degré qui contiendra les deux autres racines qui sont imaginaires.

*Seconde méthode generale de résoudre les équations du troisieme degré dont le second terme est évanoui.*

94. T O U T E S les équations du troisieme degré, dont le second terme est évanoui, peuvent se représenter par ces deux formules generales  $x^3 - px + q = 0$ ,  $x^3 + px + q = 0$ ; la seconde contient toujours deux racines imaginaires, \* & \* 80. une racine réelle, qui est positive, quand il y a  $-q$ , & né-

- gative, quand il y a  $+q$ . La première contient trois racines réelles, quand  $\frac{1}{27}p^3$  surpasse  $\frac{1}{4}qq$ , \* dont deux sont positives, & la troisième, qui est égale à leur somme, est négative, quand il y a  $+q$ ; mais les deux moindres sont négatives, & la plus grande positive, quand il y a  $-q$ ; & elle contient deux racines imaginaires & une réelle quand  $\frac{1}{27}p^3$  est moindre que  $\frac{1}{4}qq$ . \*

\* 83. On supposera qu'une des racines est égale à  $f+g$  pour la première formule, & à  $f-g$  pour la seconde, & l'équation linéaire  $x-f-g=0$ , représentera une des trois équations linéaires, dont toute équation du 3<sup>e</sup> degré, que la première formule représente, est le produit.

L'équation linéaire  $x-f+g=0$ , servira pour la seconde formule.

On divisera la première équation générale  $x^3 - px \pm q = 0$ , par  $x-f-g=0$ ; & la seconde  $x^3 + px \pm q = 0$ , par  $x-f+g=0$ ; & on continuera la division jusqu'à ce qu'on ait un reste dans lequel  $x$  ne soit plus comme on le voit ici.

Pour la première formule.

AVERTISSEMENT.  $x$  signifie que la grandeur ou cette marque se trouve, est tranchée par une ligne.

$$\begin{array}{r} x^3 - xpx + q \\ + xfx + xffx - pf \\ + xgx + xfgx - pg \\ + xgx + f^3 \\ + xffg \\ + xfgg \\ + g^3 \end{array} \quad \left( \begin{array}{r} x - f - g \\ xx + fx - p \\ + gx + ff \\ + xfg \\ + gg \end{array} \right)$$

Pour la seconde formule.

$$\begin{array}{r} x^3 + xpx + q \\ + xfx + xffx + pf \\ - xgx - xfgx - pg \\ + xgx + f^3 \\ - xffg \\ + xfgg \\ - g^3 \end{array} \quad \left( \begin{array}{r} x - f + g \\ xx + fx + p \\ - gx + ff \\ - xfg \\ + gg \end{array} \right)$$

Il est évident que chaque quotient sera exact, & que le diviseur  $x-f-g=0$ , ou  $x-f+g=0$ , fera la division sans reste, en supposant chaque reste égal à zéro.

Le premier peut ainsi s'exprimer  $f^3 + g^3 + 3fg \times f+g - p \times f+g \pm q = 0$ ; & le second,  $f^3 - g^3 + 3fg \times -f+g - p \times -f+g \pm q = 0$ .

Pour déterminer chacune des deux indéterminées  $f$  &  $g$ , on fera deux équations particulières de chaque reste, de

cette maniere. Pour le premier reste,  $1^{\text{re}}, f^3 + g^3 \pm q = 0$ ;  $2^{\text{e}}, + 3fg \times f + g - p \times f + g = 0$ ; & pour le second reste,  $1^{\text{re}}, f^3 - g^3 \pm q = 0$ ;  $2^{\text{e}}, + 3fg \times -f + g - p \times -f + g = 0$ . Chacune des secondes équations donnera  $3fg = p$ , &  $f = \frac{p}{3g}$ , &  $f^3 = \frac{p^3}{27g^3}$ ; substituant la valeur de  $f$  dans chacune des premieres équations, on aura pour le premier reste  $\frac{p^3}{27g^3} + g^3 \pm q = 0$ , qui se réduit à  $g^6 \pm qg^3 + \frac{p^3}{27} = 0$ , qui est une équation du second degré, dont les deux racines sont  $g^3 = \mp \frac{1}{2} q + \sqrt{\frac{1}{4} qq - \frac{1}{27} p^3}$ , &  $g^3 = \mp \frac{1}{2} q - \sqrt{\frac{1}{4} qq - \frac{1}{27} p^3}$  d'où l'on déduit pour abreger,

$$g = \sqrt[3]{\mp \frac{1}{2} q \pm \sqrt{\frac{1}{4} qq - \frac{1}{27} p^3}}.$$

Substituant de même la valeur de  $f^3$  dans la premiere équation du second reste, on aura  $\frac{p^3}{27g^3} - g^3 \pm q = 0$ , qui se réduit à  $-g^6 \pm qg^3 + \frac{1}{27} p^3 = 0$ ; & par transposition,  $g^6 \mp qg^3 - \frac{1}{27} p^3 = 0$ , qui est une équation du second degré, dont les racines sont  $g^3 = \pm \frac{1}{2} q + \sqrt{\frac{1}{4} qq + \frac{1}{27} p^3}$ ; &  $g^3 = \pm \frac{1}{2} q - \sqrt{\frac{1}{4} qq + \frac{1}{27} p^3}$ ; d'où l'on déduit pour abreger,  $g = \sqrt[3]{\pm \frac{1}{2} q \pm \sqrt{\frac{1}{4} qq + \frac{1}{27} p^3}}$ .

Il faut à present substituer la valeur de  $g^3$ , qui convient au premier reste, dans la premiere équation  $f^3 + g^3 \pm q = 0$ ; & l'on aura  $f^3 \pm \frac{1}{2} q \pm \sqrt{\frac{1}{4} qq - \frac{1}{27} p^3} = 0$ ; d'où l'on déduit  $f = \sqrt[3]{\mp \frac{1}{2} q \pm \sqrt{\frac{1}{4} qq - \frac{1}{27} p^3}}$ .

Il faut de même substituer la valeur de  $g^3$ , qui convient au second reste dans la premiere équation du second reste  $f^3 - g^3 \pm q = 0$ ; & l'on aura  $f^3 \pm \frac{1}{2} q \mp \sqrt{\frac{1}{4} qq + \frac{1}{27} p^3} = 0$ ; d'où l'on déduit  $f = \sqrt[3]{\mp \frac{1}{2} q \mp \sqrt{\frac{1}{4} qq + \frac{1}{27} p^3}}$ .

Les deux indéterminées  $f$  &  $g$  étant connues, la racine qu'on cherche est connue, qui est pour la premiere équation  $x^3 - px \pm q = 0$ ,  $x = f + g = \sqrt[3]{\mp \frac{1}{2} q \pm \sqrt{\frac{1}{4} qq - \frac{1}{27} p^3}} + \sqrt[3]{\mp \frac{1}{2} q \pm \sqrt{\frac{1}{4} qq - \frac{1}{27} p^3}}$ .

Pour la seconde équation  $x^3 + px \pm q = 0$ , la racine  $x = -f - g = \sqrt[3]{\mp \frac{1}{2} q \pm \sqrt{\frac{1}{4} qq + \frac{1}{27} p^3}} - \sqrt[3]{\mp \frac{1}{2} q \pm \sqrt{\frac{1}{4} qq + \frac{1}{27} p^3}}$ .

Quand une des racines est découverte, les deux quotiens

qu'on a trouvés en faisant les divisions de la première & de la seconde formule, seront chacun une équation du second degré, laquelle après y avoir substitué les valeurs de  $f$  & de  $g$ , contiendra les deux autres racines, dont on trouvera les formules en résolvant ces deux équations du second degré, sans en ôter les indéterminées  $f$  &  $g$ .

On trouveroit les formules de l'art. 93, de la valeur de  $x$ , qui est ici  $= f \pm g$ , si on substituoit la valeur de  $g^3 = \frac{p^3}{27}$ , qui se tire de  $f = \frac{p}{12}$ , changée en  $g = \frac{p}{12}$ , dans  $f^3 \pm g^3 \pm q = 0$ , & ensuite la valeur de  $f$ , qu'on en déduiroit, dans  $g = \frac{p}{12}$ .

#### DÉMONSTRATION.

LA méthode fait trouver des valeurs de  $f$  & de  $g$ , qui sont telles, qu'après les avoir substituées dans l'équation linéaire  $x - f - g = 0$ , ou  $x - f + g = 0$ , cette équation linéaire ainsi changée est un diviseur exact de la proposée, puisque le reste de la division est zero; elle fait donc trouver une racine de la proposée: \*

*Application du Problème à des exemples.*

#### EXEMPLE I.

POUR trouver par cette méthode une racine de l'équation  $x^3 - 7x + 6 = 0$ , représentée par la formule  $x^3 - px + q = 0$ , dont les trois racines sont réelles, puisque  $\frac{1}{27}p^3 = \frac{147}{27}$  surpasse  $\frac{1}{4}qq = 9$ ; on se servira de la formule  $x = f + g = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$ , dans laquelle mettant les valeurs de  $p$ ,  $q$ , la racine sera  $x = \sqrt[3]{-3 - \sqrt{-\frac{100}{27}}} + \sqrt[3]{-3 + \sqrt{-\frac{100}{27}}}$ ; parceque  $\frac{1}{4}qq = 9 = \frac{243}{27}$ , &  $\frac{1}{27}p^3 = \frac{147}{27}$ ; ainsi  $\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3 = \frac{243}{27} - \frac{147}{27} = -\frac{100}{27}$ .

On verra dans les remarques la manière de débarrasser la racine réelle qu'on vient de trouver, des expressions imaginaires & incommensurables, lorsqu'elle est commensurable.

Comme la formule  $x = f + g = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$  est double, & qu'elle se réduit à ces deux formules: 1<sup>re</sup>,  $x = f + g = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$ ;

Seconde,  $x = f + g = \sqrt[3]{+\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{+\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$ ; Il est libre de prendre laquelle on voudra, en remarquant que s'il y avoit dans la proposée  $-q$ , il faudroit mettre dans chacune  $+\frac{1}{2}q$ , au lieu de  $-\frac{1}{2}q$ .

## E X E M P L E I I.

P O U R trouver par cette méthode la racine réelle de l'équation  $x^3 - 1x + 6 = 0$ , dont deux racines sont imaginaires, puisque  $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{27}$  est moindre que  $\frac{1}{4}qq = 9$ ; on supposera que cette équation est représentée par  $x^3 - px + q = 0$ ; ainsi la formule de la racine est  $x = f + g = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$ ; on substituera les valeurs de  $p, q$ , dans cette formule, & on trouvera la racine  $x = \sqrt[3]{-3 - \sqrt{\frac{243}{27}}} + \sqrt[3]{-3 + \sqrt{\frac{243}{27}}}$ .

## E X E M P L E I I I.

P O U R trouver la racine réelle de l'équation  $x^3 + 2x - 12 = 0$ , dont deux sont imaginaires, puisqu'il y a  $+px$ , on supposera que cette équation est représentée par  $x^3 + px - q = 0$ ; ainsi la formule de la racine est  $x = f - g = \sqrt[3]{+\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} - \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$ ; on substituera les valeurs de  $p, q$ , dans cette formule, & on trouvera la racine  $x = \sqrt[3]{6 + \sqrt{\frac{288}{27}}} - \sqrt[3]{-6 + \sqrt{\frac{288}{27}}}$ .

## R E M A R Q U E S.

## I.

I L faut bien remarquer, sur les signes des formules de la racine, 1°. que chaque équation generale  $x^3 - px + q = 0$ ,  $x^3 + px + q = 0$ , marquant deux formules, la première où il y a  $+q$ , la seconde où il y a  $-q$ , le premier des deux signes qui précède  $\frac{1}{2}q$  dans la formule de la racine, a raport au premier signe  $+q$  de chacune des deux équations generales; & le second a raport au second signe  $-q$  de chacune des équations generales.

Ainsi quand il y a  $+\frac{1}{2}q$  dans la formule de la racine, cela veut dire que quand il y a  $+q$  dans l'équation, il doit y avoir  $-\frac{1}{2}q$  dans la formule de la racine; & quand il y a

—  $q$  dans l'équation, il doit y avoir  $+\frac{1}{2}q$  dans la racine; & ainsi des autres.

Il faut bien remarquer, 2<sup>o</sup>. qu'il y a deux signes qui précèdent dans la formule de la racine, la grandeur  $\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$ , &  $\sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$ . Cela vient de ce qu'il a fallu résoudre une équation du second degré, pour avoir les valeurs de  $f^3$  & de  $g^3$ , & par conséquent de  $f$  & de  $g$ : ainsi la résolution donne deux valeurs de  $f$ , & deux valeurs de  $g$ . On les a jointes ensemble pour abréger, & c'est ce qui est cause que les deux signes  $\pm$  précèdent la grandeur  $\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$ , ou  $\sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$ ; le premier de ces deux signes marque la première valeur de  $f$  ou de  $g$ , & le second marque la deuxième valeur.

Dans l'usage il faut observer, si l'on se sert du premier signe dans la valeur de  $f$ , de se servir aussi du premier signe dans celle de  $g$ ; & si l'on se sert du second signe dans la valeur de  $f$ , de se servir du second signe dans la valeur de  $g$ ; parceque ce sont ces valeurs qui ont rapport l'une à l'autre.

### I I.

Quand les trois racines sont réelles; c'est-à-dire, quand il y a  $-p$  dans l'équation, & que  $\frac{1}{27}p^3$  surpasse  $\frac{1}{4}qq$ , il est évident que l'expression de la racine réelle contient une imaginaire dans chaque partie de la formule de la racine: Ainsi quand les trois racines sont réelles, l'expression de la racine qu'on cherche contient des grandeurs imaginaires.

Cela fait voir que cette méthode n'est d'usage que pour les équations où il y a deux racines imaginaires; car dans ce cas l'expression de la racine réelle contient des grandeurs qui sont toutes réelles, & aucunes imaginaires.

Il y a encore cet inconvénient, que quand la racine qu'on cherche est commensurable, on ne la trouve que sous une expression incommensurable; ainsi dans ce cas, il est bien plus court de se servir des méthodes du second & troisième Problème.

Cependant quand la racine qu'on cherche est commensurable, quoiqu'elle soit exprimée sous une forme incommensurable, & qui contient même des imaginaires quand les trois racines sont réelles, on peut réduire son expression incommensurable

incommensurable à une grandeur commensurable, par la méthode suivante, & trouver la racine commensurable.

*Méthode pour changer l'expression incommensurable de la racine réelle qu'on a trouvée par la méthode précédente, en une autre expression commensurable, lorsque la racine qu'on a trouvée est commensurable.*

96. ON a trouvé dans le premier exemple qu'une racine réelle de  $x^3 - 7x + 6 = 0$ , étoit  $x = \sqrt[3]{-3} - \sqrt{-\frac{100}{27}} + \sqrt[3]{-3} + \sqrt{-\frac{100}{27}}$ . Pour changer cette expression incommensurable, & qui contient des grandeurs imaginaires, en une autre toute commensurable, on supposera  $-b - \sqrt{-i} = \sqrt[3]{-3} - \sqrt{-\frac{100}{27}}$ , &  $-b + \sqrt{-i} = \sqrt[3]{-3} + \sqrt{-\frac{100}{27}}$ . On élèvera chaque membre à la troisième puissance, & pour ôter toute confusion, on fera l'opération pour la seule première partie  $-b - \sqrt{-i} = \sqrt[3]{-3} - \sqrt{-\frac{100}{27}}$ . Elevant chaque membre à la troisième puissance, on aura  $-b^3 - 3bb\sqrt{-i} + 3bi + i\sqrt{-i} = -3 - \sqrt{-\frac{100}{27}}$ .

On supposera les grandeurs commensurables  $-b^3 + 3bi$  égales à la grandeur commensurable  $-3$ , & les grandeurs incommensurables  $-3bb\sqrt{-i} + i\sqrt{-i}$  égales à la grandeur incommensurable  $-\sqrt{-\frac{100}{27}}$ ; & l'on aura les deux équations suivantes: 1<sup>re</sup>,  $-b^3 + 3bi = -3$ ; 2<sup>e</sup>,  $-3bb\sqrt{-i} + i\sqrt{-i} = -\sqrt{-\frac{100}{27}}$ .

On élèvera chacune au carré, & l'on aura  $b^6 - 6b^4i + 9bhii = +9$ ,  $-9b^4i + 6bhii - i^3 = -\frac{100}{27}$ .

On ôtera la seconde équation de la première, & l'on aura  $b^6 + 3b^4i + 3bhii + i^3 = 9 + \frac{100}{27} = \frac{343}{27}$ .

On tirera la racine cubique de chaque membre, & l'on aura  $bb + i = \frac{7}{3}$ , d'où l'on déduit  $i = \frac{7}{3} - bb$ .

On mettra cette valeur de  $i$  dans la première équation  $-b^3 + 3bi = -3$ , & l'on aura  $-b^3 + 7b - 3b^3 = -3$ , qui se réduit à  $4b^3 - 7b - 3 = 0$ , d'où l'on déduit  $b^3 - \frac{7}{4}b - \frac{3}{4} = 0$ .

Pour ôter les fractions, on supposera  $b = \frac{y}{4}$ , & l'on aura la transformée  $y^3 - 28y - 48 = 0$ .

On résoudra cette équation par le second Problème; c'est à dire, on prendra le quarré 36 plus grand que 28, & après en avoir ôté 28, on divisera le dernier terme 48 par le reste 8, & le quotient 6 étant la racine du quarré qu'on a pris, est aussi la racine de l'équation  $y^2 - 28y - 48 = 0$ ; ainsi  $y = 6$ .

Substituant cette valeur dans  $h = \frac{7}{4}$ , l'on aura  $h = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ , d'où l'on déduira  $hb = \frac{9}{2}$ .

On substituera cette valeur dans  $i = \frac{7}{4} - hb$ , & l'on aura  $i = \frac{7}{4} - \frac{9}{2} = -\frac{1}{2}$ .

Par conséquent  $-h - \sqrt{-i} = -\frac{3}{2} - \sqrt{-\frac{1}{2}} = \sqrt{-3} - \sqrt{-\frac{100}{27}}$ , qui est la premiere partie de la racine de la proposée.

On trouvera par une semblable operation que  $-h + \sqrt{-i} = \sqrt{-3} + \sqrt{-\frac{100}{27}}$ , est égale à  $-\frac{3}{2} + \sqrt{-\frac{1}{2}}$ , & c'est la seconde partie de la racine de la proposée.

On ajoutera ces deux parties, & l'on aura la racine qu'on avoit trouvée sous la forme incommensurable  $x = \sqrt{-3} - \sqrt{-\frac{100}{27}} + \sqrt{-3} + \sqrt{-\frac{100}{27}} = -\frac{6}{2} = -3$ .  
*Ce qui étoit proposé.*

On trouvera de même dans le second exemple  $x^3 - 1x + 6 = 0$ , que la racine réelle qu'on a découverte,  $x = \sqrt{-3} - \sqrt{\frac{242}{27}} + \sqrt{-3} + \sqrt{\frac{242}{27}}$ , est égale à  $-1 - \sqrt{\frac{2}{3}} - 1 + \sqrt{\frac{2}{3}} = -2$ .

Pour le trouver par une operation semblable à la précédente, on supposera que  $-h - \sqrt{g}$  est égale à la premiere partie de la racine  $\sqrt{-3} - \sqrt{\frac{242}{27}}$ ; &  $-h + \sqrt{g}$  est égale à la seconde partie  $\sqrt{-3} + \sqrt{\frac{242}{27}}$ ; & en faisant l'operation comme ci-dessus, on trouvera les deux parties de la racine qu'on vient de marquer, qui étant ajoutées ensemble, font la racine  $x = -2$ .

On trouvera de même dans le troisieme exemple  $x^3 + 2x - 12 = 0$ , que la racine réelle qu'on a découverte,  $x = \sqrt{6} + \sqrt{\frac{280}{27}} - \sqrt{-6} + \sqrt{\frac{280}{27}}$ , est égale à  $+1 + \sqrt{\frac{1}{3}} + 1 - \sqrt{\frac{1}{3}} = +2$ . On le trouvera, dis-je, en supposant  $h + \sqrt{i} = \sqrt{6} + \sqrt{\frac{280}{27}}$ , &  $-h + \sqrt{i} = -\sqrt{-6} + \sqrt{\frac{280}{27}}$ , & faisant l'operation comme ci-dessus;



On peut s'assurer que la méthode qu'on vient de donner réussira toujours, quand la racine réelle de la proposée est commensurable, en appliquant la méthode à la formule générale de la racine, qui est, par exemple,

$x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$   
 car en supposant pour la première partie de la racine  $-b$   
 $-\sqrt{-i} = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$ , on aura  $-b^3 - 3bh$   
 $\sqrt{-i} + 3hi + i\sqrt{-i} = -\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$ , d'où l'on  
 déduira, 10.  $-b^3 + 3hi = -\frac{1}{2}q$ , &  $b^6 - 6b^4i + 9bhii$   
 $= \frac{1}{4}qq$ ; d'où l'on déduira, 20.  $-3bh\sqrt{-i} + i\sqrt{-i} =$   
 $-\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$ , &  $-9b^4i + 6bhii - i^3 = \frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3$ ;  
 Etant la seconde de la première, on aura  $b^6 + 3b^4i + 3bhii$   
 $+ i^3 = +\frac{1}{27}p^3$ ; donc  $hb + i = \frac{1}{3}p$ , &  $i = \frac{1}{3}p - hb$ ;  
 substituant cette valeur de  $i$  dans la première  $-b^3 + 3hi =$   
 $-\frac{1}{2}q$ , on aura  $-b^3 + pb - 3b^3 = -\frac{1}{2}q$ , qui se réduit à  
 $b^3 - \frac{2}{3}b - \frac{1}{6}q = 0$ .

Supposant à présent  $b = \frac{2}{3}$ , l'équation  $b^3 - \frac{2}{3}b - \frac{1}{6}q$   
 $= 0$ , fera transformée en  $y^3 - 4py - 8q = 0$ .

Mais si la proposée  $x^3 - px + q = 0$ , ou  $x^3 - px - q$   
 $= 0$ , (cette dernière n'étant que la première, \* dont la plus  
 grande racine positive est la racine négative de la première, \* 30.  
 & les deux autres négatives sont les positives de la première:.) *Cor.*  
 Si, dis-je, l'équation  $x^3 - px - q = 0$ , a sa plus grande  
 racine commensurable, la plus grande racine de  $y^3 - 4py$   
 $- 8q = 0$ , doit aussi être commensurable; car il est évident  
 que  $y^3 - 4py - 8q = 0$ , est la transformée de  $x^3 - px - q$   
 $= 0$ , & que les racines de la première sont les racines de la  
 seconde multipliées par 2; ainsi  $2x = y$ , ou  $x = \frac{y}{2}$ : On  
 trouvera donc la racine commensurable de  $y^3 - 4py - 8q$   
 $= 0$ , par le second Problème; & par conséquent on aura  
 $b = \frac{2}{3} = \frac{x}{3}$ , &  $i = \frac{1}{3}p - hb$ .

En supposant pour la seconde partie de la racine,

$+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$ , que  $-b + \sqrt{-i} = +$   
 $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$ ; & faisant la même opération  
 qu'on a faite pour la première partie, on trouvera l'équation

Ee ij

$h^3 - \frac{p}{4}h - \frac{1}{8}q = 0$ ; & supposant  $h = \frac{2}{4}$ , on aura la même transformée  $y^3 - 4py - 8q = 0$ , dont la racine sera commensurable, si  $x$  est commensurable dans  $x^3 - px - q = 0$ , puisque  $y = 2x$ : Ainsi on trouvera par le second Problème la valeur commensurable de  $y$ .

On aura donc encore  $h = \frac{2}{4} = \frac{x}{2}$ , &  $i = \frac{1}{4}p - hh$ .

Les deux parties  $-h - \sqrt{-i}$ ,  $-h + \sqrt{-i}$ , qu'on trouve par les opérations précédentes, sont donc  $-2h = -\frac{2x}{2} = -x$ ; car les deux valeurs qu'on trouve de  $-\sqrt{-i}$ ,  $+\sqrt{-i}$ , se détruisent par des signes oppozés.

On peut appliquer le même raisonnement aux autres formules générales de la racine.

D'où l'on voit, que dans le cas où les trois racines de l'équation sont réelles & incommensurables, on ne sçauroit dégager la racine réelle des expressions incommensurables & imaginaires.

*Troisième méthode générale pour résoudre par transformation les équations du troisième degré, dont le second terme est évanoui.*

97. ON supposera que toutes les équations du troisième degré sont représentées par ces deux formules  $x^3 - px \pm q = 0$ ,  $x^3 + px \pm q = 0$ .

On supposera pour transformer la première  $x = y + \frac{f}{y}$   $= \frac{y^2 + f}{y}$ ; & pour transformer la seconde  $x = y - \frac{f}{y} = \frac{y^2 - f}{y}$ ;  $y$  sera l'inconnue de la transformée, &  $f$  une indéterminée.

On substituera dans la première, à la place de  $x$ ,  $x^3$ , les valeurs de  $x$  &  $x^3$ , & l'on aura la transformée de la première  $x^6 + 3fy^4 \mp qy^3 + 3ffyy + f^3 = 0$ .

$$-py^4 \quad -pfyy$$

On substituera de même les valeurs de  $x$  &  $x^3$  dans la seconde  $x^3 + px \pm q = 0$ , & l'on aura la transformée de la seconde  $y^6 - 3fy^4 \mp qy^3 + 3ffyy - f^3 = 0$ .

$$+py^4 \quad -pfyy$$

On supposera dans chacune, pour déterminer l'indéterminée  $f$ , que le second terme est égal à zero; & l'on aura pour l'une & l'autre  $3f = p$ , ou  $f = \frac{p}{3}$ , &  $f^3 = \frac{p^3}{27}$ ; d'où il s'ensuivra que le quatrième terme  $+ 3ffyy - pfyy = 0$ , puisque  $p = 3f$ .

- Substituant la valeur de  $f$  dans chaque transformée, la première sera  $y' \mp qy' + \frac{1}{27}p' = 0$ , & la seconde sera  $y' \mp qy' - \frac{1}{27}p' = 0$ .

On résoudra ces deux transformées, qui ne sont que du second degré, & après avoir trouvé les valeurs de  $y$  par leur moyen, on substituera ces valeurs dans les équations supposées  $x = y + \frac{f}{3}$ ,  $x = y - \frac{f}{3}$ , selon qu'elles leur conviennent, & après la substitution on aura la valeur de  $x$ , ou la formule générale d'une racine de la proposée.

Cette méthode est démontrée par la démonstration des transformations, \* mais elle a les inconvénients de la précédente, qui sont de donner dans le cas où les racines sont toutes réelles & incommensurables, la valeur de la racine qu'on cherche, avec des expressions imaginaires, & avec des expressions incommensurables, lorsqu'elle est commensurable.

\* 36;  
9<sup>e</sup> Transfor-  
mation.

## A V E R T I S S E M E N T.

98. S I l'on vouloit une formule générale qui exprimât la racine d'une équation qui auroit tous ses termes, comme  $x^3 \pm nxx \pm px \pm q = 0$ , on pourroit la trouver de cette manière.

On feroit évanouir le second terme de l'équation générale qui précède, en supposant  $x = y \mp \frac{1}{3}n$ . L'on chercheroit par la seconde méthode générale la formule qui exprime la racine de la transformée: & après l'avoir trouvée, il est évident qu'en mettant au-devant de cette formule de la racine de la transformée; la grandeur  $\mp \frac{1}{3}n$ , on auroit la formule de la racine de la proposée égale à  $x$ .

Mais cette formule auroit les mêmes inconvénients que celle de la seconde méthode, à l'égard des équations dont les racines sont commensurables, & de celles dont toutes les racines sont réelles & incommensurables, & elle ne serviroit que pour les équations qui auroient deux racines imaginaires, & une réelle.

## SECTION III.

*De la résolution des équations du quatrième degré.*

## PROBLEME IV.

99. *DISTINGUER* parmi les équations du quatrième degré, celles qui ont des racines égales, & trouver ces racines égales.

## A V E R T I S S E M E N T.

QUAND une équation du quatrième degré a des racines égales, elle peut les avoir toutes quatre, ou seulement trois, ou enfin seulement deux; & quand elle n'en a que deux égales, les deux autres peuvent être réelles ou imaginaires.

*Premier cas quand les quatre racines sont égales.*

1°. ON fera évanouir le second terme de l'équation si elle en a un, & on supposera que l'équation est représentée par l'équation générale  $x^4 + pxx + qx + r = 0$ .

2°. On supposera que chaque racine égale est représentée par l'indéterminée  $f$ ; ainsi les équations lineaires seront  $x - f = 0$ ,  $x - f = 0$ ,  $x + f = 0$ ,  $x + f = 0$ , & leur produit sera  $x^4 - 2ffxx + f^4 = 0$ ; d'où l'on voit que quand il y a quatre racines égales, & qu'il n'y a pas de second terme, deux doivent être positives & deux négatives, que le troisième terme a le signe —; qu'il n'y a pas de quatrième terme; & que le cinquième terme a toujours +: ainsi l'équation est  $x^4 - pxx + r = 0$ .

3°. On comparera les termes du produit avec les termes correspondans de l'équation, & l'on aura  $2ff = p$ ,  $f^4 = r$ ; d'où l'on déduit  $ff = \frac{p}{2}$ , &  $f^4 = \frac{r}{4}$ ; par conséquent  $\frac{p^2}{4} = r$ .

Ainsi l'on connoîtra que les quatre racines sont égales, quand  $\frac{p^2}{4} = r$ ; & de plus l'équation ne sera que du second degré: chaque racine sera  $x = f = \sqrt{\frac{p}{2}}$ , ou  $x = f = \sqrt[4]{r}$ .

*Second cas quand trois racines sont égales.*

ON supposera de même le second terme évanoui, & que chaque racine égale est représentée par  $f$ ; & si les trois

font positives, leur produit sera  $x^3 - 3fxx + 3ffx - f^3 = 0$ ,  
 si elles sont négatives, leur produit sera  $x^3 + 3fxx + 3ffx + f^3 = 0$ . Il faudra multiplier le premier par  $x + 3f = 0$ ,  
 & le second par  $x - 3f = 0$ ; & l'on aura le produit  $x^4 - 6ffxx + 8f^3x - 3f^4 = 0$ , quand les trois racines égales  
 sont positives; &  $x^4 - 6ffxx - 8f^3x - 3f^4 = 0$ , quand elles  
 sont négatives; & l'équation generale pour l'un & l'autre  
 cas, sera  $x^4 - pxx \pm qx - r = 0$ .

On comparera les termes de chaque produit avec ceux de l'équation générale qui leur répondent, & l'on aura les trois équations suivantes : 1<sup>re</sup>,  $6ff = p$ ; 2<sup>e</sup>,  $8f^3 = q$ ; 3<sup>e</sup>,  $3f^4 = r$ .

L'on déduira de la 1<sup>re</sup>  $ff = \frac{p}{6}$ , &  $f^4 = \frac{p^2}{16}$ ; de la seconde,  $f^3 = \frac{q}{8}$ ; de la troisième  $f^4 = \frac{r}{3}$ .

Ainsi quand trois racines sont égales,  $\frac{p}{6} = \frac{r}{3}$ , ou  $\frac{p}{12} = r$  ;  
& la racine égale sera  $x = f = \sqrt{\frac{p}{6}}$ , ou  $x = f = \sqrt[3]{\frac{r}{3}}$ .

*Troisième cas quand deux racines sont égales.*

ON supposera toujours le second terme évanoui, & que chaque racine égale est représentée par  $f$ ; ainsi les deux équations lineaires des racines égales, quand elles seront positives; seront  $x - f = 0$ ,  $x - f = 0$ , & leur produit sera  $xx - 2fx + ff = 0$ ; & quand elles seront négatives, leur produit sera  $xx + 2fx + ff = 0$ .

Les deux équations des deux racines inégales seront  $x + f - b = 0$ ,  $x + f + b = 0$ , quand elles seront toutes deux négatives, & alors  $f$  surpassera  $b$ ; & si l'une est positive & l'autre négative,  $b$  surpassera  $f$ ; & leur produit sera  $xx + 2fx + ff = 0$ .

Mais si elles sont positives, les équations lineaires seront  $x - f - b = 0$ ,  $x - f + b = 0$ , &  $f$  surpassera  $b$ ; ou si l'une est positive & l'autre négative,  $b$  surpassera  $f$ ; & leur produit sera  $xx - 2fx + ff = 0$ .

Quand les deux racines différentes des deux racines égales seront imaginaires, leurs équations lineaires seront  $x - f - \sqrt{-bb} = 0$ ,  $x - f + \sqrt{-bb} = 0$ , & leur produit sera  $xx - 2fx + ff = 0$ ; ou bien, si on les conçoit négatives,  $+bb$

ves, elles seront  $x + f - \sqrt{-hh} = 0$ ,  $x + f + \sqrt{-hh} = 0$ ;  
& leur produit sera  $xx + 2fx + ff = 0$ .  
+  $hh$

On multipliera l'équation des deux racines égales par l'équation des deux autres racines réelles, propre à faire évanouir le second terme du produit; c'est-à-dire,  $xx - 2fx + ff = 0$ , par  $xx + 2fx + ff = 0$ ; &  $xx + 2fx + ff = 0$ ,  
-  $hh$

par  $xx - 2fx + ff = 0$ ; & l'on aura le produit  $x^4 - 2ffxx - 2ffxx$   
-  $hhxx$   
+  $2fhhx + f^4 = 0$ , lorsque les deux racines égales  
-  $ffhh$

seront positives: On aura le produit  $x^4 - 2ffxx - 2fhhx$   
-  $hhxx$   
+  $f^4 = 0$ , lorsque les deux racines égales seront négatives.  
-  $ffhh$

L'équation generale sera dans le premier cas  $x^4 - pxx + qx \pm r = 0$ , & dans le second cas  $x^4 - pxx - qx \pm r = 0$ .

On comparera les termes de chaque produit avec ceux de l'équation generale qui leur répondent, ce qui donnera les trois équations particulieres qui suivent: 1<sup>re</sup>,  $2ff + hh = p$ ; 2<sup>e</sup>,  $2fhh = q$ ; 3<sup>e</sup>,  $f^4 - ffhh = \pm r$ . La premiere donnera  $hh = p - 2ff$ : Substituant cette valeur de  $hh$  dans la troisieme, on aura  $f^4 - pff + 2f^4 = \pm r$ , qui se réduit à  $f^4 - \frac{p}{3}ff + \frac{r}{3} = 0$ : Et résolvant cette équation du second degré, on aura les deux valeurs de  $ff$ , sçavoir  $ff = \frac{p}{6} + \sqrt{\frac{pp}{36} \pm \frac{r}{3}}$ ; d'où l'on déduira  $f = \sqrt{\frac{p}{6} \pm \sqrt{\frac{pp}{36} \pm \frac{r}{3}}}$ .

D'où l'on déduit la maniere de connoître si une équation du quatrieme degré, dont toutes les racines sont réelles, a deux racines égales, & le moyen de les trouver: car l'équation lineaire qui contient la racine égale sera  $x \mp f = x \mp \sqrt{\frac{p}{6} \pm \sqrt{\frac{pp}{36} \pm \frac{r}{3}}} = 0$ .

Dans l'usage il faudra substituer les grandeurs de l'équation proposée dans la formule  $x \mp \sqrt{\frac{p}{6} \pm \sqrt{\frac{pp}{36} \pm \frac{r}{3}}} = 0$ ; & ensuite diviser la proposée par cette équation lineaire ainsi changée; & si la division est exacte, la proposée aura deux

deux racines égales, que l'on aura à même temps trouvées. Les deux autres racines se trouveront ensuite facilement.

Quand les deux racines différentes des deux racines égales seront imaginaires, on multipliera l'équation des deux racines égales par l'équation des deux imaginaires propre à faire évanouir le second terme du produit; c'est-à-dire, on multipliera  $xx - 2fx + ff = 0$ , par  $xx + 2fx + ff = 0$ ,

$+ hh$   
&  $xx + 2fx + ff = 0$ , par  $xx - 2fx + ff = 0$ ; & l'on aura  
 $+ hh$

le produit  $x^4 - 2ffxx - 2fhbx + f^2 = 0$ , quand les deux  
 $+ hhxx$   $+ ffbh$

racines égales seront positives: on aura le produit  $x^4 - 2ffxx$   
 $+ hhxx$

$+ 2fhbx + f^2 = 0$ , quand les deux racines égales seront  
 $+ ffbh$

négatives: & comme  $hh$  peut être moindre que  $2ff$ , ou surpasser  $2ff$ , le troisième terme pourra avoir  $+$  ou  $-$ , selon que l'un ou l'autre arrivera.

L'équation générale, lorsque les deux racines égales seront positives, sera  $x^4 + pxx - qx + r = 0$ ; &  $x^4 + pxx + qx + r = 0$ , quand elles seront négatives.

On comparera les termes de chaque produit avec les termes correspondans de l'équation générale, & l'on aura les trois équations particulières qui suivent: 1<sup>re</sup>,  $-2ff + hh = +p$ ; 2<sup>e</sup>,  $2fhb = q$ , 3<sup>e</sup>,  $f^2 + ffbh = +r$ .

La première donnera  $hh = +p + 2ff$ : substituant cette valeur de  $hh$  dans la troisième, l'on trouvera  $f^2 + pff + 2f^2 = r$ , qui se réduit à  $f^2 + \frac{p}{3}ff - \frac{r}{3} = 0$ ; & résolvant cette équation du second degré, on trouvera ces deux valeurs de  $ff$ , sçavoir  $ff = \mp \frac{p}{6} + \sqrt{\frac{pp}{36} + \frac{r}{3}}$ ,  $ff = \mp \frac{p}{6} - \sqrt{\frac{pp}{36} + \frac{r}{3}}$ : il y aura  $-\frac{p}{6}$ , quand la proposée aura  $+ pxx$ ; & il y aura  $+\frac{p}{6}$ , quand la proposée aura  $- pxx$ .

L'on déduira de ces équations  $f = \sqrt{\mp \frac{p}{6} \pm \sqrt{\frac{pp}{36} + \frac{r}{3}}}$ ; par conséquent l'équation linéaire  $x + f = 0$ , deviendra  
 $x + \sqrt{\mp \frac{p}{6} \pm \sqrt{\frac{pp}{36} + \frac{r}{3}}} = 0$ .

Dans l'usage, pour connoître si une équation proposée contient deux racines égales, & les deux autres imaginaires,

- on remarquera, 1°. que quand le second terme est évanoui, & qu'il y a  $+$   $p$ , il y a des racines imaginaires dans l'équation: \* mais il y en peut aussi avoir quoiqu'il y ait  $- pxx$ .  
 \* 29. 2°. On substituera les grandeurs de la proposée, représentées par  $p$ ,  $r$ , à leur place dans l'équation lineaire  $x \mp$

$\sqrt{-\frac{p}{r}} \pm \sqrt{\frac{p}{r} + \frac{r}{3}} = 0$ ; & on divisera la proposée par l'équation lineaire qui viendra de la substitution: si la division se fait sans reste, la proposée contient deux racines égales chacune à celle que contient l'équation lineaire, & les deux autres sont imaginaires.

Comme ce Problème est facile à concevoir, il est inutile d'en rapporter ici des exemples.

La démonstration est la même que celle dont on s'est servi pour démontrer le second Problème.

## PROBLÈME V.

100. *RESOUDRE les équations du quatrième degré, c'est-à-dire, en trouver les quatre racines.*

Pour abréger le calcul, on supposera que le second terme est évanoui.

I. *Lorsque toutes les racines sont commensurables, ou qu'il y en a quelqu'une.*

LA méthode generale du premier Problème du quatrième Livre est la plus courte; c'est-à-dire, il faut diviser l'équation par l'inconnue  $x$  lineaire plus ou moins chaque diviseur du dernier terme de la proposée, & lorsque la proposée aura ses racines commensurables, on les trouvera toujours par cette méthode, c'est-à-dire, on trouvera toujours les équations lineaires de  $x +$  ou  $-$  un diviseur du dernier terme, qui diviseront exactement la proposée; & si l'on ne trouve aucune de ces équations lineaires qui divise exactement la proposée, elle n'aura aucune racine commensurable: si elle n'en a voit qu'une de commensurable, en divisant la proposée par l'équation lineaire qui contient cette racine, on réduiroit la proposée à une équation du troisième degré, qu'on résoudroit par les Problèmes de la Section précédente.



## A V E R T I S S E M E N T.

**L**ORSQU'UNE équation du quatrième degré n'a aucune de ses racines commensurables, on la peut concevoir comme composée de deux équations, dont chacune est du second degré, & supposant que  $xx + fx + g = 0$ , représente l'une de ces deux équations; ou bien le coefficient du second terme représenté par  $f$ , sera commensurable; ou bien le dernier terme représenté par  $g$ , sera commensurable; ou bien enfin l'un & l'autre seront incommensurables. On va donner la méthode de trouver dans le premier cas, le coefficient représenté par  $f$ , & le dernier terme représenté par  $g$ ; comme aussi de les trouver dans le second & troisième cas, quand les réduites où l'on arrivera dans ces cas, ne seront pas comprises dans le cas irréductible du troisième degré; & l'on aura une des équations du second degré, dont la proposée est composée. La méthode qu'on va donner, fera trouver à même temps l'autre équation du second degré, qui avec la précédente, compose la proposée. Il ne faudra plus que résoudre chacune de ces équations du second degré par le premier Problème, & l'on aura les quatre racines de la proposée.

II. *Lorsque le coefficient du second terme d'une des deux équations du second degré, qui composent la proposée, est commensurable, ou du moins sa seconde puissance; ou bien lorsque le dernier terme de la même équation du second degré est commensurable.*

## M É T H O D E.

101. **O**N supposera que l'équation générale  $x^4 + pxx + qx + r = 0$ , représente toutes les équations du quatrième degré: On supposera aussi que  $xx + fx + g = 0$ , représente une des deux équations du second degré qui composent l'équation du quatrième degré.

On divisera  $x^4 + pxx + qx + r = 0$ , par  $xx + fx + g = 0$ , & on continuera la division jusqu'à ce qu'on ait un reste dans lequel l'inconnue  $x$  soit linéaire. Le quotient sera  $xx - fx + p = 0$ ; & le reste sera  $-f^2x + 2fgx - pfx$

$$\begin{array}{r} -g \\ +ff \end{array}$$

$+ qx - ffg + gg - pg + r$ . On supposera chaque terme de

F f ij

ce reste égal à zero, ce qui donnera les deux équations particulières qui suivent, qui serviront à déterminer les indéterminées  $f$  &  $g$ ,

$$\begin{array}{lcl} 1^{\text{re}}, & -f^3 + 2gf + q = 0; & 2^{\text{e}}, -ffg + gg = 0. \\ & -pf & -pg \\ & & +r \end{array}$$

Ou bien en transposant,

$$\begin{array}{lcl} 1^{\text{re}}, & f^3 - 2gf - q = 0; & 2^{\text{e}}, gff - gg = 0. \\ & + pf & + pg \\ & & -r \end{array}$$

On trouveroit les mêmes équations, en supposant les deux équations indéterminées du second degré  $xx + fx + g = 0$ ,  $xx - fx + h = 0$ , & en comparant, après les avoir multipliées, les termes du produit avec les termes correspondans de l'équation générale  $x^3 + pxx + qx + r = 0$ , on auroit trois équations particulières, par le moyen desquelles dégagant l'indéterminée  $h$ , on trouveroit les deux mêmes équations qui précèdent.

On cherchera le plus grand diviseur commun de ces deux équations, en prenant  $f$  pour l'inconnue, & on continuera l'opération jusqu'à ce qu'on trouve un reste dans lequel  $f$  ne se trouve plus: ce reste, qui ne contiendra aucune autre inconnue que  $g$ , étant mis en ordre par rapport à  $g$ , & supposé égal à zero, sera  $g^3 - pg^2 - rg^2 + 2prg^2 - rrgg - prrg + r^3 - qgg^2$

Ce sera la réduite qui servira à faire trouver le dernier terme  $g$  de l'équation  $xx + fx + g = 0$ , lorsqu'il est communisable. On mettra à part le dernier diviseur  $-ggf + rf$

$-gg = 0$ , qui a servi à trouver la réduite; ou plutôt on prendra la valeur de  $f$  dans ce diviseur, qui est  $f = \frac{-rg}{gg}$ , & on la mettra à part: elle servira à faire trouver  $f$ , quand on aura découvert la valeur de  $g$ .

On cherchera de même une réduite qui n'ait point d'autre inconnue que  $f$ ; & pour la trouver, on ordonnera les deux équations  $f^3 - 2gf - q = 0$ ,  $gff - gg = 0$ ,  
 $+ pf$   $+ pg$   
 $-r$

par rapport à l'inconnue  $g$ ; & l'on aura ces deux équations,

$$\begin{array}{l} 1^{\text{re}}, \quad gg - ffg + r = 0; \quad 2^{\text{e}}, \quad 2fg - f^3 = 0. \\ \quad \quad -pg \quad \quad \quad -pf \\ \quad \quad \quad \quad \quad +q \end{array}$$

On cherchera le plus grand diviseur commun de ces deux équations, & on continuera l'opération jusqu'à ce qu'on soit arrivé à un reste qui ne contienne plus l'indéterminée  $g$ ; ce reste, qui n'aura plus d'autre inconnue que  $f$ , étant mis en ordre par rapport à  $f$ , & supposé égal à zero, sera  $f^3 + 2pf^2 + ppf - qq = 0$ . Ce sera la réduite qui servira à faire

—  $4rff$   
trouver le coefficient  $f$  de l'équation  $xx + fx + g = 0$ ; lorsqu'il est commensurable, ou du moins lorsque la seconde puissance  $ff$  est commensurable.

On prendra la valeur de  $g$  dans le dernier diviseur qui a donné la réduite pour reste, qui est  $2fg - f^3 = 0$ ; cette

$$\begin{array}{l} -pf \\ +q \end{array}$$

valeur sera  $g = \frac{f^3 + pf - q}{2f}$ , & on la mettra à part, pour s'en servir à trouver la valeur de l'indéterminée  $g$ , quand on aura découvert la valeur de  $f$  par le moyen de la réduite.

Ces deux réduites, dont l'une des indéterminées  $f$  ou  $g$  est l'inconnue, avec les valeurs de l'autre indéterminée  $f$  ou  $g$ , qui répondent à chacune des réduites, serviront à trouver la première des deux équations du second degré, dont une équation proposée du quatrième degré, qu'on veut résoudre, est composée; & le quotient  $xx - fx + p$

$= 0$ , servira à trouver l'autre.

$$\begin{array}{l} -g \\ +ff \end{array}$$

*La maniere de trouver les quatre racines d'une équation du quatrième degré par les formules précédentes.*

101. 1°. ON substituera dans laquelle on voudra des deux réduites, les valeurs de  $+p$ ,  $+q$ ,  $+r$ , prises dans l'équation qu'on veut résoudre, en remarquant que  $+p$  marque le coefficient du troisième terme de la proposée, avec son signe  $+$  ou  $-$ ; & ainsi des autres.

2°. On divisera la nouvelle réduite qui en résultera par  $g$   $+$  ou  $-$  chaque diviseur du dernier terme, quand on se

sert de la réduite où est  $g$ , & alors il ne faut se servir que des diviseurs communs au dernier terme de la réduite, & au dernier terme de la proposée: & si c'est la réduite dont  $f$  est l'inconnue, on la divisera par  $ff +$  ou  $-$  chaque diviseur du dernier terme de la réduite, qui n'aura que deux dimensions quand la proposée est littérale & homogène.

Si les grandeurs représentées par  $ff$  &  $g$  de l'équation  $xx + fx + g = 0$ , sont commensurables, on trouvera toujours une équation faite de  $ff$ , ou de  $g$  plus ou moins un diviseur du dernier terme de la réduite qui fera la division sans reste, & l'on aura par ce moyen une valeur de  $f$  ou de  $g$ .

Si la nouvelle réduite qu'on trouve, après avoir substitué dans la réduite dont  $f$  est l'inconnue, les valeurs de  $p, q, r$ , étoit abaissée d'un degré, une valeur de  $ff$  seroit zero.

3°. On substituera la valeur de  $f$  ou de  $g$ , qu'on vient de découvrir, dans l'équation de  $f$  ou de  $g$  lineaire, mise à part, & les valeurs de  $f$  & de  $g$  étant ainsi découvertes, on les substituera dans  $xx + fx + g = 0$ , & l'on aura la première des deux équations du second degré qui composent la proposée: On substituera encore les valeurs découvertes de  $f$  & de  $g$ , & celles de  $p$ , dans le quotient  $xx - fx + p$

$$\frac{-g}{+ff}$$
  
 $= 0$ , & l'on aura la seconde équation du second degré qui compose la proposée.

4°. On trouvera les racines de ces deux équations du second degré, & l'on aura les quatre racines de la proposée.

#### A V E R T I S S E M E N T.

203. ON mettra ici avant les exemples, toutes les formules dont on a besoin pour les résoudre.

L'équation générale est  $x^4 + pxx + qx + r = 0$ .

La première des deux équations du second degré dont elle est composée, est  $xx + fx + g = 0$ ; la seconde est  $xx - fx + p = 0$ .

$$\frac{-g}{+ff}$$

La réduite pour trouver  $f$ , ou  $ff$ , est  $f^2 + 2pf + ppff - 4rff$

$$-qq = 0,$$

Quand on aura trouvé la valeur de  $ff$  & de  $f$  par cette réduite, la formule pour trouver  $g$ , est  $g = \frac{f^2 + ff - r}{2f} = \frac{f}{2} + \frac{f}{2} - \frac{r}{2f}$ ; ainsi  $xx + fx + g = 0$ ,  $= xx + fx + \frac{ff}{2} + \frac{f}{2} - \frac{r}{2f} = 0$ ; &  $xx - fx + p = 0$ ,  $= xx - fx + \frac{ff}{2} + \frac{f}{2} - \frac{r}{2f} = 0$ .

La formule pour trouver  $g$ , quand  $g$  est commensurable; est  $g^2 - pg^2 - rg^2 + 2prg^2 - rrgg - prrg + r^2 = 0$ .

Quand on aura trouvé la valeur de  $g$  par cette réduite; la formule pour trouver  $f$ , est  $f = \frac{-2g}{gg - r}$ .

On remarquera que le calcul est plus court en se servant de la formule de la réduite, dont  $f$  est l'inconnue; qui n'est que du 3<sup>e</sup> degré, & par laquelle on trouvera toujours la valeur de  $f$ , quand la grandeur représentée par  $f$ , est commensurable; ou quand même  $f$  étant incommensurable,  $ff$  est commensurable; & que le calcul est plus long si l'on se sert de la formule de la réduite, dont  $g$  est l'inconnue, qui est du 6<sup>e</sup> degré, & qu'on ne peut résoudre que quand  $g$  est commensurable.

## EXEMPLE I.

POUR trouver les quatre racines de l'équation  $x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^2x + a^2 = 0$ , on ôtera d'abord le second terme de cette équation, en supposant  $x = y + \frac{1}{2}a$ ; & substituant la valeur de  $x$  dans la proposée, on aura  $y^4 + \frac{1}{2}aayy - a^2y + \frac{1}{16}a^4 = 0$ , qui n'a pas de second terme;  $-ccyy - accy - \frac{1}{4}aacc$

Afin que l'équation generale  $x^4 + pxx + qx + r = 0$ , représente cette équation, on supposera  $+p = +\frac{1}{2}aa - cc$ ,  $+q = -a^2 - acc$ ,  $+r = +\frac{1}{16}a^4 - \frac{1}{4}aacc$ .

On substituera ces valeurs de  $p, q, r$ , dans la réduite  $f^4 + 2pf^2 + ppff - qq = 0$ ; & l'on aura la réduite,  $-4rff$

$$f^4 + aaf^2 - a^2ff - a^4 = 0.$$

$$- 2ccf^2 + c^2ff - 2a^2cc$$

$$- aac^2$$

On divisera cette réduite par  $ff - aa - cc = 0$ , ( $aa + cc$

est un diviseur du dernier terme, ) & la division se faisant sans reste, on aura  $ff = aa + cc$ ; &  $f = \sqrt{aa + cc}$ .

On substituera ces valeurs de  $ff$  & de  $f$ , dans  $g = \frac{ff}{2} + \frac{p}{2} - \frac{f}{2}$ , & l'on trouvera  $g = \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}cc$

$+ \frac{a^3 + acc}{2\sqrt{aa + cc}} = \frac{1}{4}aa + \frac{a\sqrt{aa + cc} \times \sqrt{aa + cc}}{2\sqrt{aa + cc}} = \frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}a \times \sqrt{aa + cc}$ . On substituera les valeurs de  $f$  & de  $g$  dans  $xx + fx + g = 0$ ; & on substituera les mêmes valeurs & celle de  $p$ , dans  $xx - fx + p = 0$ , où l'on supposera que  $x$  repré-

$$\frac{-g}{+ff}$$

sente  $y$ ; & l'on aura  $yy + y\sqrt{aa + cc} + \frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc} = 0$ ; &  $yy - y\sqrt{aa + cc} + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc} = 0$ : ce sont les deux équations du second degré qui composent  $y^4 + \frac{1}{2}aayy$ , &c.

$$-ccyy$$

Enfin on trouvera par le premier Problème les racines de ces deux équations du 2<sup>e</sup> degré, & l'on aura les quatre racines de  $y^4 + \frac{1}{2}aayy$ , &c. qui sont la 1<sup>re</sup>,  $y = -\frac{1}{2}\sqrt{aa + cc}$

$$-ccyy$$

$+ \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}$ ; la 2<sup>e</sup>,  $y = -\frac{1}{2}\sqrt{aa + cc}$

$- \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}$ ; la 3<sup>e</sup>,  $y = +\frac{1}{2}\sqrt{aa + cc}$

$+ \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}$ ; la 4<sup>e</sup>,  $y = +\frac{1}{2}\sqrt{aa + cc}$

$- \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}$ .

Substituant les valeurs de  $y$  dans  $x = y + \frac{1}{2}a$ , on aura les quatre racines de la proposée: 1<sup>re</sup>,  $x = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{aa + cc}$

$+ \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}$ ; 2<sup>e</sup>,  $x = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{aa + cc}$

$- \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}$ ; 3<sup>e</sup>,  $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{aa + cc}$

$+ \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}$ ; 4<sup>e</sup>,  $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{aa + cc}$

$- \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}$ .

### EXEMPLE II.

POUR trouver les racines de l'équation  $x^4 - 32xx + 5x + 12 = 0$ , on supposera  $+p = -32$ ,  $+q = +5$ ,  $+r = +12$ . On substituera les valeurs de  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , dans la réduite dont  $f$  est l'inconnue; & l'on aura pour la réduite de la proposée,

proposée,  $f^2 - 64f^2 + 976ff - 25 = 0$ . On divisera cette réduite par  $ff +$  ou  $-$  un diviseur exact du dernier terme 25, & on trouvera que la division se fait sans reste par  $ff - 25 = 0$ ; d'où l'on déduit  $ff = 25$ , &  $f = 5$ . Substituant cette valeur de  $f$  dans  $g = \frac{ff}{f} + \frac{p}{f} - \frac{q}{f}$ , l'on trouve  $g = \frac{25}{5} - \frac{12}{5} = \frac{13}{5}$ . Substituant ces valeurs de  $f$  & de  $g$  dans  $xx + fx + g = 0$ , & dans  $xx - fx + p = 0$ ,

$$\begin{array}{r} -g \\ +ff \end{array}$$

on aura pour la première des deux équations du second degré qui composent la proposée,  $xx + 5x - 4 = 0$ ; & pour la seconde  $xx - 5x - 3 = 0$ .

En résolvant chacune de ces équations, on trouve que les quatre racines de la proposée sont  $x = -\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{41}{4}}$ ,  $x = -\frac{5}{2} - \sqrt{\frac{41}{4}}$ ,  $x = +\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{17}{4}}$ ,  $x = +\frac{5}{2} - \sqrt{\frac{17}{4}}$ .

## E X E M P L E I I I.

P O U R trouver les racines de  $x^4 - 18xx + 24x - 3 = 0$ , on supposera  $+p = -18$ ,  $+q = +24$ ,  $+r = -3$ . On substituera ces valeurs de  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , dans la réduite dont  $f$  est l'inconnue, & l'on aura pour la réduite de la proposée,  $f^4 - 36f^2 + 336ff - 576 = 0$ . On divisera cette réduite par  $ff -$  ou  $+$  chaque diviseur du dernier terme, & l'on trouvera que  $ff - 12 = 0$ , fait la division sans reste; d'où l'on déduira  $ff = 12$ , &  $f = \sqrt{12}$ . Substituant cette valeur de  $f$  dans  $g = \frac{ff}{f} + \frac{p}{f} - \frac{q}{f}$ , on trouvera  $g = \frac{12}{\sqrt{12}} - \frac{18}{\sqrt{12}} - \frac{24}{\sqrt{12}} = -3 - \frac{3\sqrt{12}}{\sqrt{12}} = -3 - \sqrt{12}$ . Or  $\frac{12}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{12}} = \sqrt{12}$ , ainsi  $g = -3 - \sqrt{12}$ . Substituant les valeurs de  $f$  & de  $g$  dans  $xx + fx + g = 0$ , & dans  $xx - fx + p = 0$ , l'on

$$\begin{array}{r} -g \\ +ff \end{array}$$

aura  $xx + x\sqrt{12} - 3 = 0$ , &  $xx - x\sqrt{12} - 3 = 0$ ,

$$-\sqrt{12}$$

$$+\sqrt{12}$$

pour les deux équations du second degré qui composent la proposée. On en trouvera facilement les racines par le premier Problème.\*

\* 76.

## E X E M P L E I V.

P O U R trouver les racines de  $x^4 + 4xx - 4x + 15 = 0$ , on supposera  $+p = +4$ ,  $+q = -4$ ,  $+r = +15$ . On

substituera les valeurs de  $p, q, r$ , dans la réduite dont l'inconnue est  $f$ , & l'on aura la réduite de la proposée  $f^6 + 8f^4 - 44ff - 16 = 0$  : on divisera cette réduite par  $ff - 4$  ou  $+4$  chaque diviseur du dernier terme, & on trouvera que  $ff - 4 = 0$ , fait la division sans reste, d'où l'on déduira  $ff = 4$ , &  $f = 2$ . Substituant la valeur de  $f$  dans  $g = \frac{ff}{2} + \frac{f}{2} - \frac{f}{2}$ , on trouvera  $g = \frac{4}{2} + \frac{4}{2} - \frac{4}{2} = 2$ . Substituant les valeurs de  $f$  & de  $g$  dans  $xx + fx + g = 0$ ,  $xx - 2x + 2 = 0$ ,

$$\begin{array}{r} -g \\ +ff \end{array}$$

on aura  $xx + 2x + 2 = 0$ , &  $xx - 2x + 2 = 0$ . Ce sont les deux équations du second degré qui composent la proposée. On en trouvera facilement les racines par le premier

\* 76. Problème, \* qui sont toutes imaginaires.

La démonstration de ce cinquième Problème a déjà été donnée dans la quatrième Section du quatrième Livre. \*

Démonstration  
du 5<sup>e</sup>  
Problème.

III. Lorsque le coefficient représenté par  $f$  dans l'équation  $xx + fx + g = 0$ , & le dernier terme  $g$ , sont incommensurables.

104. VOICI une méthode pour résoudre ce cas dans plusieurs rencontres : On supposera les deux équations du second degré, qui représentent par leurs indéterminées les deux équations qui composent la proposée, on les supposera, dis-je, avec des incommensurables au second & au dernier terme ; par exemple, la première sera  $xx - x\sqrt{f} + g = 0$ ,

$$\begin{array}{r} +\sqrt{f} \end{array}$$

& la seconde  $xx + x\sqrt{f} + g = 0$  : on les multipliera l'une

$$\begin{array}{r} +\sqrt{f} \end{array}$$

par l'autre, & l'on aura le produit  $x^2 - fxx + 2fx + gg = 0$ .

$$\begin{array}{r} +2gxx \\ -f \end{array}$$

L'équation générale sera  $x^2 + pxx + qx + r = 0$ .

On comparera les termes correspondans de ces deux équations, & l'on aura les trois équations particulières qui suivent : 1<sup>re</sup>,  $-f + 2g = +p$  ; d'où l'on déduira  $g = +\frac{f+p}{2}$  ; 2<sup>e</sup>,  $2f = q$ ,  $f = \frac{q}{2}$  ; 3<sup>e</sup>,  $+gg - f = +r$ .

L'indéterminée  $f$  est connue par la seconde équation  $f = \frac{q}{2}$  : Substituant sa valeur dans la première, l'on aura  $g = +\frac{f}{2} + \frac{r}{f}$ .

L'équation  $xx - x\sqrt{f} + g = 0$ , sera  $xx - x\sqrt{\frac{1}{2}q} + \frac{r}{\sqrt{\frac{1}{2}q}} = 0$



$$+\frac{1}{4}-\sqrt{\frac{1}{2}}=0; \text{ \& } xx+x\sqrt{f}+g=0, \text{ fera } xx+x\sqrt{\frac{1}{2}q}$$

$$-\frac{1}{4}p+\frac{1}{4}q+\sqrt{\frac{1}{2}q}=0.$$

*Application de cette méthode à un exemple.*

**P**OUR trouver les racines de  $x^2-18xx+24x-3=0$ ; on supposera  $-p=-18$ , ou  $p=18$ ;  $q=24$ , &  $-r=-3$ , ou  $r=3$ . On substituera les valeurs de  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , dans les deux formules précédentes, & l'on aura  $xx-x\sqrt{12}-9+6-\sqrt{12}=0$ , c'est-à-dire  $xx-x\sqrt{12}-3=0$ , &  $xx+x\sqrt{12}-3=0$ . Ce sont les deux équations qui com-

posent la proposée; on en trouvera facilement les racines par le premier Problème. \*

\* 76.

**IV.** Lorsque  $f$  &  $ff$  sont incommensurables dans l'équation composante  $xx+fx+g=0$ .

105. **I**L peut arriver des cas où  $f$  &  $ff$  se trouveront incommensurables, & alors on ne trouvera pas d'équation simple de  $ff$  ou + un diviseur du dernier terme de la réduite  $f^2+2pf^*$ , &c. qui divise la réduite sans reste. Voici une méthode pour ce cas dans plusieurs rencontres.

On pourra supposer que les deux équations composantes du second degré sont  $xx-x\sqrt{f}+g=0$ , &  $xx+x\sqrt{f}+g=0$ . Leur produit est  $x^2-fxx+2fx+gg=0$ ,  $+2gxx-f$

La formule générale sera  $x^2+pxx+qx+r=0$ .

Les comparaisons des termes correspondans donneront les équations suivantes : 1<sup>re</sup>,  $-f+2g=+p$ ; d'où l'on déduit  $g=+\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}f$ ; 2<sup>e</sup>,  $2f=+q$ ; d'où l'on déduit  $f=+\frac{1}{2}q$ ; 3<sup>e</sup>,  $gg-f=+r$ .

On déduira de la première & de la seconde  $g=+\frac{1}{2}p+\frac{1}{4}q$ . Substituant ces valeurs de  $f$  & de  $g$  dans les deux équations composantes, la première sera  $xx-x\sqrt{\frac{1}{2}q}+\frac{1}{2}p+\frac{1}{4}q-\sqrt{\frac{1}{2}q}=0$ ; & la seconde,  $xx+x\sqrt{\frac{1}{2}q}+\frac{1}{2}p+\frac{1}{4}q+\sqrt{\frac{1}{2}q}=0$ .

On appliquera ces formules aux exemples, comme on l'a fait dans le cas précédent.

## REMARQUE.

ON pourra distinguer quelles sont les équations du quatrième degré qu'on pourra résoudre par la méthode du 3<sup>e</sup> & 4<sup>e</sup> art. qui précédent, en substituant les valeurs de  $f$  & de  $g$  dans la troisième équation particulière  $gg - f = \pm r$ ; car l'on aura  $\frac{1}{4}pp + \frac{1}{4}pq + \frac{1}{16}qq - \frac{1}{2}q = \pm r$ ; ainsi les équations dans lesquelles la quantité  $\frac{1}{4}pp + \frac{1}{4}pq + \frac{1}{16}qq - \frac{1}{2}q$ , ne sera pas égale au dernier terme représenté par  $r$ , ne pourront se résoudre par ces méthodes.

*Méthode pour trouver les deux équations du second degré, dont une équation du quatrième est composée; dans les cas où se servant de la réduite dont  $f$  est l'inconnue, il arrive que la grandeur représentée par  $ff$  est incommensurable.*

106. QUAND aucune équation simple de  $ff$  — ou + un des diviseurs du dernier terme de la réduite  $f^2 + 2pf^2$ , &c. ne divise la réduite sans reste, dans ce cas  $ff$  est incommensurable. Pour résoudre dans ce cas la réduite  $f^4 + 2pf^3 + ppff - 4rff - qq = 0$ , tirée de l'équation générale  $x^4 + px^3 + qx^2 + r = 0$ , on ôtera le second terme de la réduite, en supposant  $ff = y - \frac{2}{3}p$ ; & après avoir substitué  $y - \frac{2}{3}p$  à la place de  $ff$  dans la réduite, on aura la transformée de la réduite  $y^3 - \frac{1}{3}ppy - \frac{2}{27}p^3 = 0$ , qui n'a pas de second terme.  
 $- 4ry + \frac{8}{3}pr - qq$

On substituera les valeurs de  $p, q, r$ , prises dans l'équation qu'on voudra résoudre; & où l'on aura trouvé que  $ff$  est incommensurable; on les substituera, dis-je, ces valeurs dans la transformée de la réduite qu'on vient de trouver; & on résoudra l'équation transformée par les méthodes du troisième degré; & quand on aura trouvé la valeur de  $y$ , on la substituera dans  $ff = y - \frac{2}{3}p$ , & l'on aura la valeur de  $ff$ : on trouvera ensuite celle de  $g = \frac{ff}{f} + \frac{f}{2} - \frac{1}{2}r$ ; après cela on trouvera les deux équations du second degré qui composent la proposée, & on aura par leur moyen les quatre racines de la proposée.

## E X E M P L E.

**P**OUR trouver les racines de  $x^4 - 50xx + 100x - 100 = 0$ , on supposera, afin que l'équation generale  $x^4 + pxx + qx + r = 0$ , représente la proposée, que  $+p = -50$ ,  $+q = +100$ ,  $+r = -100$ ; mettant ces valeurs de  $p, q, r$ , dans la formule de la réduite  $f^2 + 2pf^2$ , &c. la réduite de la proposée sera  $f^2 - 100f^2 + 2900ff - 10000 = 0$ ; ou plutôt on substituera les valeurs de  $p, q, r$ , immédiatement dans la transformée de la réduite  $y^3 - \frac{1}{3}ppy - \frac{2}{27}p^2$   
 $- 4ry + \frac{8}{3}pr$   
 $- 9q$

$= 0$ ; & l'on aura  $y^3 - \frac{100}{3}y + \frac{140000}{27} = 0$ ; & l'équation  $ff = y - \frac{1}{3}p$ , sera  $ff = y + \frac{100}{3}$ . On ôtera les fractions de  $y^3 - \frac{100}{3}y + \frac{140000}{27} = 0$ , en supposant  $3y = z$ , &  $y = \frac{1}{3}z$ ; & l'on aura  $z^3 - 3900z + 340000 = 0$ . On trouvera la valeur de  $z$ , en résolvant cette équation du troisième degré par la seconde méthode generale, \* & l'on trouvera  $z =$  \*94:

$\sqrt[3]{-170000 - \sqrt{26703000000}} + \sqrt[3]{-170000 + \sqrt{26703000000}}$ ;  
 on substituera cette valeur de  $z$  dans  $y = \frac{1}{3}z$ , & l'on aura  $y = \frac{1}{3}x$

$\sqrt[3]{-170000 - \sqrt{26703000000}} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{-170000 + \sqrt{26703000000}}$ ;  
 on substituera cette valeur de  $y$  dans  $ff = y + \frac{100}{3}$ , & l'on

aura  $ff = \frac{100}{3} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{-170000 - \sqrt{26703000000}} + \frac{1}{3}x$

$\sqrt[3]{-170000 + \sqrt{26703000000}}$ ; d'où l'on déduira  $f =$

$\sqrt[3]{\frac{100}{3}} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{-170000}$ , &c. On substituera les valeurs de  $f$

& de  $ff$  dans  $g = +\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}ff - \frac{q}{2f}$ , & l'on aura  $g = -25$

$+ \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{100}{3}} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{-170000}$ , &c. On substituera les valeurs

de  $f$  & de  $g$ , qu'on vient de découvrir, dans  $xx + fx + g = 0$ , & dans  $xx - fx + p = 0$ ; & l'on aura les deux

$$\begin{array}{c} -g \\ +ff \end{array}$$

équations du second degré qui composent la proposée.

On trouvera enfin les racines de chacune de ces deux équations du second degré, \* & l'on aura les quatre racines \*76. de la proposée.

## REMARQUES.

107. QUAND les trois racines de la réduite, ou, ce qui revient à la même chose, de la transformée de la réduite, sont réelles & incommensurables, on ne peut en trouver la valeur qu'avec des expressions imaginaires qu'on ne sçauroit ôter; & les équations du quatrième degré renferment alors le cas irréductible du troisième degré.

Pour distinguer les cas du quatrième degré où cela peut arriver, il faut remarquer que les quatre racines du 4<sup>e</sup> degré peuvent être ou bien toutes réelles, ou bien deux réelles & deux imaginaires, ou bien enfin toutes imaginaires.

Pour déterminer ce qui regarde ces trois cas, il faut prendre des équations simples dont les indéterminées expriment les rapports des quatre racines dans chacun de ces cas.

*Premier cas où les quatre racines sont réelles.*

108. ON supposera que les quatre équations simples sont  $x - i - k = 0$ ,  $x - i + k = 0$ ,  $x + i - l = 0$ ,  $x + i + l = 0$ . L'équation du second degré faite des deux premières, est  $xx - 2ix + ii = 0$ ; celle qui est composée des deux autres

est  $xx + 2ix + ii = 0$ ; le produit de ces deux équations, qui

est celui des quatre simples, est  $x^4 - 2iixx - 2ikkx + i^4 - k^4$   
 $- k^4xx + 2illx - iikk$   
 $- llxx - iill + kkl$

$= 0$ : ce produit est l'équation indéterminée, qui exprime les rapports des quatre racines de toute équation du 4<sup>e</sup> degré, lorsqu'elles sont toutes réelles, & que le second terme en est évanoui: Et comme les équations du 4<sup>e</sup> degré, dont le second terme est évanoui, & dont les quatre racines sont réelles, doivent avoir des racines négatives & positives: 1<sup>o</sup>. S'il y en a deux positives & deux négatives,  $i$  surpassera  $k$ , &  $i$  surpassera aussi  $l$ . 2<sup>o</sup>. S'il y en a trois positives & une négative,  $i$  surpassera  $k$ , mais  $l$  surpassera  $i$ . 3<sup>o</sup>. S'il y en a trois négatives & une positive,  $k$  surpassera  $i$ , &  $i$  surpassera  $l$ .

Il est évident par cette équation indéterminée, que quand les quatre racines sont réelles, le troisième terme a toujours

le signe — ; ainsi les équations où il a le signe + ; ont nécessairement des racines imaginaires ; ce que l'on a déjà démontré dans le troisième Livre. \*

On supposera que cette équation indéterminée est la même que l'équation générale  $x^4 + px^3 + qx^2 + r = 0$  ; ainsi  $+p = -2ii - kk - ll$ ,  $+q = -2ikk + 2ill$ ,  $+r = +i^2 - iikk - iill + klll$ . \* 29:  
11<sup>e</sup> Cont

On substituera ces valeurs de  $p, q, r$ , dans la réduite  $f^2 + 2pf^2$ , &c. & l'on aura pour la réduite de l'équation indéterminée, qui représente les rapports des racines, l'équation suivante :

$$\begin{aligned} f^4 - 4iif^2 + 8iikkff - 4iik^2 &= 0, \\ - 2kkf^2 + 8iillff + 8iikkll \\ - 2llf^2 + k^2ff - 4iil^2 \\ - 2kkllff \\ + l^2ff \end{aligned}$$

On fera ces remarques sur cette réduite : 1°. Elle peut être divisée exactement par chacune de ces trois équations simples  $ff - 4ii = 0$ ,  $ff - kk - 2kl - ll = 0$ ,  $ff - kk + 2kl - ll = 0$  ; par conséquent toutes les racines de la réduite sont réelles, & même positives, quand toutes celles de la proposée sont réelles : 2°. Le second terme de la réduite a toujours le signe —. 3°. Le troisième terme de la réduite a toujours le signe + ; car  $+8iikk + 8iill$  sont des grandeurs positives, &  $+k^2 - 2kkll + l^2$ , est le carré de  $kk - ll$ , qui est par conséquent positif.

*Second cas lorsque deux racines sont réelles, & deux imaginaires.*

109. Les quatre équations simples qui représentent les rapports des racines, seront  $x - i - k = 0$ ,  $x - i + k = 0$ ,  $x + i - \sqrt{-ll} = 0$ ,  $x + i + \sqrt{-ll} = 0$ .

Le produit des deux premières est  $xx - 2ix + ii = 0$ .  
—  $kk$

Le produit des deux imaginaires est  $xx + 2ix + ii = 0$ .  
+  $ll$

Le produit des quatre est  $x^4 - 2iixx - 2ikkx + i^2 = 0$ .  
—  $kkxx$  —  $2iillx$  —  $iikk$   
+  $llxx$  +  $2iill$   
—  $kkll$

Ce produit est l'équation qui exprime les rapports des quatre racines de toute équation du 4<sup>e</sup> degré, dont deux racines sont réelles, & deux imaginaires.

Pour trouver la réduite de cette équation, on supposera qu'elle est la même que  $x^4 + pxx + qx + r = 0$ ; ainsi  $+p = -2ii - kk + ll$ ,  $+q = -2ikk - 2ill$ ,  $+r = +i^4 - iikk + iill - kkl$ . On substituera ces valeurs de  $p, q, r$ , dans la réduite  $f^4 + 2pf^2$ , &c, & l'on aura.

$$\begin{aligned} f^4 - 4iif^2 + 8iikkff - 4iik^4 &= 0. \\ - 2kkf^2 - 8iillff + 8iikkll \\ + 2llf^2 + k^4ff - 4iik^4 \\ &+ 2kklff \\ &+ l^4ff \end{aligned}$$

On remarquera sur cette réduite qu'elle peut être exactement divisée par chacune des trois équations simples  $ff - 4ii = 0$ ,  $ff - kk + ll - \sqrt{-4kkl} = 0$ ,  $ff - kk + ll + \sqrt{-4kkl} = 0$ ; par conséquent quand une équation du quatrième degré, dont le second terme est évanoui, a deux racines réelles & deux imaginaires, sa réduite a une racine réelle, & deux racines imaginaires.

*Troisième cas lorsque les quatre racines sont imaginaires.*

210. **L**es quatre équations simples qui expriment par leurs indéterminées les rapports des quatre racines des équations du 4<sup>e</sup> degré, qui ont toutes leurs racines imaginaires, & le second terme évanoui, sont  $x - i - \sqrt{-kk} = 0$ ,  $x - i + \sqrt{-kk} = 0$ ,  $x + i - \sqrt{-ll} = 0$ ,  $x + i + \sqrt{-ll} = 0$ : Le produit des deux premières est  $xx - 2ix + ii = 0$ ;

celui des deux autres est  $xx + 2ix + ii = 0$ : Le produit

$$\begin{aligned} \text{des quatre est } x^4 - 2iixx + 2ikkx + i^4 &= 0. \\ + kkxx - 2illx + iikk \\ + llxx &+ iill \\ &+ kkl \end{aligned}$$

Et l'on remarquera que dans toute équation du 4<sup>e</sup> degré, dont les quatre racines sont imaginaires, & le second terme évanoui, le dernier terme a toujours le signe +.

Pour trouver la réduite de cette équation, on la supposera la même que  $x^4 + pxx + qx + r = 0$ ; ainsi  $+p = -2ii + kk + ll$ ,  $+q = +2ikk - 2ill$ ,  $+r = +i^4 + iikk + iill + kkl$ . On substituera les valeurs de  $p, q, r$ , dans la réduite

$$\begin{aligned}
 \text{duite } f^4 + 2pf^3 \&c. \& \text{ l'on aura } f^4 - 4iif^3 - 8iikkff - 4iik^4 = 0. \\
 &+ 2kkf^3 - 8iillff + 8iikkll \\
 &+ 2llf^3 + k^4ff - 4iil^4 \\
 &- 2kkllff \\
 &+ l^4ff
 \end{aligned}$$

On remarquera sur cette réduite, 1<sup>o</sup>. qu'elle peut être exactement divisée par chacune de ces trois équations simples  $ff - 4ii = 0$ ,  $ff + kk + 2kl + ll = 0$ ,  $ff + kk - 2kl + ll = 0$ ; par conséquent la réduite de toute équation du quatrième degré, dont les quatre racines sont imaginaires, & le second terme évanoui, a ses trois racines réelles.

2<sup>o</sup>. Quand le second terme de la réduite a le signe —, c'est-à-dire, quand  $4ii$  surpasse  $2kk + 2ll$ , il est évident que le troisième terme de la réduite a aussi le signe —, car  $kk + ll$  surpasse  $kk - ll$ ; ainsi multipliant  $kk + ll$  par —  $8ii$ , qui surpasse  $kk - ll$ , & multipliant  $kk - ll$  par  $kk - ll$ , le premier produit —  $8iikk - 8iill$  surpassera le second  $k^4 - 2kkl + l^4$ .

*Marques certaines pour distinguer les cas où les équations du 4<sup>e</sup> degré, dont le second terme est évanoui, ont toutes leurs racines réelles; les cas où elles en ont deux imaginaires; ceux où les quatre sont imaginaires; & enfin les cas où on peut les résoudre.*

- XII.** IL suit de ces remarques, 1<sup>o</sup>. que quand le troisième terme d'une équation du 4<sup>e</sup> degré, dont le second terme est évanoui, a le signe +, il y a des racines imaginaires, \* & si à \* 108.  
même temps les racines de sa réduite sont toutes réelles; & 2<sup>o</sup>.  
(ce que l'on connoîtra en faisant évanouir le second terme 13<sup>e</sup> Cas  
de la réduite; car si le cube du tiers du coefficient du troisième terme de la transformée de la réduite, surpasse le carré de la moitié de son dernier terme, ou lui est égal, les trois racines de la réduite seront réelles. \*) Alors les \* 82, 87.  
quatre racines sont imaginaires\*, car s'il n'y avoit que deux \* 110.  
imaginaires dans la proposée, deux racines de la réduite seroient imaginaires.\* \* 109.

De plus, quand le second terme de la réduite d'une équation du 4<sup>e</sup> degré, dont le second terme est évanoui, a le signe —, & que le troisième terme de la même réduite a encore le signe —, les quatre racines de l'équation sont imaginaires.\* \* 120.

Quand on a donc l'une ou l'autre de ces deux marques, l'équation est résolue; car on sçait que le Problème renferme contradiction, & ne peut avoir aucune résolution réelle.

2<sup>o</sup>. Quand le troisième terme d'une équation du 4<sup>e</sup> degré, dont le second terme est évanoui, a le signe +, & que le dernier terme a le signe —, il est certain qu'il y a deux racines imaginaires, & deux racines réelles, car le dernier  
 \*110. terme auroit + s'il y avoit quatre imaginaires.\*

Quand le troisième terme d'une équation du 4<sup>e</sup> degré, dont le second terme est évanoui, a le signe —, & qu'en même temps la réduite de cette équation a une racine réelle, & deux racines imaginaires, il est certain que l'équa-  
 \*109. tion a deux racines imaginaires, & deux racines réelles.\*  
 Or on connoîtra que la réduite aura une racine réelle & deux imaginaires, en faisant évanouir le second terme de la réduite, car si le cube du tiers du coefficient du troisième terme de la transformée de la réduite est moindre que le  
 \*83. quarré de la moitié de son dernier terme, \* il est certain que la transformée aura une racine réelle & deux imaginaires; par conséquent la réduite aussi; d'où il suivra que l'équation proposée aura deux racines réelles & deux imaginaires.

On peut toujours résoudre l'équation du 4<sup>e</sup> degré, lorsqu'elle a deux racines réelles & deux imaginaires, par la  
 \*106. seconde méthode ci-dessus, \* & par la seconde méthode  
 \*92. générale du troisième Problème.\*

3<sup>o</sup>. Quand une équation du 4<sup>e</sup> degré, dont le second terme est évanoui, a le signe — au troisième terme, & que le second terme de sa réduite a aussi le signe —, & le troisième terme de sa même réduite a le signe +, & que de plus les trois racines de la réduite sont réelles, il est cer-  
 \*108. tain que les quatre racines de l'équation sont réelles.\* On connoîtra que les trois racines de la réduite sont réelles, en faisant évanouir le second terme de cette réduite; car si le cube du tiers du coefficient du troisième terme de la transformée de cette réduite, surpasse le quarré de la moitié du dernier terme de la même transformée, ou lui est égal, il est certain que les trois racines de cette transformée, & par  
 \*82, 81. conséquent de la réduite, sont réelles.\*



Dans ce cas si les racines de la transformée de la réduite sont commensurables, ou du moins quelqu'une, on peut toujours trouver les quatre racines de l'équation par les méthodes du Problème précédent. Mais si toutes les racines de cette transformée de la réduite sont incommensurables, la résolution de la réduite de l'équation renferme alors le cas irréductible du troisième degré. \*

\* 90.

## P R O B L È M E V I.

112. TROUVER les quatre racines d'une équation du 4<sup>e</sup> degré, sans en faire évanouir le second terme.

On suppose que l'équation générale du quatrième degré est  $x^4 + nx^3 + px^2 + qx + r = 0$ .

## P R E M I È R E M É T H O D E.

ON supposera que les deux équations du second degré, qui composent l'équation du 4<sup>e</sup> degré, sont représentées par les deux équations indéterminées  $xx + fx + b = 0$ .

$$+ gx + i$$

$$xx + fx + b = 0.$$

$$- gx - i$$

Leur produit est  $x^4 + 2fx^3 + ffx^2 + 2fhx + hh = 0$ .

$$- ggxx - 2gix - ii$$

$$+ 2hxx$$

On comparera les termes de ce produit, excepté le premier, avec les termes correspondans de l'équation générale, & l'on aura les quatre équations particulières qui suivent, dont on se servira pour déterminer les indéterminées, & l'on conservera l'indéterminée  $b$  pour en faire l'inconnue de la réduite : 1<sup>e</sup>,  $+n = +2f$ ; 2<sup>e</sup>,  $+p = +ff - gg + 2h$ ; 3<sup>e</sup>,  $+q = +2fh - 2gi$ ; 4<sup>e</sup>,  $+r = +hh - ii$ . On aura par la première,  $f = \frac{n}{2}$ , &  $ff = \frac{n^2}{4}$ ; on substituera la valeur de  $ff$  dans la seconde, & l'on aura  $gg = \frac{n^2}{4} + 2h - p$ , &  $g = \sqrt{\frac{n^2}{4} + 2h - p}$ . On substituera les valeurs de  $f$  & de  $g$  dans la troisième, & l'on aura  $q = nh - 2i\sqrt{\frac{n^2}{4} + 2h - p}$ ; d'où l'on déduira  $i = \frac{nh - q}{2\sqrt{\frac{n^2}{4} + 2h - p}}$ , &  $ii = \frac{nh^2 - 2nqh + qq}{nn + 2h - 4p}$ .

on substituera cette valeur de  $ii$  dans la quatrième équation, & l'on aura  $+r = hh - \frac{nh^2 + 2nqh - qq}{nn + 2h - 4p}$ . On mettra cette

Hh ij

équation en ordre par raport à l'inconnue  $h$ , & l'on aura

$$8b^3 - 4phb + 2nqb - qq = 0.$$

$$- 8rb - nnr$$

$$+ 4pr$$

On résoudra cette équation, c'est-à-dire, on trouvera la valeur de  $h$  par les méthodes du troisième degré, (transformant auparavant l'équation en une autre dont le premier terme n'ait pas d'autre coefficient que l'unité.)

On substituera ensuite les valeurs de  $f, g, h, i$ , dans les deux équations  $xx + fx + h = 0$ ,  $xx + fx + h = 0$ ,

$$+ gx + i$$

$$- gx - i$$

laissant  $h$  au lieu de sa valeur pour abréger le calcul, & l'on aura ces deux équations du second degré,

$$1^{\text{re}}, \quad \frac{xx + \frac{1}{2}nx}{+ x\sqrt{\frac{1}{4}nn + 2h - p}} + \frac{+ h}{+ nb - q} = 0.$$

$$\frac{2\sqrt{\frac{1}{4}nn + 2h - p}}{2\sqrt{\frac{1}{4}nn + 2h - p}}$$

$$2^{\text{e}}, \quad \frac{xx + \frac{1}{2}nx}{- x\sqrt{\frac{1}{4}nn + 2h - p}} + \frac{+ h}{- nb + q} = 0.$$

$$\frac{2\sqrt{\frac{1}{4}nn + 2h - p}}{2\sqrt{\frac{1}{4}nn + 2h - p}}$$

On résoudra ensuite chacune de ces équations du second degré par le premier Problème, \* & l'on aura les quatre racines de la proposée, ou plutôt les quatre formules qui les expriment d'une manière générale.

Comme il est plus commode de trouver tout d'un coup la réduite dont  $h$  est l'inconnue, qui n'ait au premier terme que l'unité pour coefficient, au lieu de supposer les deux équations indéterminées  $xx + fx + h = 0$ ,  $xx + fx + h = 0$ ,

$$+ gx + i$$

$$- gx - i$$

on supposera celles-ci  $xx + \frac{1}{2}nx + \frac{1}{2}h = 0$ ,

$$+ gx + \frac{i}{2}$$

$$xx + \frac{1}{2}nx + \frac{1}{2}h = 0,$$

$$- gx - \frac{i}{2}$$

où il n'y a que trois indéterminées  $g, h, i$ . On supposera que leur produit  $x^3 + nx^2 + \frac{1}{4}nnxx + \frac{1}{2}nbx + \frac{1}{4}hb = 0$ ,

$$- ggxx - ix - \frac{ii}{4}$$

$$+ hxx$$

est la même équation que  $x^3 + nx^2 + pxx + qx + r = 0$ ; ainsi chaque terme du produit est égal au terme correspon-

dant de l'équation generale ; ce qui donne trois équations, parceque le premier & le second terme n'en donnent pas :

$$1^{\text{re}}, +p = \frac{1}{4}nn - gg + h; \quad 2^{\text{e}}, +q = +\frac{1}{2}nh - i; \quad 3^{\text{e}}, +r = +\frac{1}{4}hh - \frac{ii}{4ss}.$$

La premiere donne  $gg = \frac{1}{4}nn + h - p$ , &  $g = \sqrt{\frac{1}{4}nn + h - p}$  : la seconde donne  $i = \frac{1}{2}nh - q$ , &  $ii = \frac{1}{4}nnh - nqh + qq$ . On substituera les valeurs de  $gg$  & de  $ii$  dans la troisieme équation, & l'on aura  $+r = \frac{1}{4}hh - \frac{\frac{1}{4}nnh - nqh + qq}{\frac{1}{4}nn + h - p}$  ; on ordonnera cette équation par rap-

$$\text{port à l'inconnue } h, \text{ \& l'on aura } h^3 - phh + nqh - qq = 0; \\ - 4rh - nnr + 4pr$$

c'est la réduite de l'équation ; elle n'est que du troisieme degré, & son premier terme n'a que l'unité pour coefficient.

On trouvera la valeur de  $h$  par le moyen de cette réduite, en se servant des méthodes du troisieme degré ; on substituera ensuite les valeurs de  $h, g, i$ , dans les deux équations indéterminées  $xx + \frac{1}{2}nx + \frac{1}{2}h = 0$ ,  $xx + \frac{1}{2}nx + \frac{1}{2}h = 0$ ,

laissant  $h$  au lieu de sa valeur, pour abreger le calcul ; & l'on aura ces deux équations :

$$1^{\text{re}}, \quad \frac{xx + \frac{1}{2}nx}{+x\sqrt{\frac{1}{4}nn + h - p}} + \frac{\frac{1}{2}h}{+\frac{1}{2}nh - q} = 0. \\ \frac{2\sqrt{\frac{1}{4}nn + h - p}}{2\sqrt{\frac{1}{4}nn + h - p}} \\ 2^{\text{e}}, \quad \frac{xx + \frac{1}{2}nx}{-x\sqrt{\frac{1}{4}nn + h - p}} + \frac{\frac{1}{2}h}{-\frac{1}{2}nh + q} = 0. \\ \frac{2\sqrt{\frac{1}{4}nn + h - p}}{2\sqrt{\frac{1}{4}nn + h - p}}$$

*Application de cette méthode à un exemple.*

POUR réduire cette méthode en pratique, quand on aura une équation à résoudre, par exemple,  $x^4 - 2ax^3 + 2aaxx$

$- 2a^3x + a^4 = 0$ , on supposera que cette équation est représentée par l'équation generale  $x^4 + nx^3 + pxx + qx + r = 0$  ; ainsi  $+n = -2a$ ,  $+p = +2aa - cc$ ,  $+q = -2a^3$ ,  $+r = +a^4$ . On substituera ces valeurs de  $n, p, q, r$ , dans la réduite  $h^3 - phh + nqh - qq = 0$ , & l'on aura

$$- 4rh - nnr + 4pr \quad H h iij$$

pour la réduite de la proposée,  $b^2 - 2aabb - 4a^2cc = 0$ ,  
 $+ cchb$

On trouvera la valeur de  $b$  dans cette équation, en cherchant si elle ne peut point se diviser par  $b$  — ou + un diviseur du dernier terme —  $4a^2cc$ ; & l'on trouvera qu'elle se peut exactement diviser par  $b - 2aa = 0$ ; ainsi  $b = 2aa$ . On substituera cette valeur de  $b$  dans chacune des deux équations du second degré  $xx + \frac{1}{2}nx$  +, &c.

& l'on aura pour la première  $xx - ax$  +  $aa = 0$ ,  
 $+ x\sqrt{\frac{1}{4}nn + b - p}$   
 $+ x\sqrt{aa + cc}$

& pour la seconde,  $xx - ax$  +  $aa = 0$ .  
 $- x\sqrt{aa + cc}$

\* 76. On trouvera par le premier Problème \* les racines de ces deux équations, & ce seront les quatre racines de la proposée:

$$1^{\text{re}}, x = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{aa + cc} + \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}$$

$$2^{\text{e}}, x = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{aa + cc} - \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}$$

$$3^{\text{e}}, x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{aa + cc} + \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}$$

$$4^{\text{e}}, x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{aa + cc} - \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}$$

## D É M O N S T R A T I O N .

CETTE méthode est assez démontrée par les démonstrations de l'usage des indéterminées dans les équations; si l'on en veut une autre, il n'y a qu'à multiplier les deux équations

$$xx + \frac{1}{2}nx + x\sqrt{\frac{1}{4}nn + b - p} + \frac{\frac{1}{2}b}{2\sqrt{\frac{1}{4}nn + b - p}} = 0,$$

$$xx + \frac{1}{2}nx - x\sqrt{\frac{1}{4}nn + b - p} - \frac{\frac{1}{2}b}{2\sqrt{\frac{1}{4}nn + b - p}} = 0,$$

l'une par l'autre, & mettre dans le dernier terme du produit la grandeur  $+r$ , à la place de la grandeur  $+\frac{1}{4}hb$  —  $\frac{1}{4}\frac{nnb + nqb - qq}{nn + 4b - 4p}$ , qui lui est égale, & le produit sera l'équation générale  $x^4 + nx^3 + pxx + qx + r = 0$ ; par

conséquent les deux équations précédentes, sont les deux équations du second degré, dont l'équation  $x^2 + nx^2$ , &c. est composée.

## R E M A R Q U E.

ON peut toujours résoudre les équations du quatrième degré par cette méthode, lorsque la valeur de  $h$  dans leur réduite est commensurable, & lorsqu'étant incommensurable, après avoir fait évanouir le second terme de la réduite, le cube du tiers du coefficient du troisième terme de la transformée qui en viendra, sera moindre que le carré de la moitié du dernier terme de la même transformée : Mais lorsque ce cube surpassera ce carré, & que la valeur de  $h$  sera incommensurable, la résolution renfermera le cas irréductible du troisième degré.

Cette remarque servira pour la méthode suivante.

## S E C O N D E M É T H O D E.

ON supposera que l'équation générale du quatrième degré est  $x^4 + nx^3 + pxx + qx + r = 0$ , & on la disposera ainsi,  $x^4 + nx^3 + pxx = -qx - r$ .

10. Il faut faire en sorte que le premier membre devienne un carré parfait, en conservant cependant l'égalité entre les deux membres, ce qu'on pourra faire en introduisant une indéterminée  $h$ .

On supposera que la racine du carré parfait, qui fera le premier membre de l'équation, est  $xx + \frac{1}{2}nx + \frac{1}{2}p + h$ , dont le carré est  $x^4 + nx^3 + pxx + \frac{1}{2}npx + \frac{1}{4}pp + 2hxx + nhx + ph + \frac{1}{4}nnxx + hh$

Afin que ce carré soit égal au second membre, il faut ajouter au second membre les quantitez  $+ 2hxx + \frac{1}{2}npx + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{4}nnxx + nhx + ph + hh$ .

& l'on aura l'équation  $x^4 + nx^3 + pxx + \frac{1}{2}npx + \frac{1}{4}pp + 2hxx + nhx + ph + \frac{1}{4}nnxx + hh = 2hxx + \frac{1}{2}npx + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{4}nnxx + nhx + ph - qx + hh - r$



donc à présent la supposer comme connue, mais on conservera  $b$  au lieu de sa valeur pour abréger; ainsi  $b$  doit être regardée comme connue.

3°. L'on a par ce qui précède  $xx + \frac{1}{2}nx + \frac{1}{2}p$   
 $+ b$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}nnxx + \frac{1}{2}npx + \frac{1}{4}pp} = \sqrt{\frac{1}{4}nnxx + \frac{1}{2}npx + nnhh} \\ + 2hxx + nhx + ph - qx + hh - r \\ + \frac{1}{4}mnp \\ - npq \\ + qq \\ nn + 8b$$

$$= x\sqrt{\frac{1}{4}nn + 2b} + \frac{\frac{1}{2}np + nh - q}{2\sqrt{\frac{1}{4}nn + 2b}}; \text{ on a donc l'équation:}$$

$$\text{du 2<sup>e</sup> degré } xx + \frac{1}{2}nx + \frac{1}{2}p = x\sqrt{\frac{1}{4}nn + 2b} + \frac{\frac{1}{2}np + nh - q}{2\sqrt{\frac{1}{4}nn + 2b}},$$

$$\text{ou bien } xx + \frac{1}{2}nx + \frac{1}{2}p - x\sqrt{\frac{1}{4}nn + 2b} - b = 0.$$

$$- \frac{1}{2}np - nh + q \\ 2\sqrt{\frac{1}{4}nn + 2b}$$

On résoudra cette équation du second degré, & l'on aura \* 76. deux racines de l'équation proposée du quatrième degré. L'équation du second degré, qui contiendra les deux autres racines, sera  $xx + \frac{1}{2}nx + \frac{1}{2}p$

$$+ x\sqrt{\frac{1}{4}nn + 2b} + b = 0; \\ + \frac{1}{2}np + nh - q \\ 2\sqrt{\frac{1}{4}nn + 2b}$$

car le produit de ces deux équations du second degré est la proposée elle-même  $x^4 + nx^3 + pxx + qx + r = 0$ , en supposant que  $-nnhh + hh = r$

$$-nnp + ph \\ + 2nqh + \frac{1}{4}pp \\ - \frac{1}{4}mnp \\ + npq \\ - qq \\ nn + 8b$$

ce qui est évident par l'équation  $nnhh + nnp + \frac{1}{4}mnp$

$$- 2nqh - npq \\ + qq \\ nn + 8b$$

$= hh + ph + \frac{1}{4} pp - r$ , puisqu'il n'y a qu'à transposer  $r$  dans le premier membre, & la quantité qui fait le premier membre dans le second membre.

On appliquera cette seconde méthode aux exemples, comme on a fait la première, sans qu'il soit nécessaire de s'y arrêter.

## SECTION IV.

*De la résolution des équations du cinquième & sixième degré, & des autres degrez plus élevez.*

### AVERTISSEMENT.

LES équations des degrez plus élevez que le quatrième, viennent rarement en usage; ainsi il suffira de donner ici les ouvertures nécessaires pour les résoudre quand il s'en présentera, sans entrer dans un détail semblable à celui où l'on est entré pour les autres degrez inférieurs, à cause de leur usage continuel dans les Problèmes de Geometrie; & même les méthodes qu'on y a données pourront aider à en former de semblables pour les degrez plus élevez.

### PROBLÈME VII.

113. *RESOUDRE les équations du cinquième & sixième degré, & même des degrez plus élevez.*

I.

*Lorsque les racines sont commensurables, ou du moins quelqu'une.*

ON se servira de la méthode generale de la première Section du quatrième Livre; c'est-à-dire, on divisera la proposée par une équation simple faite de l'inconnue de la proposée + ou — chaque diviseur du dernier terme; & s'il y a quelque racine commensurable, on trouvera toujours une de ces équations simples, qui fera la division sans reste. On operera ensuite sur le quotient, comme on a fait sur la proposée; & si les racines sont toutes commensurables, on les trouvera par cette méthode les unes après les autres, s'il n'y en a que quelques-unes, on trouvera enfin pour quotient une équation d'un moindre degré que la proposée, dont on trouvera les racines par les Problèmes précédens, si elle ne passe pas le 4<sup>e</sup> degré: si elle le passe, on operera comme dans les cas qui suivent.



## I I.

*Lorsque les racines étant toutes incommensurables, la proposée est composée d'équations plus simples commensurables.*

On réduira toujours, par les Problèmes de la troisième Section du quatrième Livre, les équations composées aux équations plus simples qui la composent, lorsqu'elles sont commensurables, & ensuite si ces équations plus simples ne passent pas le quatrième degré, on les résoudra par les Problèmes des Sections précédentes.

## I I I.

*Lorsque les coefficients des équations plus simples qui composent la proposée (qu'on suppose sans incommensurables) renferment des incommensurables.*

On tâchera de trouver des équations plus simples indéterminées, dont les coefficients indéterminés contiennent des incommensurables, & dont le produit fasse une équation indéterminée qui soit du même degré que la proposée, & sans incommensurables, comme l'on en a vu des exemples dans la Section précédente. \* On comparera les termes du produit indéterminé des équations composantes, avec les termes correspondans de la proposée, & par les équations particulières qui naîtront de ces comparaisons, on déterminera les grandeurs indéterminées des équations composantes, ce qui donnera la résolution de la proposée, lorsqu'on la peut trouver par cette voye.

Après les ouvertures qu'on vient de donner pour résoudre les équations qui passent le quatrième degré, on ajoutera une méthode qui convient à tous les degrés, mais comme elle demande des calculs rebutans, ce qui la rend assez inutile dans la pratique, on l'appliquera seulement au troisième degré.

*Méthode pour résoudre les équations de tous les degrés.*

214. O N supposera une équation indéterminée moindre d'un degré que la proposée qu'on veut résoudre, dont l'inconnue soit celle de la proposée, qui ait une indéterminée pour le coefficient de chacun de ses termes, & deux indéterminées linéaires pour son dernier terme. Par exemple, si la proposée est du troisième degré, comme  $x^3 - nx^2 + px - q = 0$ , on

li ij

supposera l'équation indéterminée  $xx - fx - \underset{-b}{g} = 0$ .

Si la proposée est du 4<sup>e</sup> degré, comme  $x^4 - nx^3 + pxx - qx + r = 0$ , on supposera l'équation indéterminée  $x^3 - \underset{-i}{f}xx - gx - b = 0$ .

Si la proposée est du 5<sup>e</sup> degré, comme  $x^5 - nx^4 + pxx - qxx + rx - s = 0$ , on supposera l'équation indéterminée  $x^4 - \underset{-k}{f}x^3 - gxx - bx - i = 0$ ; & ainsi des autres.

Pour abréger le calcul, on fera d'abord évanouir le second terme de la proposée; ainsi l'on supposera que l'équation du troisième degré, à laquelle on va appliquer la méthode, est par exemple,  $x^3 - px - q = 0$ .

On cherchera le plus grand diviseur commun de la proposée & de l'équation indéterminée  $xx - \underset{-b}{f}x - g = 0$ ;

& l'on continuera l'opération jusqu'à ce qu'on soit arrivé à un reste où l'inconnue  $x$  ne soit plus.

On prendra dans le dernier diviseur où  $x$  est linéaire, & qui a donné ce dernier reste, la valeur de  $x$ , & on la mettra à part. Ce dernier diviseur est  $px - q = 0$ , & la valeur

$$\begin{aligned} &+ gx + fg \\ &+ hx + fh \\ &+ ff x \end{aligned}$$

de  $x$  prise dans ce diviseur, supposé égal à zero, est  $x = \frac{-fg - fh + q}{ff + fg + fh + q}$ ; on supposera le reste dans lequel  $x$  n'est plus, égal à zero, & on ordonnera l'équation de ce reste par rapport à l'une des deux indéterminées du dernier terme de l'équation supposée laquelle on voudra, qui sera l'inconnue de ce reste, & l'on aura la réduite  $g^3 - 2pgg + ppg + pph = 0$ ,

$$\begin{aligned} &+ 3hgg - 4phg - 2phh \\ &- pffg - pffh \\ &+ 3hhg + h^3 \\ &+ 3qfg - pqf \\ &+ 3qfh \\ &+ qf^2 \\ &- qq \end{aligned}$$

On supposera le second & le troisième terme de cette réduite chacun égal à zero, & que la réduite est elle-même

égale à zero, ce qui donnera trois équations particulieres, qui serviront à déterminer les trois indéterminées  $b, f, g$ ; sçavoir  $b$  par l'équation qui naîtra du second terme égal à zero,  $f$  par celle du troisiéme, &  $g$  par la supposition que le premier terme & le dernier sont ensemble égaux à zero: ces trois équations sont la 1<sup>re</sup>,  $-2p + 3b = 0$ ; ainsi  $b = \frac{2}{3}p$ : la 2<sup>e</sup>,  $+pp - 4pb - pff + 3bh + 3qf = 0$ ; la 3<sup>e</sup>,  $g^3 + pph - 2phb - pffb + b^3 - pqf + 3qfb + qf^3 - qq = 0$ . Substituant la valeur de  $b$  dans la seconde équation, & la mettant en ordre par rapport à l'indéterminée  $f$ , on aura l'équation du second degré  $ff - \frac{17}{4}p + \frac{p}{3} = 0$ ; on trouvera par cette équation deux valeurs de  $f$ , la premiere  $f = \frac{17}{4}p + \sqrt{\frac{289}{4}p^2 - \frac{p}{3}}$ ; la seconde,  $f = \frac{17}{4}p - \sqrt{\frac{289}{4}p^2 - \frac{p}{3}}$ ; multipliant chaque terme de  $-\frac{p}{3}$  par  $9pp$ , l'on changera l'expression  $\sqrt{\frac{289}{4}p^2 - \frac{p}{3}}$  en celle-ci,  $\sqrt{\frac{289}{4}p^2 - \frac{9p^2}{12}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{289}{4} - \frac{9}{12}}$ ; ainsi

$f = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{289}{4} - \frac{9}{12}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{12}p^3}$ . Substituant la valeur de  $b$  & celle de  $f$  dans la troisiéme équation particuliere, qui est  $g^3 + pph - 2phb - pffb + b^3 - pqf + 3qfb + qf^3 - qq = 0$ , on aura  $g^3 + \frac{17p^2}{12} + \frac{8p^2}{12} - 4qq + \frac{17q^3}{p^3} - 4q \times \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{12}p^3} = 0$ ; d'où l'on deduira  $g = \sqrt[3]{-\frac{17q^3}{12p^3} - \frac{8p^2}{12} + 4qq - \frac{17q^3}{p^3} + 4q \times \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{12}p^3}}$ .

On substituera les valeurs qu'on vient de trouver des trois indéterminées  $f, g, b$ , dans  $x = \frac{p^2 - f^2 - b^2}{ff + b^2 - p^2}$ ; mais pour abréger l'expression & le calcul, on laissera  $g$  au lieu de sa valeur,

& l'on aura  $x = \frac{-\frac{17g}{2p} + \frac{16}{p} + 2 \times \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{12}p^3}}{-\frac{2p}{3} + g + \frac{27g}{12p} + \frac{2g}{p^2} \times \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{12}p^3}}$ .

Cette valeur de  $x$  est une racine de la proposée.

*Application de cette méthode à un exemple.*

**P**OUR trouver par cette méthode la racine de  $x^3 - 24x - 72 = 0$ , on supposera  $p = 24$ , &  $q = 72$ ; & substituant ces valeurs de  $p, q$ , l'on aura  $b = \frac{2}{3}p = 16$ .

$+ \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{12}p^3} = + 28$ , &  $-\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{12}p^3} = - 28$ .

$f = \frac{17}{4}p + \frac{1}{2} \times \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{12}p^3} = + 8$ , 1<sup>re</sup> valeur de  $f$ .

$f = \frac{17}{4}p + \frac{1}{2} \times - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{12}p^3} = + 1$ , 2<sup>e</sup> valeur de  $f$ .

On trouvera de même la valeur de  $g = \sqrt[3]{-\frac{27q^3}{p^3} - \frac{8p^3}{27}}$   
 $+ 4qq - \frac{27q^3}{p^3} + 4q \times + \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$ , en substituant les  
valeurs de  $p, q$ , comme on le voit ici :  $-\frac{27q^3}{p^3} = -26244$ ;  
 $-\frac{8p^3}{27} = -4096$ .  $-\frac{27q^3}{p^3} + 4q \times + \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} =$   
 $-12348$ ; ainsi  $-\frac{27q^3}{p^3} - \frac{8p^3}{27} - \frac{27q^3}{p^3} + 4q \times + \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$   
 $= -42688$ ; &  $+ 4qq = +20736$ ; donc  $-\frac{27q^3}{p^3} - \frac{8p^3}{27} -$   
 $\frac{27q^3}{p^3} + 4q \times + \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} + 4qq = g^3 = -21952$ ; tirant  
la racine cubique, on aura  $g = -28$ : c'est la valeur de  $g$   
déduite de la 1<sup>re</sup> valeur de  $f$  où il y a  $+ \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} = +28$ .

On trouvera, si l'on veut, une seconde valeur de  $g$ , en se  
servant de la seconde valeur de  $f$  où il y a  $-\sqrt[3]{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$   
 $= -28$ ; en voici le calcul,  $+ 4qq = +20736$ .  
 $-\frac{27q^3}{p^3} + 4q \times - \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} = +12348$ ; ainsi  $+ 4qq$   
 $-\frac{27q^3}{p^3} + 4q \times - \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} = +33084$ ; &  $-\frac{27q^3}{p^3}$   
 $-\frac{8p^3}{27} = -30340$ ; donc  $-\frac{27q^3}{p^3} - \frac{8p^3}{27} + 4qq - \frac{27q^3}{p^3} + 4q$   
 $\times - \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} = +2744 = g^3$ ; tirant la racine cubi-  
que, on aura  $g = +14$ ; c'est la seconde valeur de  $g$  déduite  
de la 2<sup>e</sup> valeur de  $f$ , dans laquelle il y a  $-\sqrt[3]{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$   
 $= -28$ . Après avoir trouvé les valeurs de  $f, g, h$ , on les  
substituera avec celles de  $p, q$ , dans l'équation de la racine  
mise à part  $x = \frac{f-fg-fh}{ff+g+g+g}$ , observant que si l'on substitue  
la première valeur de  $g = -28$ , il faut substituer à même  
temps la première valeur de  $f = +8$ ; & que si l'on substitue  
la seconde valeur de  $g = +14$ , il faut substituer à  
même temps la seconde valeur de  $f = +1$ ; & l'on trou-  
vera toujours que la racine de la proposée est  $x = +6$ .  
*Ce qui étoit proposé.*

*Démonstration de cette méthode.*

LE dernier diviseur  $-px + gx + bx + ffx - q + fg$   
 $+ fh = 0$ , d'où l'on déduit  $x = \frac{q-fg-fh}{ff+g+g+g}$ , qui donne par  
la supposition un reste égal à zero, étant déterminé par la  
supposition des valeurs des trois indéterminées  $f, g, h$ , qu'on  
trouve en supposant la réduite égale à zero, & chacun de  
ses deux termes moyens aussi égal à zero; ce dernier divi-

leur, dis-je, dans lequel l'inconnue  $x$  est lineaire, étant devenu déterminé, est nécessairement un diviseur exact de l'équation proposée, puisque par la démonstration de la méthode de trouver le plus grand diviseur commun de deux équations qui ont la même inconnue, il est un diviseur exact de la proposée & de l'équation feinte ou indéterminée  $xx - fx - \frac{g}{b} = 0$ , lorsqu'elle est devenue réelle & déter-

minée; car il ne laisse point de reste, ou, ce qui est la même chose, il laisse un reste égal à zero. Mais une équation où  $x$  est lineaire, & qui divise exactement la proposée, en contient une racine par la formation des équations. La méthode fait donc trouver une racine de la proposée. *Ce qu'il falloit démontrer.*

*Remarques sur cette méthode.*

I.

**L'**ART de cette méthode consiste, 1<sup>o</sup>. à pouvoir représenter par le moyen des indéterminées  $f, g, b$ , une équation  $xx - fx - \frac{g}{b} = 0$ , moindre d'un degré que la proposée,

qui ait une racine commune, c'est-à-dire un diviseur commun où  $x$  soit lineaire, avec la proposée; 2<sup>o</sup>. à trouver ce diviseur commun par la méthode de trouver le plus grand diviseur commun, d'une manière indéterminée; 3<sup>o</sup>. à pouvoir déterminer, en supposant que ce dernier diviseur commun ne laisse aucun reste, par le moyen du reste supposé égal à zero, & chacun de ses termes moyens aussi égal à zero, les valeurs des indéterminées  $f, g, b$ , propres à rendre réelle l'équation indéterminée  $xx - fx - \frac{g}{b} = 0$ , qui a

une racine commune ou un diviseur commun avec la proposée dans lequel  $x$  est lineaire, & propres aussi à rendre réel ce diviseur commun qui contient une racine de la proposée.

II.

Quand on a trouvé les valeurs des indéterminées  $f, g, b$ , il est d'ordinaire plus court de les substituer immédiatement dans l'équation indéterminée de la valeur de la racine

$x = \frac{f \pm \sqrt{f^2 + 4g/b}}{2}$ , que de se servir de la formule  $x = -\frac{f}{2} \pm \sqrt{\frac{f^2}{4} + \frac{g}{b}}$ , &c.

## III.

On a mis deux indéterminées  $g$  &  $h$  au dernier terme de l'équation indéterminée  $xx - fx - \frac{g}{h} = 0$ ; parceque

si l'on n'en mettoit qu'une seule, on trouveroit une réduite dont le second terme n'auroit qu'une seule grandeur, ce qui obligeroit à faire évanouir ce second terme, & demanderoit un plus long calcul.

## IV.

La valeur de  $f$  contenant la grandeur  $\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$ , qui est imaginaire quand  $\frac{1}{27}p^3$  surpasse  $\frac{1}{4}qq$ , cette méthode n'est utile que quand  $\frac{1}{4}qq$  surpasse  $\frac{1}{27}p^3$ , ou quand il y a  $\sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$ ; ainsi cette méthode fait à la vérité toujours trouver une formule de la racine qu'on cherche, mais cette formule contient dans plusieurs cas des expressions imaginaires lorsque la racine est réelle.

## V.

Cette méthode s'étend à tous les degrés, pourvu qu'on aille de suite; car si on l'applique aux degrés les plus élevez, on verra que pour trouver la première indéterminée par l'équation du second terme de la réduite supposé égal à zero, l'équation à résoudre sera lineaire; l'équation du 3<sup>e</sup> terme de la réduite supposé égal à zero, qui sert à trouver la seconde indéterminée, sera du second degré; l'équation du 4<sup>e</sup> terme, qui servira à trouver la troisième indéterminée, sera du 3<sup>e</sup> degré, & ainsi de suite.

*Remarques sur les Problèmes précédens.*

## I.

**115.** Les Problèmes de ce Livre ne servent pas seulement à résoudre les équations composées qui n'ont qu'une inconnue; ils servent aussi à résoudre celles qui ont deux ou plusieurs inconnues; car dans ce cas il faut les regarder comme des grandeurs connues, excepté une seule, par raport à laquelle l'équation sera ordonnée, & ensuite résoudre l'équation par les Problèmes de ce Livre.

## II.

On peut toujours trouver les racines commensurables des équations, de quelque degré qu'elles puissent être, par la méthode generale du quatrième Livre. On peut toujours  
trouver

trouver les racines des équations du second degré, quoiqu'elles soient incommensurables, par le premier Problème de ce Livre. On peut trouver celles des équations du 3<sup>e</sup> degré quand elles sont commensurables & incommensurables, excepté dans le seul cas irréductible, où toutes les racines sont réelles & incommensurables; car on a vu que la formule de la racine dans ce cas, renferme des expressions imaginaires, qu'on ne peut pas faire évanouir par les Problèmes de la seconde Section.

On peut toujours trouver les racines des équations du quatrième degré, excepté dans les cas où la résolution renferme le cas irréductible du troisième degré, par les Problèmes de la troisième Section. On a aussi donné plusieurs ouvertures pour trouver les racines des équations des degrés plus élevez que le quatrième, dans cette Section.

## S E C T I O N V.

*Où l'on explique la maniere de trouver les racines  
des grandeurs complexes incommensurables,  
par le moyen des équations.*

### D É F I N I T I O N.

QUAND une grandeur complexe contient plusieurs grandeurs incommensurables, ou seules, ou avec des grandeurs commensurables, comme  $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ , ou  $a + \sqrt{b}$ , &c. chacune des grandeurs incommensurables différentes est un *terme* de la grandeur complexe; & quand il y a des grandeurs commensurables, elles ne font toutes ensemble qu'un seul terme de la grandeur complexe; ainsi  $a + \sqrt{b}$  contient deux termes; de même  $a + b + \sqrt{c}$  ne contient que deux termes;  $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$  contient trois termes; & ainsi à l'infini. Une grandeur complexe incommensurable qui a deux termes, s'appelle un *binôme*; quand elle a trois termes, un *trinôme*; quand elle en a quatre, un *quadrinôme*; & ainsi de suite;  $a + b + \sqrt{c}$  est un binôme;  $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$  est trinôme, &c.

## PROBLÈME VIII.

116. *TROUVER la racine 2<sup>e</sup>, 3<sup>e</sup>, 4<sup>e</sup>, &c. d'une grandeur complexe incommensurable.*

## M É T H O D E.

1<sup>o</sup>. **I**L faut supposer une grandeur complexe incommensurable, qui représente par des grandeurs indéterminées la racine de la proposée qu'on cherche; cette grandeur qu'on suppose doit avoir ces conditions: 1<sup>o</sup>. qu'il y ait une indéterminée dans chaque terme de la grandeur qu'on suppose représenter la racine qu'on cherche: 2<sup>o</sup>. qu'en élevant cette grandeur supposée à la puissance dont l'exposant est celui de la racine qu'on cherche, c'est-à-dire, l'élevant au quarré si on cherche la racine quarrée, à la troisième puissance, si on cherche la racine cubique, &c. la grandeur complexe incommensurable qu'on trouvera, ait précisément le même nombre de termes, & disposez de la même manière & avec les mêmes signes que la proposée; c'est-à-dire, si la proposée est un binôme, & qu'on en cherche la racine quarrée, il faut supposer une grandeur complexe qui représente la racine, telle que son quarré soit un binôme semblable; si la proposée est un trinôme, que le quarré de la supposée soit un trinôme semblable; si l'on cherche la racine cubique de la proposée, que la troisième puissance de la grandeur supposée soit un binôme, un trinôme, &c. semblable à la proposée; si elle est un binôme, un trinôme, &c. cette condition doit régler les signes radicaux de la grandeur qu'on supposera représenter la racine; ces signes radicaux doivent avoir

les mêmes exposans que dans la proposée; les signes radicaux de la proposée sont  $\sqrt{\phantom{x}}$ , ceux de la supposée doivent être pour l'ordinaire  $\sqrt{\phantom{x}}$ ; si ceux de la proposée sont  $\sqrt[3]{\phantom{x}}$ , ceux de la grandeur doivent aussi être pour l'ordinaire  $\sqrt[3]{\phantom{x}}$ , &c. il y a quelque cas où ils doivent être différens.

l'élever au quarré la grandeur supposée, si l'on en cherche la racine quarrée; à la troisième puissance si on cherche la racine cubique; & ainsi de suite; que la grandeur complexe ainsi élevée représentée, on les comparera l'une avec l'autre terme



à terme ; c'est-à-dire, on supposera les termes de l'une égaux aux termes correspondans de l'autre ; ce qui donnera les équations particulières propres à trouver les valeurs des indéterminées qu'on a supposées.

3°. On réduira toutes ces équations particulières à une seule qui ne contienne pour inconnue qu'une seule des indéterminées qu'on a supposées, & on trouvera les valeurs de cette indéterminée par les Problèmes précédens, & par le moyen de cette valeur, on trouvera, en se servant des équations particulières qu'a donné la supposition des termes correspondans égaux, les valeurs de toutes les indéterminées qu'on a supposées.

4°. On substituera ces valeurs à la place des indéterminées dans la grandeur complexe indéterminée qu'on a prise pour représenter la racine de la proposée qu'on cherche ; & après les substitutions, elle sera la racine qu'on cherchoit.

## R E M A R Q U E.

SI l'indéterminée qui sert d'inconnue à l'équation du troisième article, qui ne contient qu'une seule indéterminée, a plusieurs valeurs réelles, chacune de ces valeurs pourra servir à trouver la racine qu'on cherche.

Tout ce qu'on vient de dire s'éclaircira par l'application qu'on en va faire à des exemples.

## E X E M P L E I.

P O U R trouver la racine quarrée du binome  $+7+\sqrt{48}$  1°. on supposera que le binome  $+f+\sqrt{g}$  représente la racine qu'on cherche,  $f$  &  $g$  sont des grandeurs indéterminées. 2°. On élèvera  $+f+\sqrt{g}$  au quarré, & l'on aura  $ff+g+2f\sqrt{g}$ , qui est un binome semblable au proposé, en prenant la grandeur commensurable  $ff+g$  pour un seul terme du binome  $ff+g+2f\sqrt{g}$ . On supposera que  $ff+g+2f\sqrt{g}$  représente le binome proposé  $+7+\sqrt{48}$ , & que les termes correspondans sont égaux, scavoir la grandeur commensurable  $ff+g$  égale à la grandeur commensurable  $+7$ , & l'incommensurable  $+2f\sqrt{g}$  égale à l'incommensurable  $\sqrt{48}$ . On a donc les deux équations particulières  $ff+g=7$  1°.  $+2f\sqrt{g}=\sqrt{48}$ . 3°. Pour dégager les indéterminées, on élèvera au quarré chacune de ces équations, & l'on aura

$f^2 + 2ffg + gg = 49$ , &  $4ffg = 48$ . On ôtera le premier membre  $4ffg$  du premier membre  $f^2 + 2ffg + gg$ , & le second 48 du second 49; & l'on aura  $f^2 - 2ffg + gg = 49 - 48 = 1$ ; tirant la racine quarrée de chaque membre, on trouvera  $ff - g = \sqrt{1} = 1$ , d'où l'on déduira  $g = ff - 1$ . On substituera cette valeur de  $g$  dans l'équation  $ff + g = 7$ , & l'on aura  $2ff - 1 = 7$ , d'où l'on déduira  $ff = 4$ , &  $f = 2$ ; mettant cette valeur de  $ff$  dans  $g = ff - 1$ , on trouvera  $g = 3$ . 4°. On substituera les valeurs de  $f$  & de  $g$  dans  $f + \sqrt{g}$ , qui représente la racine qu'on cherche, & après les substitutions l'on aura  $f + \sqrt{g} = 2 + \sqrt{3}$ ; c'est la racine quarrée de  $7 + \sqrt{48}$  que l'on cherchoit.

## E X E M P L E I I.

**P**OUR trouver la racine quarrée de  $-1 + \sqrt{-8}$ ; 1°. on supposera que  $+f + \sqrt{-g}$  représente la racine qu'on cherche;  $f$  &  $g$  sont indéterminées. 2°. On élèvera  $+f + \sqrt{-g}$  au quarré, & l'on aura  $ff - g + 2f\sqrt{-g}$  (par la supposition)  $= -1 + \sqrt{-8}$ ; on supposera  $ff - g = -1$ , &  $2f\sqrt{-g} = +\sqrt{-8}$ . 3°. Elevant chacune de ces équations au quarré, on trouvera  $f^2 - 2ffg + gg = 1$ , &  $4ffg = 8$ ; on ajoutera ensemble ces deux équations, & l'on aura  $f^2 + 2ffg + gg = 9$ ; tirant la racine quarrée de chaque membre, on trouvera  $ff + g = 3$ , d'où l'on déduira  $g = 3 - ff$ ; on substituera cette valeur de  $g$  dans  $ff - g = -1$ , & l'on aura  $2ff = 2$ ,  $ff = 1$ , &  $f = 1$ ; on substituera cette valeur de  $ff$  dans  $g = 3 - ff$ , & l'on trouvera  $g = 2$ . 4°. On substituera les valeurs de  $f$  & de  $g$  dans  $f + \sqrt{-g}$ , & l'on aura  $f + \sqrt{-g} = 1 + \sqrt{-2}$ . C'est la racine quarrée de  $-1 + \sqrt{-8}$  que l'on cherchoit.

## E X E M P L E I I I.

**P**OUR trouver la racine quarrée du quadrinome  $10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}$ : 1°. on supposera que  $\sqrt{f} + \sqrt{g} + \sqrt{h}$  est l'expression indéterminée de cette racine;  $f$ ,  $g$ ,  $h$ , sont indéterminées. 2°. On élèvera  $\sqrt{f} + \sqrt{g} + \sqrt{h}$  au quarré, & l'on aura  $f + g + h + 2\sqrt{fg} + 2\sqrt{fh} + 2\sqrt{gh} =$  (par la supposition)  $= 10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}$ ; en comparant les termes correspondans, on aura les équations suivantes: 1<sup>re</sup>,  $2\sqrt{fg} = \sqrt{24}$ ; 2<sup>e</sup>,  $2\sqrt{fh} = \sqrt{40}$ ; 3<sup>e</sup>,  $2\sqrt{gh} = \sqrt{60}$ ; 4<sup>e</sup>,  $f + g + h = 10$ .

3°. Pour dégager les indéterminées qu'on regarde comme des inconnues, on ôtera les incommensurables, & l'on aura 1<sup>re</sup>,  $4fg = 24$ ; 2<sup>e</sup>,  $4fh = 40$ ; 3<sup>e</sup>,  $4gh = 60$ . On trouvera par la 1<sup>re</sup>  $f = \frac{6}{g}$ , & par la 2<sup>e</sup>,  $f = \frac{10}{h}$ ; par conséquent  $\frac{6}{g} = \frac{10}{h}$ , &  $6h = 10g$ , &  $g = \frac{3h}{5}$ . Par la 3<sup>e</sup>, on trouvera  $g = \frac{15}{h}$ ; par conséquent  $\frac{3h}{5} = \frac{15}{h}$ ; d'où l'on déduira  $hh = 25$ , &  $h = 5$ . On mettra cette valeur de  $h$  dans  $g = \frac{3h}{5}$ , & l'on trouvera  $g = 3$ . On substituera cette valeur de  $g$  dans  $f = \frac{6}{g}$ ; & l'on aura  $f = 2$ . Les valeurs de toutes les indéterminées étant trouvées, on les substituera dans la 4<sup>e</sup> équation  $f + g + h = 10$ , & comme l'on trouve  $2 + 3 + 5 = 10$ , c'est une marque qu'on a découvert les véritables valeurs des indéterminées. 4°. On substituera ces valeurs dans  $\sqrt{f} + \sqrt{g} + \sqrt{h}$ , & l'on aura  $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ , pour la racine que l'on cherchoit de  $10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}$ .

## A V E R T I S S E M E N T.

**T**OUT l'article 96 contient des exemples où l'on trouve par cette méthode la racine cubique d'un binome qui n'a que le signe radical  $\sqrt[3]{}$ ; ainsi il est inutile d'en mettre ici d'autres exemples.

Pour trouver la racine 4<sup>e</sup> d'une grandeur complexe incommensurable; il faudra d'abord chercher par la méthode la racine 2<sup>e</sup> de la proposée; & ensuite la racine 2<sup>e</sup> de la racine qu'on vient de découvrir, & elle sera la racine 4<sup>e</sup> de la proposée.

De même pour trouver la racine 6<sup>e</sup> d'une grandeur complexe incommensurable, il faudra d'abord chercher la racine 2<sup>e</sup> de la proposée, & ensuite la racine 3<sup>e</sup> de cette racine; & elle sera la racine 6<sup>e</sup> de la proposée.

Pour en trouver la racine 9<sup>e</sup>, on cherchera d'abord la racine 3<sup>e</sup>; & ensuite la racine 3<sup>e</sup> de cette racine, & elle sera la racine 9<sup>e</sup> de la proposée; & ainsi des autres racines dont l'exposant peut se diviser par des nombres entiers.

## E X E M P L E V.

**P**OUR trouver la racine 3<sup>e</sup> de  $5 + \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{486}$ , 1°. on supposera que l'expression indéterminée de cette racine est  $\sqrt[3]{f} + \sqrt[3]{g}$ ; 2°. on prendra la troisième puissance de cette

Kk.ij.

expression, & l'on aura  $f + g + 3\sqrt[3]{ffg} + 3\sqrt[3]{f^2g}$  pour l'expression indéterminée de la proposée; on supposera leurs termes correspondans égaux, & l'on aura les trois équations suivantes: 1<sup>re</sup>,  $f + g = 5$ ; 2<sup>e</sup>,  $3\sqrt[3]{ffg} = \sqrt[3]{324}$ ; 3<sup>e</sup>,  $3\sqrt[3]{f^2g} = \sqrt[3]{486}$ . 3<sup>o</sup>. Pour dégager les indéterminées, on ôtera les incommensurables de la seconde & troisième équation, & l'on aura pour la seconde  $27ffg = 324$ ; d'où l'on déduira  $ffg = 12$ , &  $g = \frac{12}{f}$ ; on aura pour la troisième  $27f^2g = 486$ , d'où l'on déduira  $f^2g = 18$ , &  $f = \frac{18}{g}$ . On prendra la valeur de  $gg$  dans l'équation  $g = \frac{12}{f}$ , & l'on aura  $gg = \frac{144}{f^2}$ ; & on la substituera dans  $f = \frac{18}{g}$ , & l'on trouvera  $f = \frac{18f^2}{144}$ , qui se réduit à  $f = \frac{f^2}{8}$ , qui donnera  $f^2 = 8$ , &  $f = 2$ . On substituera la valeur de  $ff = 4$  dans  $g = \frac{12}{f}$ , & l'on aura  $g = 3$ . Les valeurs de toutes les indéterminées étant découvertes, on les substituera dans la première équation  $f + g = 5$ ; & comme l'on trouve  $5 = 5$ , c'est une marque qu'on a découvert les véritables valeurs de  $f$  & de  $g$ ; 4<sup>o</sup>. On les substituera dans l'expression indéterminée de la racine qu'on cherche, & l'on aura  $\sqrt[3]{f} + \sqrt[3]{g} = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$ ; c'est la racine que l'on cherchoit.

## E X E M P L E V.

P O U R trouver la racine 5<sup>e</sup> de  $76 + \sqrt[5]{5808}$ , 1<sup>o</sup>. on supposera que  $f + \sqrt[5]{g}$  est l'expression indéterminée de cette racine; 2<sup>o</sup>. On l'élèvera à la 5<sup>e</sup> puissance, & l'on aura  $f^5 + 10f^4\sqrt[5]{g} + 5f^3g + 5f^2\sqrt[5]{g^2} + 10f\sqrt[5]{g^3} + gg \times \sqrt[5]{g}$ , pour l'expression indéterminée de la proposée. On supposera leurs termes correspondans égaux, & l'on aura ces deux équations: 1<sup>re</sup>,  $f^5 + 10f^4\sqrt[5]{g} + 5f^3g = 76$ ; 2<sup>e</sup>,  $5f^2\sqrt[5]{g^2} + 10f\sqrt[5]{g^3} + gg \times \sqrt[5]{g} = \sqrt[5]{5808}$ ; 3<sup>o</sup>. Pour dégager les indéterminées, on élèvera chacune de ces équations au quarré, & l'on aura pour la première  $f^{10} + 10f^8g + 110f^6g^2 + 100f^4g^3 + 25ffg^4 = 5776$ ; & pour la seconde,  $25f^4g^2 + 100f^3g\sqrt[5]{g} + 110f^2g^2\sqrt[5]{g} + 20ffg^3\sqrt[5]{g} + g^5 = 5808$ . On ôtera la première de ces équations de la seconde, & l'on aura le reste  $-f^{10} + 5f^8g - 10f^6g^2 + 10f^4g^3 - 5ffg^4 + g^5 = 32$ . Le premier membre de cette équation est la 5<sup>e</sup> puissance de  $-ff + g$ , & le second est la 5<sup>e</sup> puissance de 2; ainsi tirant la racine 5<sup>e</sup> de chaque membre, on aura  $-ff + g = 2$ ; d'où l'on déduira  $g = ff + 2$ , &  $gg = f^4 + 4ff + 4$ . On

substituera ces valeurs de  $g$  & de  $gg$  dans  $f^3 + 10f^2g + 5f^2gg = 76$ , & l'on trouvera l'équation  $16f^3 + 40f^2 + 20f - 76 = 0$ , qui se réduit en divisant par 4, à  $4f^3 + 10f^2 + 5f - 19 = 0$ , qu'on transformera, en supposant  $f = \frac{1}{4}$ , en  $h^3 + 40h^2 + 320h - 4864 = 0$ , qui a pour diviseur exact  $h - 4 = 0$ , ainsi  $h = 4$ , &  $f = \frac{1}{4} = 1$ . On substituera la valeur de  $f$  dans  $g = ff + 2$ , & l'on trouvera  $g = 3$ . 40. On substituera les valeurs de  $f$  & de  $g$  qu'on vient de découvrir dans  $f + \sqrt{g}$ , & l'on aura  $f + \sqrt{g} = 1 + \sqrt{3}$ , c'est la racine 5<sup>e</sup> que l'on cherchoit.

Cette méthode n'a pas besoin de démonstration, n'étant qu'une application de la méthode qui employe les indéterminées dans les équations.

## A V E R T I S S E M E N T.

**L'**EXTRACTION des racines des grandeurs complexes incommensurables n'est pas d'un grand usage dans les Mathématiques, ainsi il suffit d'en avoir ici donné la méthode générale, cependant comme l'on trouve dans l'application de cette méthode plusieurs difficultés, on a cru devoir marquer les principales, & indiquer les moyens de les surmonter dans les remarques suivantes, pour ceux qui auroient de la curiosité pour cette matière.

## R E M A R Q U E S.

## I.

117. **L**A première difficulté qu'on trouve, est sur le nombre des termes incommensurables qu'on doit donner à l'expression indéterminée, qu'on suppose représenter la racine qu'on cherche : si l'on veut se mettre en état de la surmonter, il faut prendre par ordre des grandeurs complexes qui aient deux, trois, quatre termes, &c. avec le signe  $\sqrt{\phantom{x}}$ , comme  $a + \sqrt{b}$ ,  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ ,  $a + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ ,  $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ ,  $a + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}$ ,  $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}$ , & ainsi de suite ; les élever par ordre à la puissance 2<sup>e</sup>, 3<sup>e</sup>, 4<sup>e</sup>, &c. & remarquer le nombre des termes qu'auront ces différentes puissances, & en faire une table. Il faut faire la même chose pour les grandeurs complexes incommensurables, dont les signes radicaux seront  $\sqrt[3]{\phantom{x}}$ ,  $\sqrt[4]{\phantom{x}}$ , &c.

On connoîtra par ce moyen, quand on voudra chercher la racine 2<sup>e</sup>, 3<sup>e</sup>, &c. d'une grandeur complexe incommensurable, le nombre des termes qu'on doit supposer dans l'expression indéterminée de la racine; car ayant remarqué par exemple, qu'un binome a pour quarré un binome, qu'un trinome a pour quarré un quatinome, qu'un quatinome a pour quarré une grandeur complexe de sept termes, &c. (on suppose qu'il n'y a de signe radical que  $\sqrt[3]{}$ ;) quand on voudra chercher la racine quarrée d'une grandeur incommensurable, par exemple de sept termes, il faudra supposer que l'expression de la racine a quatre termes; & ainsi des autres. Il faut cependant remarquer qu'une grandeur complexe incommensurable, dont les grandeurs qui sont sous les signes radicaux dans tous les termes, n'ont aucun diviseur commun, étant élevée à une puissance quelconque, cette puissance aura plus de termes que n'en aura une semblable puissance d'une autre grandeur complexe incommensurable d'un même nombre de termes que la première, mais dont les grandeurs qui sont sous les signes radicaux, ont des diviseurs communs. Par exemple le quarré de  $\sqrt{f} + \sqrt{g} + \sqrt{h} + \sqrt{i}$  a sept termes, mais le quarré de  $\sqrt{f} + \sqrt{g} + \sqrt{fh} + \sqrt{gh}$ , n'a que quatre termes; & le quarré de  $-\sqrt{f} + \sqrt{f} + \sqrt{g} + \sqrt{fg}$ , n'a que trois termes. Ces remarques aideront à déterminer le nombre des termes que l'on doit supposer dans l'expression indéterminée de la racine qu'on cherche; & les remarques qu'on pourra faire sur les signes radicaux des grandeurs complexes incommensurables qu'on aura élevées aux puissances 2<sup>e</sup>, 3<sup>e</sup>, 4<sup>e</sup>, &c. serviront à faire connoître les signes radicaux qu'on doit supposer dans l'expression indéterminée de la racine qu'on cherche.

## I I.

La seconde difficulté qu'on trouve en cherchant les racines des incommensurables complexes suivant la méthode, est sur la comparaison des termes de la proposée avec les termes correspondans de son expression indéterminée; car dans la plupart des cas, sur-tout lorsqu'ils sont fort composez, on a de la peine à bien distinguer les termes correspondans. Voici ce qu'on doit faire pour ôter cette difficulté: Il faut prendre par ordre des incommensurables complexes, en nombres, 1<sup>o</sup>, avec le signe radical  $\sqrt[3]{}$ ; 2<sup>o</sup>, avec le signe  $\sqrt[3]{}$ ; &c.

& ainsi de suite, & mettre de l'ordre dans les termes, mettant, par exemple, le plus petit au premier terme, celui qui surpasse immédiatement le plus petit, au second terme, & ainsi de suite. Il faut prendre à même temps une incommensurable complexe en lettres avec les mêmes signes radicaux, & qui ait le même nombre de termes, par exemple si l'on prend  $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$ , on prendra à même temps  $\sqrt{f} + \sqrt{g} + \sqrt{h} + \sqrt{i}$ . Il faut élever l'une & l'autre successivement aux puissances 2<sup>e</sup>, 3<sup>e</sup>, 4<sup>e</sup>, &c. & supposant que les lettres du quadrinome littéral répondent, selon l'ordre où elles sont, aux nombres du quadrinome numérique, & qu'elles les représentent, on remarquera avec attention dans chaque puissance, quelles sont les grandeurs numériques correspondantes aux grandeurs littérales, ce qui sera facile à distinguer : on remarquera aussi dans les puissances de la grandeur complexe numérique, l'ordre suivant lequel il faut arranger les termes, afin qu'ils soient correspondans à l'ordre naturel des termes de la semblable puissance de la grandeur complexe littérale. Si l'on prend la peine de se rendre ces opérations familières, en faisant plusieurs exemples de la manière qu'on vient de l'indiquer, on distinguera aisément en pratiquant la méthode, quels sont les termes correspondans de l'expression indéterminée, & de la grandeur proposée.

## I I I.

Il arrive souvent qu'on trouve beaucoup plus d'équations particulières, qu'on a supposé de grandeurs indéterminées dans l'expression indéterminée de la racine qu'on cherche, dans ce cas le plus court est, quand on a trouvé les valeurs des indéterminées par autant d'équations qu'on a supposé d'indéterminées, de substituer ces valeurs dans l'expression de la racine, & de l'élever ensuite à la puissance de la proposée, c'est-à-dire au carré, si on cherche une racine quarrée, à la troisième puissance, si on cherche une racine cubique, &c. car si on trouve que cette puissance de la racine qu'on cherche, soit la même grandeur que la proposée, on a trouvé la racine qu'on cherchoit, si cela n'arrive pas, il faut chercher d'autres valeurs des indéterminées, & continuer jusqu'à ce que cela arrive.

## I V.

Quand l'indéterminée qui sert d'inconnue à l'équation dont il est parlé dans le troisième article de la méthode, qui ne contient que cette seule indéterminée, quand, dis-je, cette indéterminée n'a pas de valeur commensurable dans cette équation, il faut cesser la recherche de la racine qu'on cherchoit, & il suffit de mettre au devant de la proposée le signe radical avec l'exposant de la racine qu'on cherchoit; par exemple, si l'on cherchoit la racine cubique de  $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ , il suffiroit d'écrire  $\sqrt[3]{\sqrt{a + \sqrt{b}}}$ .

## E X E M P L E V I.

*Où l'on fait l'application des remarques précédentes.*

**S**OIT proposé de trouver la racine quarrée de la grandeur complexe incommensurable  $15 + \sqrt{8} + \sqrt{28} + \sqrt{40} + \sqrt{140} + \sqrt{56} + \sqrt{20}$ , qui a sept termes.

1<sup>o</sup>. Il me faut chercher une grandeur complexe incommensurable, qui représente d'une manière indéterminée la racine que je cherche, & dont le quarré contienne sept termes: Pour trouver combien cette racine elle-même doit contenir de termes, j'éleve au quarré le trinome  $f + \sqrt{g} + \sqrt{h}$ , & trouvant que le quarré ne contient que quatre termes, je prens le quadrinome  $f + \sqrt{g} + \sqrt{h} + \sqrt{i}$ , je l'éleve au quarré, & trouvant que son quarré  $ff + g + h + i + 2f\sqrt{g} + 2f\sqrt{h} + 2f\sqrt{i} + 2\sqrt{gh} + 2\sqrt{gi} + 2\sqrt{hi}$ , contient sept termes, cela me fait juger que je dois supposer pour l'expression indéterminée qui représente la racine que je cherche, un quadrinome indéterminé, comme  $f + \sqrt{g} + \sqrt{h} + \sqrt{i}$ ; l'élever au quarré, & j'aurai  $ff + g + h + i + 2f\sqrt{g} + 2f\sqrt{h} + 2f\sqrt{i} + 2\sqrt{gh} + 2\sqrt{gi} + 2\sqrt{hi}$ , qui représente d'une manière indéterminée la grandeur complexe proposée  $15 + \sqrt{8} +$ , &c.

2<sup>o</sup>. Pour distinguer les termes correspondans de ces deux grandeurs complexes, l'une littérale & l'autre numérique, que je suppose égales, je prens un quadrinome numérique  $\sqrt{1}$  ou bien  $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ , que je range de manière que la plus petite grandeur soit la première, & ensuite celle qui est immédiatement plus grande; & ainsi de suite: je la suppose représentée par le quadrinome littéral  $f + \sqrt{g} + \sqrt{h} + \sqrt{i}$ , de manière que  $f$  représente 1,  $\sqrt{g}$  représente  $\sqrt{2}$ , &c. ainsi de suite: j'éleve l'une & l'autre au quarré, & ordon-



nant les termes dans le quarré numerique dans le même ordre que dans le quarré litteral, je trouve  $11 + \sqrt{8} + \sqrt{12} + \sqrt{20} + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}$ , qui est représenté par  $ff + g + b + i + 2\sqrt{g} + 2\sqrt{b} + 2\sqrt{i} + 2\sqrt{gb} + 2\sqrt{gi} + 2\sqrt{hi}$ ; & en remarquant avec attention les termes correspondans, je vois que la somme de tous les quarez des termes  $ff + g + b + i$ , représente la somme des quarez des termes qui doit être 11; que  $2\sqrt{g}$  représente  $\sqrt{8}$ ;  $2\sqrt{b}$  représente  $\sqrt{12}$ ; & ainsi de suite. Cela me fait voir qu'il faut ordonner les termes de la grandeur proposée de maniere qu'ils aillent de suite en augmentant, & elle sera  $15 + \sqrt{8} + \sqrt{20} + \sqrt{28} + \sqrt{40} + \sqrt{56} + \sqrt{140}$ , & alors les termes correspondans seront de suite, & j'aurai les équations suivantes  $ff + g + b + i = 15$ ,  $2\sqrt{g} = \sqrt{8}$ ,  $2\sqrt{b} = \sqrt{20}$ ,  $2\sqrt{i} = \sqrt{28}$ ,  $2\sqrt{gb} = \sqrt{40}$ ,  $2\sqrt{gi} = \sqrt{56}$ ,  $2\sqrt{hi} = \sqrt{140}$ .

3°. Les termes correspondans étant ainsi distinguez, il ne faut plus que dégager les indéterminées regardées comme inconnues, ce qui est facile en ôtant d'abord les incommensurables, & operant ensuite à l'ordinaire; & l'on trouvera par l'équation  $4ffg = 8$ , que  $ff = \frac{2}{g}$ ; par l'équation  $4ffb = 20$ , que  $ff = \frac{5}{b}$ ; par conséquent  $\frac{2}{g} = \frac{5}{b}$ , &  $g = \frac{2}{5}b$ ; on trouvera par l'équation  $4ffi = 28$ , que  $ff = \frac{7}{i}$ , par conséquent  $\frac{2}{i} = \frac{7}{i}$ , &  $g = \frac{2}{7}i$ ; on trouvera par l'équation  $4gb = 40$ , que  $g = \frac{10}{b}$ ; comparant cette valeur de  $g$  avec  $g = \frac{2}{5}b$ , on aura  $\frac{10}{b} = \frac{2}{5}b$ ; d'où l'on déduira  $bb = 25$ , &  $b = 5$ ; on substituera cette valeur de  $b$  dans  $g = \frac{2}{5}b$ , & l'on trouvera  $g = 2$ ; on substituera cette valeur de  $g$  dans  $ff = \frac{2}{g}$ , & l'on aura  $ff = 1$ , &  $f = 1$ ; enfin on substituera la valeur de  $g$  dans  $g = \frac{2}{7}i$ , & l'on trouvera  $i = 7$ . On substituera ces valeurs de  $f, g, b, i$ , dans  $f + \sqrt{g} + \sqrt{b} + \sqrt{i}$ , & l'on aura  $1 + \sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$  pour la racine de la proposée  $15 + \sqrt{8} + \sqrt{20} + \sqrt{28} + \sqrt{40} + \sqrt{56} + \sqrt{140}$ , &c. car en élevant  $1 + \sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$  au quarré, on trouve la proposée  $15 + \sqrt{8} + \sqrt{20} + \sqrt{28} + \sqrt{40} + \sqrt{56} + \sqrt{140}$ , &c.

## E X E M P L E V I I.

P O U R trouver la racine cubique de la grandeur complexe incommensurable  $10 + \sqrt[3]{324} + \sqrt[3]{486} + \sqrt[3]{540} + \sqrt[3]{6480} + \sqrt[3]{1215} + \sqrt[3]{1350} + \sqrt[3]{2025}$ , qui a huit termes: 1°. il me faut chercher une grandeur complexe incommensurable

qui représente d'une manière indéterminée la racine de la proposée; pour la trouver, j'éleve un trinome  $\sqrt[3]{f} + \sqrt[3]{g} + \sqrt[3]{h}$  à la troisième puissance; & voyant que sa troisième puissance  $f + g + h + 3\sqrt[3]{ffg} + 3\sqrt[3]{fgh} + 3\sqrt[3]{ffh} + 6\sqrt[3]{fgh} + 3\sqrt[3]{ggh} + 3\sqrt[3]{fhh} + 3\sqrt[3]{ghh}$ , contient huit termes, je suppose que  $\sqrt[3]{f} + \sqrt[3]{g} + \sqrt[3]{h}$  représente d'une manière indéterminée la racine que je cherche, & que la troisième puissance  $f + g + h + 3\sqrt[3]{ffg} +$ , &c. représente la proposée.

2°. Pour découvrir quels sont les termes correspondans de la proposée & de la grandeur qui la représente, & que je lui suppose égale, j'éleve plusieurs trinomes numériques, comme  $1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$ ,  $1 + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{5}$ ,  $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{5}$ , &c. à la troisième puissance; & faisant mes remarques sur les troisième puissances de tous ces trinomes, que je regarde comme représentées par  $f + g + h + 3\sqrt[3]{ffg} +$ , &c. je vois que leur plus grand terme est représenté par  $6\sqrt[3]{fgh}$ , & que  $3\sqrt[3]{ggh}$  représente dans quelques-unes le plus grand terme après le précédent, & que dans quelques autres il est représenté par  $3\sqrt[3]{ghh}$ , & en d'autres par  $3\sqrt[3]{fhh}$ .

3°. Je compare  $6\sqrt[3]{fgh}$  avec le plus grand terme de la proposée, & j'ai la première équation  $6\sqrt[3]{fgh} = \sqrt[3]{6480}$ , je compare  $\sqrt[3]{2025}$  avec  $3\sqrt[3]{ghh}$ , & j'ai la seconde équation  $3\sqrt[3]{ghh} = \sqrt[3]{2025}$ ; je compare  $\sqrt[3]{1350}$  avec  $3\sqrt[3]{fhh}$ , & j'ai la troisième équation  $3\sqrt[3]{fhh} = \sqrt[3]{1350}$ ; je dégage les inconnues à l'ordinaire, & je trouve  $f = 2$ ,  $g = 3$ ,  $h = 5$ .

4°. Je substitue ces valeurs de  $f$ ,  $g$ ,  $h$ , dans la racine que j'ai supposée, & je trouve  $\sqrt[3]{f} + \sqrt[3]{g} + \sqrt[3]{h} = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{5}$ . J'éleve cette racine à la troisième puissance, & je trouve que la troisième puissance est la proposée  $10 + \sqrt[3]{324} +$ , &c. d'où je conclus que  $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{5}$  est la racine de la proposée.

#### AVERTISSEMENT.

SI la troisième puissance de la racine que j'ai trouvée n'avoit pas été la grandeur proposée, j'aurois changé la seconde & la troisième équation en comparant  $3\sqrt[3]{ghh}$  &  $3\sqrt[3]{fhh}$  successivement avec les plus grands termes, jusqu'à ce que j'eusse trouvé les valeurs des indéterminées de la racine supposée, dont la troisième puissance eût été la grandeur proposée; ce qu'il faut entendre dans l'exemple sixième, & dans tous les autres qui peuvent se présenter.



## ANALYSE COMPOSÉE,

O U

ANALYSE QUI ENSEIGNE A RESOUDRE  
les Problèmes qui se réduisent à des équations  
composées.

## L I V R E V I.

*De l'approximation des racines des équations  
numeriques.*

## A V E R T I S S E M E N T.

ON a expliqué dans le quatrième Livre la manière de trouver les racines des équations, lorsqu'elles sont commensurables ; dans ce cas, il est inutile de les chercher par approximation : On a aussi donné au même endroit la méthode de réduire une équation composée aux équations plus simples dont elle est composée, quand les produits des équations lineaires, qui contiennent les racines prises deux à deux, ou trois à trois, &c. sont des grandeurs commensurables : Enfin on a donné dans le cinquième Livre le moyen de trouver en plusieurs cas les expressions incommensurables, mais exactes, des racines incommensurables des équations du second degré, du troisième, du quatrième, &c.

On va donner dans ce sixième Livre la méthode de trouver les valeurs approchées des racines incommensurables de toutes les équations composées numeriques, & le moyen d'approcher ces valeurs aussi près qu'on voudra des racines exactes, qu'on ne peut pas avoir dans la dernière justesse.

On expliquera dans le septième Livre les méthodes d'approximation des racines des équations litterales ou algebriques.

## SECTION I

Où l'on explique les principes d'où dépend la méthode de trouver pour chaque racine d'une équation numérique composée, deux grandeurs, dont l'une soit moindre, & l'autre plus grande que cette racine.

## DÉFINITION I.

**L**ES grandeurs entre lesquelles se trouvent les racines d'une équation, seront nommées les *limites* de ces racines. Si l'on suppose, par exemple, toutes les racines d'une équation réelles & inégales, & que l'on nomme par ordre la première celle qui est la plus petite, la seconde, celle qui est immédiatement plus grande que la première, & ainsi de suite, d'autres grandeurs dont la première est moindre que la plus petite racine, la seconde la surpasse, mais elle est moindre que la seconde racine; & ainsi de suite: ces autres grandeurs sont les *limites* des racines.

## DÉFINITION II.

**Q**UAND les racines d'une équation sont les limites des racines d'une équation proposée, on la nommera l'*équation des limites*.

## COROLLAIRE.

**L**ORSQUE les racines d'une équation sont les limites des racines d'une autre équation, il est évident que les racines de cette seconde sont aussi les limites des racines de la première équation.

## THÉOREME I.

Première Partie.

118. SI l'on substitue une grandeur connue quelconque positive, à la place de l'inconnue dans une équation composée, la somme connue de toutes les grandeurs de l'équation, après la substitution, est précisément le reste tout connu qu'on trouveroit en divisant l'équation par l'inconnue linéaire moins cette grandeur connue.

**P**AR exemple, si on substitue la grandeur connue positive  $+a$  dans  $x^3 - nxx + px + q = 0$ , la somme toute connue

$a^2 - naa + pa + q$  qui vient de la substitution, est précisément le reste qu'on trouve en divisant  $x^3 - nxx + px + q = 0$ , par  $x - a = 0$ ; car en faisant la division, comme on le voit ici,

$$\begin{array}{r} x^3 - nxx + px + q \\ + 1axx - 1nax + pa \\ \hline + 1aax - naa \\ \hline + a^3 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} a - a \\ xx - nx + p \\ + ax - na \\ + aa \end{array} \right.$$

on trouvera que le reste de la division est  $a^3 - naa + pa + q$ .

Il n'y a qu'à faire plusieurs opérations semblables, & se les rendre familières, pour en voir la raison, qui paroît par l'opération même.

Seconde Partie du premier Theorème.

*SI l'on substitue une grandeur négative  $-a$  à la place de l'inconnue dans une équation, la somme toute connue qui naîtra de la substitution, sera précisément le reste tout connu qu'on trouvera en divisant la même équation par  $x + a = 0$ .*

IL n'y a qu'à faire l'opération pour en découvrir la raison.

C O R O L L A I R E.

IL suit de ce Theorème que c'est la même chose de substituer une grandeur  $+$  ou  $-a$  au lieu de l'inconnue dans une équation, ou de diviser cette équation par l'inconnue moins ou plus la grandeur  $a$ , & que l'un revient à l'autre, puisqu'on trouve la même chose; ce qui se doit entendre dans la suite.

T H E O R È M E I I.

Première Partie.

119. LA somme toute connue qui vient de la substitution d'une grandeur connue positive quelconque  $+a$ , à la place de l'inconnue d'une équation, par exemple  $x^3 - nxx + px + q = 0$ , est précisément le dernier terme de la transformée qu'on trouveroit en supposant  $x = z + a$ , & mettant  $z + a$ , au lieu de  $x$  dans l'équation.

CAR cette transformée seroit  $x^3 = z^3 + 3azx + 3aax + a^3$   
 $- nxx = 0 - nzz - 2naz - naa$   
 $+ px = + pz + pa$   
 $+ q = + q$

dans laquelle on voit que le dernier terme  $a^3 - naa + pa + q$ , est précisément la somme qui vient de la substitution de  $+a$  au lieu de  $x$ , dans la proposée.

Il n'y a qu'à se rendre cette opération familière par plusieurs exemples, pour en voir la raison, qui paroît par l'opération même.

Seconde Partie du second Théorème.

*LA somme toute connue qui viendrait de la substitution de la grandeur négative  $-a$ , au lieu de  $x$  dans une équation, seroit précisément le dernier terme de la transformée, qu'on trouveroit en supposant  $x = z - a$ , & en substituant dans la proposée  $z - a$  au lieu de  $x$ .*

IL n'y a qu'à faire l'opération pour en voir la raison.

### THÉORÈME III.

120. *LES racines de la transformée d'une équation quelconque, qui vient de la substitution de  $z + a = x$ , à la place de l'inconnue  $x$ , sont les racines mêmes de la proposée; mais les racines positives de la proposée sont diminuées de la grandeur  $a$  dans la transformée, & les racines négatives de la proposée sont augmentées de la même grandeur  $a$  dans la transformée.*

AINSI supposé que toutes les racines de la proposée soient positives, les racines de la transformée sont toutes les différences de la grandeur  $a$  d'avec chacune des racines de la proposée.

- \* 38. Ce Théorème a été démontré dans le troisième Livre.\*

### COROLLAIRE I.

121. *LE dernier terme de la transformée, dont on vient de parler, étant le produit de toutes les racines de la transformée; & ces racines étant les différences de la grandeur  $a$  d'avec chacune des racines de la proposée, qu'on suppose toutes positives, il est évident que le dernier terme de cette transformée est le produit de toutes les différences de la grandeur  $a$  d'avec les racines de la proposée.*

### COROLLAIRE II.

122. *MAIS en substituant  $+a$  dans la proposée à la place de  $x$ , la somme toute connue qui en vient est le dernier terme de la transformée dont on vient de parler, c'est pourquoi en substituant une grandeur quelconque  $+a$  dans une équation proposée, dont toutes les racines sont positives, à la place*

place de  $x$ , la somme toute connue qui vient de cette substitution, est le produit de toutes les différences qui sont entre la grandeur substituée  $a$  & les racines de la proposée.

Ce Corollaire, c'est-à-dire que la somme toute connue qui vient de la substitution d'une grandeur connue  $a$ , au lieu de l'inconnue de l'équation, est précisément le produit de toutes les différences qui sont entre  $a$  & les racines de la proposée, qu'on suppose toutes positives, se peut démontrer de cette autre manière.

Supposé que les racines d'une équation soient  $b, c, d$ , ainsi les équations lineaires dont elle est composée, sont  $x - b = 0$ ,  $x - c = 0$ ,  $x - d = 0$ . Si on met une grandeur connue  $a$  au lieu de  $x$ , elles seront changées en  $a - b = 0$ ,  $a - c = 0$ ,  $a - d = 0$ . Le produit de ces trois quantitez  $a - b$ ,  $a - c$ ,  $a - d$ , est évidemment le même qu'on trouveroit si l'on substituoit  $+a$  au lieu de  $x$  dans l'équation composée  $x^3 - bxx$ , &c. qui est le produit des trois équations

$$- cxx$$

$$- dxx$$

tions simples  $x - b = 0$ ,  $x - c = 0$ ,  $x - d = 0$ . Mais il est évident que le produit des trois quantitez  $a - b$ ,  $a - c$ ,  $a - d$ , est le produit des trois différences qui sont entre la grandeur  $a$  & les trois racines  $b, c, d$  de la proposée: donc si l'on substitue une grandeur  $a$  au lieu de l'inconnue d'une équation dont toutes les racines sont positives, la somme toute connue qui en vient, est le produit des différences qui sont entre  $a$  & les racines de l'équation.

## R E M A R Q U E S.

## I.

SI la grandeur  $a$  qu'on substitue à la place de l'inconnue dans une équation dont toutes les racines sont positives, est zero, ou une grandeur moindre que la plus petite des racines, il est évident que toutes les différences  $0 - b$ ,  $0 - c$ ,  $0 - d$ , ou  $a - b$ ,  $a - c$ ,  $a - d$ , sont toutes négatives, & ont les mêmes signes — qu'ont toutes les racines dans les équations lineaires  $x - b = 0$ ,  $x - c = 0$ ,  $x - d = 0$ : par conséquent le produit de toutes les différences, c'est-à-dire la somme toute connue qui viendra de la substitution de  $a$  au lieu de  $x$  dans l'équation, aura le même signe que

le dernier terme de l'équation qui est le produit des racines  $-b, -c, -d$ .

## I I.

Si la grandeur  $a$  surpasse la premiere racine qui est la plus petite, & qu'elle soit surpassée par la seconde racine, il est évident que la premiere difference  $a - b$  est positive, & que toutes les autres  $a - c, a - d$ , sont négatives : par conséquent le produit de toutes les differences  $a - b, a - c, a - d$ , qui est la somme qui vient de la substitution de  $a$  au lieu de  $x$  dans l'équation, aura un signe different de celui du dernier terme de l'équation.

## I I I.

Si la grandeur  $a$  surpasse les deux premieres racines, & qu'elle soit moindre que la troisieme, il est évident que les deux premieres differences  $a - b, a - c$ , seront positives, & que la troisieme  $a - d$  sera négative, & les autres suivantes, si l'équation est du quatrieme ou cinquieme degré, &c. par conséquent le produit de toutes les differences, qui est la somme qui vient de la substitution de  $a$  au lieu de  $x$  dans l'équation, aura un signe different du précédent ; c'est-à-dire, le même signe que le dernier terme de l'équation.

## COROLLAIRE III. FONDAMENTAL.

123. **EN** continuant le même raisonnement, on verra qu'en prenant successivement  $a$  pour les grandeurs entre lesquelles les racines d'une équation quelconque, dont toutes les racines sont positives, sont des grandeurs moyennes, & substituant successivement ces grandeurs  $a$  au lieu de l'inconnue dans l'équation proposée, en commençant par celle qui est moindre que la plus petite racine, les sommes toutes connues qui viendront des substitutions successives, auront alternativement le signe du dernier terme de l'équation & son signe opposé, c'est-à-dire  $+$  &  $-$  dans les équations des degrez pairs, comme du second, du quatrieme, du sixieme, &c. &  $-$  &  $+$  dans les équations des degrez impairs. Si l'on substitue à la place de l'inconnue d'une équation, dont toutes les racines sont positives, une grandeur positive  $+a$ , qui surpasse la plus grande des racines de l'équation, la somme toute connue qui viendra de la substitution, aura toujours le signe  $+$  ; car cette somme est le produit de toutes les diffe-



rences qui sont entre la grandeur substituée & toutes les racines de l'équation ; & comme cette grandeur est supposée plus grande que toutes les racines, toutes ces différences auront chacune le signe + ; leur produit aura donc le signe +.

## C O R O L L A I R E I V.

124. **I**L suit de là & du second Theorème, que si l'on transforme une équation proposée, en supposant son inconnue  $x = z + a$ , & substituant  $z + a$  au lieu de  $x$  dans la proposée, quand le signe du dernier terme de la transformée sera le même que celui du dernier terme de la proposée, la grandeur  $a$ , dont les racines positives sont diminuées, sera moindre que la plus petite racine de la proposée, ou qu'elle surpassera un nombre pair des racines positives de la proposée, comme deux ou quatre, &c. Mais si le dernier terme de la transformée a un signe différent de celui du dernier terme de la proposée, la grandeur  $a$  surpassera nécessairement la moindre racine positive de la proposée ; mais elle en peut aussi surpasser un nombre impair, comme trois, cinq, &c.

## C O R O L L A I R E V.

125. **S**I l'on substitue successivement une grandeur négative  $-a$  dans une équation dont toutes les racines sont négatives & différentes, à la place de l'inconnue, & qu'on commence par substituer une grandeur  $-a$  moindre que la plus petite des racines négatives, & ensuite une grandeur  $-a$  plus grande que la première racine négative, mais moindre que la seconde, & ainsi de suite, les sommes toutes connues qui viendront des substitutions successives, auront alternativement les signes + & -.

La démonstration est si facile après celle qu'on a donnée pour le cas où les racines sont toutes positives, qu'il est inutile de la mettre.

## T H E O R È M E I V.

126. **Q**UAND toutes les racines d'une équation sont négatives & réelles, si l'on substitue une grandeur positive quelconque  $+a$  au lieu de l'inconnue, la somme toute connue qui viendra de la substitution, aura toujours le signe + ; & quand les racines sont toutes positives, si l'on substitue une grandeur négative quelconque  $-a$

*au lieu de l'inconnue, la somme toute connue qui en viendra, aura toujours le même signe qu'avoit le dernier terme de l'équation.*  
Ce Théorème est évident après tout ce qui précède.

## THÉORÈME V.

127. *QUAND toutes les racines d'une équation sont égales, qu'elles sont en nombre pair, & qu'elles sont toutes positives ou toutes négatives, ou bien un nombre pair de positives, & un nombre pair de négatives, si l'on substitue une grandeur  $a$  soit positive, soit négative, moindre ou plus grande que chaque racine égale, la somme qui viendra de la substitution sera toujours positive.*

## DÉMONSTRATION.

SOIENT les équations lineaires dont l'équation est composée  $x - b = 0$ ,  $x - b = 0$ ,  $x - b = 0$ ,  $x - b = 0$ , ou bien  $x - b = 0$ ,  $x - b = 0$ ,  $x + b = 0$ ,  $x + b = 0$ ; si l'on substitue dans chacune de ces équations lineaires une grandeur  $+a$  moindre ou plus grande que la racine  $b$ , l'on aura  $a - b$ ,  $a - b$ ,  $a - b$ ,  $a - b$ ; ou bien  $a - b$ ,  $a - b$ ,  $a + b$ ,  $a + b$ .

1<sup>o</sup>. Il est évident que si  $a$  est moindre que  $b$ , les quatre grandeurs  $a - b$ ,  $a - b$ ,  $a - b$ ,  $a - b$ , sont négatives; ainsi leur produit tout connu sera positif. Si  $a$  surpasse  $b$ , les quatre grandeurs  $a - b$ ,  $a - b$ ,  $a - b$ ,  $a - b$ , sont toutes positives, ainsi leur produit sera positif.

2<sup>o</sup>. Si  $a$  est moindre que  $b$ , les deux grandeurs  $a - b$ ,  $a - b$ , sont négatives; ainsi leur produit qui est positif, étant multiplié par les deux autres qui sont positives  $a + b$ ,  $a + b$ , donnera un produit positif. Si  $a$  surpasse  $b$ , les quatre grandeurs  $a - b$ ,  $a - b$ ,  $a + b$ ,  $a + b$ , sont positives, ainsi leur produit est positif.

Mais il est évident que le produit des quatre grandeurs  $a - b$ ,  $a - b$ ,  $a - b$ ,  $a - b$ , & celui des quatre  $a - b$ ,  $a - b$ ,  $a + b$ ,  $a + b$ , sont précisément les sommes toutes connues qui viendroient en substituant la grandeur  $a$  au lieu de  $x$  dans l'équation composée des équations lineaires  $x - b = 0$ ,  $x - b = 0$ ,  $x - b = 0$ ,  $x - b = 0$ , ou des équations lineaires  $x - b = 0$ ,  $x - b = 0$ ,  $x + b = 0$ ,  $x + b = 0$ ; donc, &c.

La démonstration se fera de la même manière, si l'on

substitue la grandeur négative —  $a$  moindre ou plus grande que la racine égale  $b$ .

## C O R O L L A I R E.

**I**L est évident que ce Theorème est également veritable par raport à une équation composée d'un nombre pair de racines égales qui ont un même signe + ou —, & d'un autre nombre pair d'autres racines égales différentes des premières, qui ont aussi toutes le même signe +, ou le même signe —.

*Remarques pour le Theorème suivant.*

128. 1<sup>o</sup>. **I**L faut remarquer sur les racines imaginaires, dont on parlera dans ce Theorème, qu'elles sont toujours en nombre pair dans une équation composée. \*

2<sup>o</sup>. Qu'elles peuvent être de deux sortes, ou purement imaginaires comme dans ces équations lineaires  $x + \sqrt{-ab} = 0$ ,  $x - \sqrt{-ab} = 0$ ; ou contenir une partie réelle, & l'autre imaginaire, comme dans celles-ci  $x - b + \sqrt{-bc} = 0$ ,  $x - b - \sqrt{-bc} = 0$ . \* 29.  
14<sup>o</sup> Cor.

3<sup>o</sup>. Qu'étant toujours deux à deux dans une équation composée, si l'une est purement imaginaire, l'autre l'est aussi: si l'une contient une partie réelle & l'autre imaginaire, il faut que l'autre contienne la même partie réelle sous le même signe, & la partie imaginaire sous un signe opposé; la raison en est qu'autrement la racine imaginaire paroîtroit avec son signe dans l'équation composée, où l'on suppose qu'il n'y en paroît aucune.

4<sup>o</sup>. Dans les équations où la racine est purement imaginaire, comme dans  $x + \sqrt{-ab} = 0$ ,  $x - \sqrt{-ab} = 0$ ; on pourra dire que la racine imaginaire de la première est négative, & celle de la seconde positive: mais dans les équations  $x - b + \sqrt{-bc} = 0$ ,  $x - b - \sqrt{-bc} = 0$ , on dira que les deux racines sont positives; & dans les deux équations  $x + b + \sqrt{-bc} = 0$ ,  $x + b - \sqrt{-bc} = 0$ , qu'elles sont négatives, ces dénominations étant arbitraires.

5<sup>o</sup>. Une équation dont les deux racines sont imaginaires, & qui a tous ses termes, comme  $xx - 2bx + bb = 0$ , ou

$+ bc$

$xx + 2bx + bb = 0$ , contient une équation de deux racines.

égales toutes deux positives, ou toutes deux négatives; & de plus, elle a dans son dernier terme tout connu une grandeur positive, outre le quarré de la racine égale; ainsi son dernier terme  $+bb + bc$ , qui est toujours positif, surpasse le dernier terme de l'équation des deux racines égales  $xx \pm 2bx + bb$  d'une grandeur positive  $+bc$ .

## THEOREME VI.

129. *SI l'on substitue une grandeur  $a$  soit positive, soit négative, qui soit moindre que la partie réelle des racines imaginaires, quand elles en ont une, ou qui soit plus grande, ou qui lui soit égale, dans une équation qui a ses deux racines imaginaires, à la place de l'inconnue  $x$ , la somme toute connue qui en viendra, aura toujours le signe  $+$ .*

## DEMONSTRATION.

1°. LE Theorème est évident par lui-même, quand les deux racines de l'équation sont purement imaginaires, comme dans  $xx + bc = 0$ ; 2°. quand les deux racines imaginaires ont une partie réelle, qui est toujours la même, & avec le même signe, en ôtant du dernier terme la grandeur positive qui s'y trouve, & laissant le quarré positif de la partie réelle, l'équation aura deux racines égales & réelles, toutes deux avec le même signe: donc par ce qui a été démontré pour les équations des racines égales en nombre pair & avec le même signe, en substituant  $+$  ou  $-a$  dans cette équation, la somme toute connue qui en viendra aura le signe  $+$ ; & si l'on substitue la partie réelle, qui est la racine de l'équation qui a ses deux racines égales, la somme toute connue qui en viendra fera zero: donc en y ajoutant la grandeur positive du dernier terme, qui est cause que l'équation a deux racines imaginaires, cette somme aura toujours le signe  $+$ .  
Ce qu'il falloit démontrer.

## COROLLAIRE I.

SI une équation est composée de quatre, de six, de huit racines imaginaires, en y substituant à la place de l'inconnue une grandeur quelconque  $a$  positive ou négative, la somme qui en viendra aura toujours le signe  $+$ .

Ce Corollaire est une suite évidente du sixième Theorème

## C O R O L L A I R E I I.

**I**L n'y a aucune grandeur réelle qui étant substituée à la place de l'inconnue d'une équation dont toutes les racines sont imaginaires, donne zero pour la somme toute connue.

## T H E O R È M E V I I.

130. *SI une équation composée a plusieurs racines positives & inégales, & qu'elle en ait encore de négatives, qu'elle en ait même encore d'égaux en nombre pair, & qui soient toutes positives ou toutes négatives, ou qui soient positives en nombre pair, & négatives en nombre pair; qu'enfin elle en ait encore (si l'on veut) d'imaginaires, qui sont toujours en nombre pair; qu'on substitue successivement dans l'équation composée, à la place de l'inconnue, une grandeur positive 1.<sup>o</sup> moindre que la plus petite des positives inégales; 2.<sup>o</sup> plus grande que cette première, & moindre que la seconde racine positive, & ainsi de suite, par rapport aux seules positives inégales, les sommes toutes connues qui viendront des substitutions successives auront alternativement les signes + & —, si les racines positives inégales sont en nombre pair; & alternativement — & +, si les racines positives sont en nombre impair.*

## D É M O N S T R A T I O N.

**Q**U'ON conçoive séparément l'équation composante des racines positives inégales, qu'on nommera *A*, pour rendre la démonstration plus claire, & séparément l'équation composante des racines négatives, qu'on nommera *B*; & séparément celle des racines égales, qu'on nommera *C*; & enfin celle des racines imaginaires, qu'on nommera *D*. Il est évident par le troisième Corollaire fondamental du 3<sup>e</sup> Theorème, \* que les substitutions successives des grandeurs *a*, \* 123. telles qu'on les a supposées, dans l'équation *A* à la place de l'inconnue *x*, donneront successivement des sommes qui auront alternativement + & —, ou — & + : Il est aussi évident par les 4<sup>e</sup>, \* 5<sup>e</sup>, \* & 6<sup>e</sup> \* Theorèmes, que les mêmes \* 126. grandeurs successives *a* étant substituées successivement dans les équations *B*, *C*, *D*, les sommes qui en naîtront auront \* 127. toujours le signe +. Ainsi le produit qui naîtra de la multi- \* 129. plication d'une somme connue qui vient de la substitution de *a* dans l'équation *A*, par le produit des trois sommes

connues qui viendront de la substitution de la même grandeur  $a$  dans les trois équations  $B, C, D$ , aura toujours le même signe que celui de la somme connue qui vient de la substitution de  $a$  dans l'équation  $A$ ; car les autres sommes de  $B, C, D$ , ayant toujours  $+$ ; leur produit par la somme connue de  $A$  aura le signe de cette somme.

Mais il est évident que le produit qui vient de la multiplication des sommes connues que donnent les équations  $B, C, D$ , par la somme connue que donne l'équation  $A$ , est la somme toute connue qu'on trouve en substituant la même grandeur  $a$  au lieu de  $x$  dans l'équation composée des quatre équations  $A, B, C, D$ . Par conséquent les sommes toutes connues qui naîtront des substitutions successives des grandeurs  $a$ , telles qu'on les a supposées, dans l'équation composée des quatre  $A, B, C, D$ , au lieu de l'inconnue  $x$ , auront alternativement  $+$  &  $-$ , ou  $-$  &  $+$ . *Ce qu'il falloit démontrer.*

## COROLLAIRE I.

SI en substituant deux grandeurs positives connues  $+a$  &  $+b$ , l'une après l'autre dans une équation quelconque, à la place de l'inconnue  $x$ , les deux sommes connues qui en naissent ont les signes opposés  $+$  &  $-$ , ou  $-$  &  $+$ , il est certain qu'il y a au moins une racine positive de cette équation entre les deux grandeurs  $a$  &  $b$ ; c'est-à-dire, plus grande que la moindre des deux, & plus petite que la plus grande des deux grandeurs  $a$  &  $b$ .

Il faudroit conclure la même chose si on divisoit la même équation par  $x - a = 0$ , & ensuite par  $x - b = 0$ , & que les deux divisions donnaient deux restes qui eussent des signes

\* 118. opposés.\*

## COROLLAIRE II.

SI l'on substituoit  $-a, -b$ , l'une après l'autre, à la place de  $x$ , ou si l'on divisoit l'équation par  $x + a = 0$ , & par  $x + b = 0$ , & si les deux sommes qui naîtroient des substitutions, ou les deux restes des divisions, avoient des signes opposés, il est certain\* qu'il y auroit au moins une racine négative entre les deux grandeurs  $a$  &  $b$ , plus grande que la moindre des deux, & plus petite que la plus grande des deux grandeurs  $a$  &  $b$ .

\* 125,  
\* 126.

## COROLLAIRE

## COROLLAIRE III.

SI l'on transforme une équation en deux autres, 1°. en supposant l'inconnue de l'équation  $x = z + a$ , & substituant  $z + a$  au lieu de  $x$  dans l'équation, 2°. en supposant l'inconnue  $x = y + b$ , & substituant  $y + b$  au lieu de  $x$  dans l'équation, & que les deux derniers termes des transformées aient deux signes opposés, il est certain qu'il y a au moins une des racines positives de l'équation proposée entre  $a$  &  $b$ , plus grande que la moindre des deux, & plus petite que la plus grande des deux grandeurs  $a$  &  $b$ .

Mais si l'on suppose, 1°.  $x = z - a$ , & ensuite  $x = y - b$ , & si après avoir fait les substitutions de  $z - a$  au lieu de  $x$ , & de  $y - b$  au lieu de  $x$  dans l'équation, il vient deux transformées dont les signes soient différens, il est certain qu'il y a au moins une racine négative de l'équation entre les grandeurs  $a$  &  $b$ .

Ces trois Corollaires sont des suites évidentes des Théorèmes précédens.\*

\* 118, 119,  
125, 126,  
& 130

## COROLLAIRE IV.

QUAND on peut trouver deux limites pour chacune des racines d'une équation, c'est-à-dire deux grandeurs pour chaque racine, dont l'une est moindre & l'autre plus grande que cette racine, il est certain que toutes les racines de l'équation sont réelles & inégales; car il n'y a pas de limites pour les imaginaires, puisqu'on a démontré\* que quelque grandeur qu'on substitue dans une équation dont les racines sont imaginaires, la somme toute connue qui en vient a toujours +; & il est évident qu'il n'y a pas d'autres limites entre les racines égales que zero.

\* 129.

## COROLLAIRE V.

SI l'on peut trouver deux limites pour chaque racine d'une équation, ou si l'on trouve les limites des unes, & zero pour les limites des autres; ou si l'on trouve zero pour les limites de chacune, toutes les racines de l'équation sont réelles; car on ne sçauroit trouver pour les imaginaires des limites dont l'une soit moindre & l'autre plus grande que chaque racine imaginaire; on ne sçauroit aussi trouver zero pour

les limites des racines imaginaires : Ainsi quand on trouve les limites de toutes les racines, ou du moins zero pour leurs limites : elles sont toutes réelles.

*Première supposition.*

**L**es équations lineaires de toute équation composée, dont toutes les racines sont réelles inégales & positives, soient représentées par  $x - a = 0$ ,  $x - b = 0$ ,  $x - c = 0$ ,  $x - d = 0$ , &c. que ces racines aillent en augmentant dans l'ordre qu'on les voit; c'est-à-dire, que  $a$  soit la plus petite, &  $b$  plus grande que  $a$ ,  $c$  plus grande que  $b$ ; & ainsi de suite : que la différence de  $a$  & de  $b$  soit  $f$ , celle de  $a$  & de  $c$  soit  $g$ , celle de  $a$  & de  $d$  soit  $h$ , & ainsi de suite; l'on a  $a + f = b$ ,  $a + g = c$ ,  $a + h = d$ . Que les différences de la seconde racine  $b$  d'avec les autres, soient exprimées par les mêmes lettres de suite  $f, g, h$ , &c. ainsi la différence de  $b$  & de  $a$  soit  $f$ , celle de  $b$  & de  $c$  soit  $g$ , celle de  $b$  & de  $d$  soit  $h$ , &c. (On se sert des mêmes lettres pour marquer les différences, quoiqu'inégales, afin de rendre la chose plus simple;) ainsi  $a = b - f$ ,  $c = b + g$ ,  $d = b + h$ . Que les différences de la troisième racine d'avec les autres soient aussi marqués par les mêmes lettres  $f, g, h$ , &c. ainsi  $a = c - g$ ,  $b = c - f$ ,  $d = c + h$ . Enfin que les différences de quelle racine on voudra de l'équation d'avec les autres, soient marquées de suite par les lettres  $f, g, h$ , &c.

1°. Il est évident que les équations lineaires dont l'équation est composée, peuvent être représentées par des équations lineaires, qui auront toutes, celle des racines de la proposée qu'on voudra, jointe avec les différences qui sont entre cette racine & les autres.

Premieres.	Secondes.	Troisièmes.	Quatrièmes.	Cinquièmes.
$x - a = 0$	$x - a = 0$	$x - b + f = 0$	$x - c + f = 0$	$x - d + f = 0$
$x - b = 0$	$x - a - f = 0$	$x - b = 0$	$x - c + g = 0$	$x - d + g = 0$
$x - c = 0$	$x - a - g = 0$	$x - b - g = 0$	$x - c = 0$	$x - d + h = 0$
$x - d = 0$	$x - a - h = 0$	$x - b - h = 0$	$x - c - h = 0$	$x - d = 0$

2°. Il est évident que le produit des premières équations, celui des secondes, celui des troisièmes, celui des quatrièmes, celui des cinquièmes, sont tous égaux, & que les équations composées qui viennent de ces produits, sont précisément la même équation sous différentes expressions, comme on le voit ici. Il faut les former soi même pour se rendre cette formation familière.



Première équation.

$$\begin{aligned} x^4 - ax^3 + abxx - abxx + abcd &= 0, \\ -bx^3 + acxx - abdx & \\ -cx^3 + a. lxx - acdx & \\ -dx^3 + bcxx - bcdx & \\ + bdx & \\ + cdx & \end{aligned}$$

Seconde équation:

$$\begin{aligned} x^4 - 4ax^3 + 6aaxx - 4a^3x + a^4 &= x^4 - 4ax^3 + 6aaxx - 4a^3x + a^4 \times x \\ + fx^3 - 3fxxx + 3faax + fa^3 &= + x^3 - 3xxx + 3aax - a^3 \times -f \\ -gx^3 + 3gxxx - 3gaax + ga^3 &= + x^3 - 3xxx + 3aax - a^3 \times -g \\ -hx^3 + 3hxxx - 3haax + ha^3 &= + x^3 - 3xxx + 3aax - a^3 \times -h \\ + fgxx - 2fgax + fga &= + xx - 2ax + aa \times +fg \\ + fhxx - 2fhax + fha &= + xx - 2ax + aa \times +fh \\ + ghxx - 2ghax + gha &= + xx - 2ax + aa \times +gh \\ - fghx + fgh &= + x - a \times -fgh \end{aligned}$$

Troisième équation:

$$\begin{aligned} x^4 - 4bx^3 + 6bbxx - 4b^3x + b^4 &= x^4 - 4bx^3 + 6bbxx - 4b^3x + b^4 \times x \\ + fx^3 - 3fbxx + 3fbbx - fb^3 &= + x^3 - 3bxx + 3bbx - b^3 \times +f \\ -gx^3 + 3gbxx - 3gbbx + gb^3 &= + x^3 - 3bxx + 3bbx - b^3 \times -g \\ -hx^3 + 3hbxx - 3hbbx + hb^3 &= + x^3 - 3bxx + 3bbx - b^3 \times -h \\ - fgxx + 2fgbx - fgbx &= + xx - 2bx + bb \times -fg \\ - fhxx + 2fhbx - fhbb &= + xx - 2bx + bb \times -fh \\ + ghxx - 2ghbx + ghbb &= + xx - 2bx + bb \times +gh \\ + fghx - fghb &= + x - b \times +fgh \end{aligned}$$

Quatrième équation.

$$\begin{aligned} x^4 - 4cx^3 + 6ccxx - 4c^3x + c^4 &= x^4 - 4cx^3 + 6ccxx - 4c^3x + c^4 \times x \\ + fx^3 - 3fcxx + 3fccx - fc^3 &= + x^3 - 3cxx + 3ccx - c^3 \times +f \\ + gx^3 - 3gcxx + 3gccx - gc^3 &= + x^3 - 3cxx + 3ccx - c^3 \times +g \\ -hx^3 + 3hcxx - 3hccx + hc^3 &= + x^3 - 3cxx + 3ccx - c^3 \times -h \\ + fgxx - 2fgcx + fgc &= + xx - 2cx + cc \times +fg \\ - fhxx + 2fhcx - fhcc &= + xx - 2cx + cc \times -fh \\ - ghxx + 2ghcx - ghcc &= + xx - 2cx + cc \times -gh \\ - fghx + fghc &= + x - c \times -fgh \end{aligned}$$

Cinquième équation.

$$\begin{aligned} x^4 - 4dx^3 + 6ddxx - 4d^3x + d^4 &= x^4 - 4dx^3 + 6ddxx - 4d^3x + d^4 \times x \\ + fx^3 - 3fdxx + 3fddx - fd^3 &= + x^3 - 3dxx + 3ddx - d^3 \times +f \\ + gx^3 - 3gdxx + 3gddx - gd^3 &= + x^3 - 3dxx + 3ddx - d^3 \times +g \\ + hx^3 - 3hdxx + 3hddx - hd^3 &= + x^3 - 3dxx + 3ddx - d^3 \times +h \\ + fgxx - 2fgdx + fgdd &= + xx - 2dx + dd \times +fg \\ + fhxx - 2fhdx + fhdd &= + xx - 2dx + dd \times +fh \\ + ghxx - 2ghdx + ghdd &= + xx - 2dx + dd \times +gh \\ + fghx - fghd &= + x - d \times +fgh \end{aligned}$$

N n ij

## THEOREME VIII.

131. *TOU*TTE équation composée, dont les racines sont réelles inégales & positives, peut être conçue comme contenant toutes les équations faites de seules racines égales à celle de ses racines qu'on voudra, qui suivent.

1°. Une équation du degré de la proposée, par exemple du 4<sup>e</sup> degré, dont toutes les racines sont égales à celle qu'on voudra des racines de la proposée, laquelle équation de racines égales est multipliée par l'unité.

2°. Une équation des mêmes racines égales moindre d'un degré que la précédente, multipliée par chacune des différences qui est entre cette racine égale & les autres.

3°. Une équation des mêmes racines égales moindre d'un degré que la précédente, multipliée par chacun des produits des mêmes différences multipliées entr'elles deux à deux.

4°. Une équation des mêmes racines égales moindre d'un degré que la précédente, multipliée par chacun des produits des mêmes différences multipliées entr'elles trois à trois.

Et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on soit arrivé à une équation lineaire qui a la même racine égale, & laquelle équation lineaire est multipliée par le produit des mêmes différences multipliées toutes les unes par les autres.

Ce Theorème est évident par la supposition précédente.

*Remarque sur cette formation des équations.*

SUPPOSANT que l'on marque chacune des racines  $a, b, c, d$ , de la proposée, par  $k$ , on aura l'équation suivante,

$$\begin{array}{rcl}
 x^4 & - & 4kx^3 + 6kkxx - 4k^3x + k^4 \times 1 \\
 + x^3 & - & 3kxx + 3kkx - k^3 \times \pm f \\
 + x^2 & - & 3kxx + 3kkx - k^3 \times \pm g \\
 + x^1 & - & 3kxx + 3kkx - k^3 \times \pm h \\
 & + & xx^2 - 2kx + kk \times \pm fg \\
 & + & xx \cdot - 2kx + kk \times \pm fb \\
 & + & xx - 2kx + kk \times \pm gb \\
 & & + x - k \times \pm fgh
 \end{array}$$

$a + 4d, a + 3d, a + 2d, a + 1d, a + 0.$

Le premier terme de l'équation lineaire  $\pm fghx \mp fgh \times k$ ,

qui est la dernière, a le signe —, si les racines sont en nombre pair, & qu'on conçoive que  $k$  représente la plus petite racine  $a$  de la proposée; & il a le signe +, si les racines sont en nombre impair.

Le même premier terme  $fgbx$  a un signe opposé au précédent, si l'on conçoit que  $k$  représente la seconde racine  $b$ . Il a un signe opposé au précédent, si  $k$  représente la troisième racine  $c$ . Il a un signe opposé au précédent, si  $k$  représente la quatrième racine  $d$ ; & ainsi le terme  $fgbx$  a alternativement les signes + & —, ou — & +, selon qu'on conçoit l'équation proposée formée successivement par la première racine de la proposée, ensuite par la seconde, ensuite par la troisième, &c.

La raison en est évidente, si l'on fait attention qu'il est le produit de toutes les différences de la racine qu'on emploie dans la formation, d'avec tous les autres, multiplié par  $x$ .

*Seconde supposition.*

**S**I on multiplie la 2<sup>e</sup>, la 3<sup>e</sup>, la 4<sup>e</sup>, la 5<sup>e</sup> équations qui précédent, représentées par l'équation de la remarque précédente, si on multiplie, dis-je, séparément chacune de ces équations par les termes d'une progression arithmétique quelconque, en multipliant le premier terme de l'équation par le premier terme de la progression, le second par le second, & ainsi de suite, il est évident que les termes de chacune des équations composées de racines égales, qui sont contenues dans chacune de ces quatre équations, seront multipliés de suite par les termes d'une progression arithmétique.

**T H E O R È M E I X.**

132. *SI on multiplie séparément de suite les termes de la 2<sup>e</sup>, de la 3<sup>e</sup>, de la 4<sup>e</sup>, de la 5<sup>e</sup> équation précédente par les termes d'une progression arithmétique, les équations particulières composées de racines égales contenues dans chacune de ces équations, auront encore après la multiplication une de leurs racines égales, excepté la seule équation linéaire.*

**C'**EST-à-dire, après avoir multiplié, par exemple, la seconde équation par les termes de la progression arithmétique, le produit de l'équation de quatre racines égales, celui

de l'équation de trois racines égales, celui de l'équation de deux racines égales, tous ces produits auront encore tous la racine égale commune; il n'y aura d'excepté que le seul produit de l'équation lineaire, qui n'aura plus une racine commune avec les autres.

Ce Theorème a été démontré dans la dernière Section  
\* 74. du quatrième Livre. \*

## COROLLAIRE I.

133. **S**I après avoir multiplié celle qu'on voudra de la 1<sup>e</sup>, 3<sup>e</sup>, 4<sup>e</sup>, 5<sup>e</sup> équation précédente, par une progression arithmetique, on substitue à la place de l'inconnue dans le produit, la racine égale, sçavoir  $a$  dans le produit de la 1<sup>e</sup>,  $b$  dans celui de la 3<sup>e</sup>,  $c$  dans celui de la 4<sup>e</sup>,  $d$  dans celui de la 5<sup>e</sup>, toutes les quantitez du produit se détruiront par des signes opposez, excepté les seules quantitez du produit de l'équation lineaire.

Car en substituant en des équations une racine de ces équations, à la place de l'inconnue, tous les produits se détruisent par des signes opposez. \*

## COROLLAIRE II.

134. **S**I on multiplie separément la 1<sup>e</sup>, la 3<sup>e</sup>, la 4<sup>e</sup>, la 5<sup>e</sup> équation précédente, par les termes d'une progression arithmetique qui va en diminuant, & qu'on substitue dans le produit la racine égale de cette équation, sçavoir  $a$  dans le premier produit,  $b$  dans le second,  $c$  dans le troisième,  $d$  dans le quatrième, à la place de l'inconnue; il est évident que parmi les deux quantitez du produit de l'équation lineaire, qui restent seules, la première est la plus grande.

Car elles sont toutes deux la même quantité sous differens signes, sçavoir  $fgha$  dans le produit de la seconde,  $fghb$  dans le produit de la troisième,  $fghc$  dans celui de la quatrième,  $fghd$  dans celui de la cinquième: mais la première de ces deux quantitez égales est multipliée, par la supposition, par un plus grand terme de la progression arithmetique, & la seconde par un moindre; par conséquent la première est la plus grande.

## COROLLAIRE III.

135. D'OÙ il suit que le signe de la première des deux quantitez de l'équation lineaire est celui de la somme toute connue qui demeure après la substitution.

## COROLLAIRE IV.

136. SI on multiplie séparément la seconde équation précédente, la 3<sup>e</sup>, la 4<sup>e</sup> & la 5<sup>e</sup>, par la progression arithmetique 4, 3, 2, 1, 0, de maniere que le dernier terme soit multiplié par zero; ou, ce qui est la même chose, si on multiplie séparément chaque terme de ces équations par l'exposant de l'inconnue de ce terme, & le dernier terme par zero; & si après avoir divisé chaque produit par l'inconnue  $x$ , on substitue dans le produit de la seconde la première racine  $a$  au lieu de l'inconnue, la somme toute connue qui restera, sera  $-fgh$ ; c'est-à-dire, le produit de toutes les differences qui sont entre la première racine  $a$  & toutes les autres racines. Si on substitue  $b$  dans le produit de la troisième, la somme toute connue sera  $+fgh$ ; c'est-à-dire, le produit de toutes les differences qui sont entre la seconde racine  $b$  & toutes les autres racines. Si on substitue  $c$  dans le produit de la quatrième, la somme sera  $-fgh$ ; c'est-à-dire, le produit de toutes les differences qui sont entre la troisième racine  $c$  & toutes les autres racines. Enfin si on substitue  $d$  dans le produit de la cinquième, la somme sera  $+fgh$ ; c'est-à-dire, le produit de toutes les differences qui sont entre la quatrième racine  $d$  & toutes les autres racines.

Pour faire la démonstration de ce Corollaire, il n'y a qu'à en faire l'operation.

Seconde équation:

$$\begin{array}{rcll}
 x^4 - 4ax^3 + 6a^2x^2 - 4a^3x + a^4 & = & x^4 - 4ax^3 + 6a^2x^2 - 4a^3x + a^4 & \times 1 \\
 -fx^3 + 3faxx - 3fa^2x + fa^3 & = & +x^3 - 3axx + 3a^2x - a^3 & \times -f \\
 -gx^2 + 3gaxx - 3ga^2x + ga^3 & = & +x^2 - 3axx + 3a^2x - a^3 & \times -g \\
 -hx^2 + 3haxx - 3ha^2x + ha^3 & = & +x^2 - 3axx + 3a^2x - a^3 & \times -h \\
 +fgax - 2fgax + fga^2 & = & +xx - 2ax + aa & \times +fg \\
 +fhax - 2fhax + fha^2 & = & +xx - 2ax + aa & \times +fh \\
 +ghax - 2ghax + gha^2 & = & +xx - 2ax + aa & \times +gh \\
 -fghx + fgha & = & +x - a & \times -fgh
 \end{array}$$

4 3 2 1 0. 4 3 2 1 0.

Produit des termes de l'équation précédente par les termes de la progression arithmétique.

$$\begin{array}{rcl}
 4x^4 - 12ax^3 + 12a^2xx - 4a^3x + 0 & = & 4x^4 - 12ax^3 + 12a^2xx - 4a^3x + 0 \quad \times \quad 1 \\
 - 3fx^3 + 6faxx - 3faax + 0 & = & + 3x^3 - 6axx + 3aax - 0 \quad \times \quad -f \\
 - 3gx^3 + 6gaxx - 3gaax + 0 & = & + 3x^3 - 6axx + 3aax - 0 \quad \times \quad -g \\
 - 3hx^3 + 6haxx - 3haax + 0 & = & + 3x^3 + 6axx + 3aax - 0 \quad \times \quad -h \\
 + 2fgxx - 2fgax + 0 & = & + 2xx - 2ax + 0 \quad \times \quad +fg \\
 + 2fhxx - 2fhax + 0 & = & + 2xx - 2ax + 0 \quad \times \quad +fh \\
 + 2ghxx - 2ghax + 0 & = & + 2xx - 2ax + 0 \quad \times \quad +gh \\
 - fghx + 0 & = & + x - 0 \quad \times \quad -fgh
 \end{array}$$

Divisant tous les termes par  $+x$ , & substituant  $+a$  au lieu de  $x$ , l'on trouve

$$\begin{array}{rcl}
 4a^4 - 12a^3 + 12a^2 - 4a^3 & = & 4a^4 - 12a^3 + 12a^2 - 4a^3 \quad \times \quad 1 \\
 - 3faa + 6faa - 3faa & = & + 3aa - 6aa + 3aa \quad \times \quad -f \\
 - 3gaa + 6gaa - 3gaa & = & + 3aa - 6aa + 3aa \quad \times \quad -g \\
 - 3haa + 6haa - 3haa & = & + 3aa - 6aa + 3aa \quad \times \quad -h \\
 + 2fga - 2fga & = & + 2a - 2a \quad \times \quad +fg \\
 + 2fha - 2fha & = & + 2a - 2a \quad \times \quad +fh \\
 + 2gha - 2gha & = & + 2a - 2a \quad \times \quad +gh \\
 - fgh & = & + 1. \quad \times \quad -fgh
 \end{array}$$

Il est évident que tous les termes se détruisent par des signes oppoiez, & qu'il ne reste que le produit des trois différences  $-fgh$ .

Il est aussi évident qu'en faisant une operation semblable pour la troisième équation, on trouvera le seul reste  $+fgh$ .

Pour la quatrième on trouvera  $-fgh$ .

Pour la cinquième on trouvera  $+fgh$ .

Enfin il est évident que ce Corollaire convient aux équations de tous les degrez, & l'on n'en a pris une du quatrième que pour faire concevoir plus clairement ce Corollaire par un exemple.

Mais il est évident que s'il y a des racines égales dans la proposée, la différence qui est entre les racines égales étant zero, & le produit de zero par les autres différences étant aussi zero, il est, dis-je, évident qu'en substituant chacune des racines égales dans le produit, la somme toute connue sera zero; ainsi la racine égale étant substituée dans le produit, est elle-même une racine de l'équation que forme le produit; puisqu'étant substituée dans le produit à la place de l'inconnue, elle le rend égal à zero.\*

COROLLAIRE V:

## COROLLAIRE V. FONDAMENTAL.

137. **S**I on multiplie tous les termes d'une équation quelconque, de quelque degré qu'elle puisse être, dont toutes les racines sont réelles, positives & inégales, chacun par le nombre qui est l'exposant du degré qu'a l'inconnue dans ce terme, & le dernier terme par zero, & si après avoir divisé tous les termes par l'inconnue  $x$ , l'on substitue dans le produit à la place de l'inconnue, 1<sup>o</sup>. la première, c'est-à-dire, la plus petite racine de l'équation proposée, la somme toute connue qui en viendra étant précisément le produit de toutes les différences qui sont entre la plus petite racine & chacune des autres racines, il s'ensuit que si l'équation est d'un degré impair, par exemple du 5<sup>e</sup> degré, il y aura un nombre pair de différences, par exemple quatre différences, & comme elles ont chacune le signe —, leur produit aura le signe +. Si l'équation est d'un degré pair, comme du quatrième, il y aura un nombre impair de différences, ainsi leur produit aura —.

2<sup>o</sup>. Si on substitue la seconde racine, la somme toute connue étant le produit de toutes les différences qui sont entre la seconde racine & les autres, la différence qui est entre la seconde racine & la première ayant le signe +, & chacune des autres le signe —, leur produit aura le signe opposé à celui du produit précédent.

3<sup>o</sup>. Si on substitue la troisième racine dans le même produit, les différences de cette troisième racine d'avec la première & la seconde ayant chacune le signe +, & chacune des autres différences ayant le signe —, leur produit aura un signe opposé au précédent.

D'où l'on voit que la substitution des racines de l'équation successivement les unes après les autres dans le produit de l'équation multipliée par la progression arithmétique, donnera pour les sommes toutes connues qui en viendront, les signes alternatifs + & — dans les équations des degrés impairs, & — & + dans celles des degrés pairs.

Ce Corollaire est une suite évidente de celui qui précède.

## COROLLAIRE VI.

138. **M**AIS lorsque des grandeurs étant substituées séparément de suite à la place de l'inconnue dans une équation, les som-

mes toutes connues qui viennent de ces substitutions, ont alternativement les signes + & —, ou — & +; ces grandeurs sont les limites des racines de cette équation par le troisième Corollaire du troisième Théorème: Donc les racines d'une équation, dont toutes les racines sont réelles, positives & inégales, sont les limites de l'équation nouvelle qui vient de la multiplication de chaque terme de la première par le nombre qui est l'exposant de l'inconnue de ce terme, & de son dernier terme par zero.

### COROLLAIRE VII. QUI EST FONDAMENTAL.

139. **M**AIS les racines d'une première équation ne sçauroient être les limites des racines d'une seconde, que les racines de la seconde ne soient aussi les limites des racines de la première; par conséquent si on multiplie les termes d'une équation quelconque, dont toutes les racines sont réelles, positives & inégales, chacun par le nombre qui est l'exposant de l'inconnue de ce terme, & le dernier terme par zero, les racines de l'équation qui vient de cette multiplication, sont les limites des racines de l'équation proposée; par exemple supposant que  $x^4 - nx^3 + pxx - qx + r = 0$ , représente une équation dont toutes les racines sont réelles, positives & inégales, si on multiplie chaque terme par l'exposant du degré de l'inconnue de ce terme, & le dernier terme par zero, l'on aura  $4x^4 - 3nx^3 + 2pxx - qx = 0$ ; ou bien divisant par  $x$ ,  $4x^3 - 3nx^2 + 2px - q = 0$ ; les racines de cette dernière équation sont les limites des racines de la proposée.

Ce Corollaire est évident par ce qui précède.

### COROLLAIRE VIII.

140. **Q**UAND les racines de la proposée sont toutes réelles, positives & inégales, les racines de l'équation des limites qui vient de la multiplication de la proposée par les termes de la progression arithmétique, sont aussi toutes réelles, positives & inégales; puisque toutes les substitutions des racines de la proposée à la place de l'inconnue, donnent



des sommes successives qui ont alternativement les signes + & —, ou — & +.

## C O R O L L A I R E IX.

141. **P**AR conséquent s'il y a des racines égales dans l'équation des limites, il y a nécessairement des racines égales dans la proposée : Et comme l'on a démontré dans la dernière Section du 4<sup>e</sup> Livre, \* que quand on multiplie les termes \*74 d'une équation proposée qui a des racines égales, par les termes d'une progression arithmétique, l'équation qui en vient a autant de racines égales moins une que la proposée, il est certain que quand l'équation des limites a des racines égales, l'équation proposée a les mêmes racines égales, & une de plus.

## C O R O L L A I R E X.

142. **S'**IL y a des racines imaginaires dans l'équation des limites, il est certain qu'il y a le même nombre de racines imaginaires (qui sont toujours deux à deux) dans la proposée.

Car si la proposée avoit toutes ses racines réelles, il est évident que l'équation des limites les auroit aussi toutes réelles, puisque si les racines de la proposée étoient toutes réelles, positives & inégales, les racines de l'équation des limites seroient aussi toutes réelles, positives & inégales par le huitième Corollaire ; si la proposée avoit toutes ses racines égales, toutes les racines de l'équation des limites seroient aussi égales & réelles, par le neuvième Corollaire ; si les racines de la proposée étoient en partie égales, & en partie inégales, on prouveroit toujours par les Corollaires précédens, qu'étant substituées par ordre dans l'équation des limites, elles donneroient de suite des sommes toutes connues qui auroient + & —, ou — & +, ou zero, comme on le verra clairement dans les remarques suivantes ; ce qui ne peut convenir qu'à une équation dont toutes les racines sont réelles, par conséquent s'il y a des racines imaginaires dans l'équation des limites, il faut qu'il y ait le même nombre de racines imaginaires dans la proposée. *Ce qu'il falloit démontrer.*

## REMARQUES.

## I.

143. QUAND on multiplie une équation quelconque  
 comme . . .  $x^5 - nx^4 + px^3 - qxx + rx - s = 0$ ,  
 par . . . . .  $\begin{array}{cccccc} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 5x^5 & -4nx^4 & +3px^3 & -2qxx & +rx & -0=0, \end{array}$   
 l'on trouve  
 qui se réduit à  $5x^4 - 4nx^3 + 3pxx - 2qx + r = 0$ ;  
 l'on peut toujours supposer que le produit qui vient de la  
 multiplication est une équation.

Car l'inconnue  $x$  du produit pouvant être considérée  
 comme une indéterminée différente de  $x$ , qui est l'inconnue  
 de la proposée, & étant possible que l'indéterminée  $x$  ait  
 des valeurs propres à faire en sorte que le produit soit égal  
 à zero, en supposant que  $x$  représente dans le produit ces  
 valeurs-là, il est évident que le produit peut être supposé  
 égal à zero.

## I I.

D'où l'on voit que les valeurs de  $x$  dans le produit, c'est-à-dire, que les racines du produit supposé égal à zero, ne sont pas les racines de l'équation proposée, mais elles en sont différentes, à moins qu'il n'y eût des racines égales dans la proposée, qui demeureroient encore toutes dans le produit, excepté une seule.

## I I I.

Il est évident que les termes de la proposée ayant alternativement  $+$  &  $-$ , les termes du produit, qui est l'équation des limites, ont aussi alternativement  $+$  &  $-$ ; par conséquent toutes les racines de l'équation des limites sont aussi positives.

## I V.

L'équation des limites se peut toujours diviser par l'inconnue, parceque le dernier terme de la proposée est multiplié par zero.

Ainsi l'équation des limites a zero pour une de ses racines, mais elle a pour ses racines réelles une racine de moins que la proposée, étant moindre d'un degré, & son dernier terme tout connu a toujours un signe différent de celui du dernier terme de la proposée.

Quand toutes les racines d'une équation, par exemple du cinquième degré, sont réelles, positives & inégales, si l'on substitue sa première racine, c'est-à-dire la plus petite, dans son équation des limites, à la place de l'inconnue, la somme toute connue qui en viendra étant le produit des différences qui sont entre la première racine de la proposée & les autres, chacune de ces différences ayant le signe —, & étant quatre dans notre exemple, leur produit aura le signe +, qui est celui du dernier terme de l'équation des limites.

Si on substitue la seconde racine de la proposée dans l'équation des limites, comme il n'y aura plus que trois différences qui aient chacune le signe —, le produit des différences qui sont entre la seconde racine de la proposée & les autres, aura le signe —, c'est-à-dire le signe opposé au précédent; ainsi la somme toute connue qui viendra de la substitution aura le signe —.

On verra par un semblable raisonnement que la substitution de la troisième racine de la proposée dans l'équation des limites, donnera le signe +; la substitution de la quatrième donnera le signe —.

Et enfin la substitution de la cinquième donnera le signe +.

Cela fait voir que la première racine de la proposée est plus petite que la première racine de l'équation des limites.

Que la seconde racine de la proposée surpasse la première racine de l'équation des limites, mais elle est moindre que la seconde.

Que la troisième racine de la proposée est entre la seconde & la troisième racine de l'équation des limites.

Que la quatrième racine de la proposée est entre la troisième & la quatrième de l'équation des limites, qui est sa plus grande & dernière racine.

Enfin que la cinquième racine de la proposée surpasse la quatrième de l'équation des limites.

## V I.

D'où l'on voit que la première racine réelle de l'équation des limites, est plus grande que la première racine de la proposée, & moindre que la seconde racine de la proposée.

Que la seconde racine de l'équation des limites est entre la seconde & la troisième racine de la proposée.

Que la troisième racine de l'équation des limites est entre la troisième & la quatrième racine de la proposée.

Enfin que la quatrième & dernière racine de l'équation des limites, est entre la quatrième & la cinquième ou dernière racine de la proposée.

## VII.

Par conséquent les racines de l'équation des limites étant prises de suite, sont des grandeurs moyennes entre les racines de la proposée, & sont par conséquent les limites des racines de la proposée qui sont entre la première & la dernière.

## VIII.

\* 47. Mais zero étant toujours moindre que la plus petite des racines de la proposée, & le plus grand coefficient négatif de la proposée, rendu positif, & augmenté d'une grandeur arbitraire comme de l'unité, étant toujours une quantité plus grande que la plus grande des racines positives, \* il est évident qu'en ajoutant zero, & ce plus grand coefficient ainsi augmenté, aux racines de l'équation des limites, l'on aura deux limites pour chacune des racines de la proposée.

## IX.

*Pour les racines égales.*

Quand il y a des racines égales dans la proposée, il peut arriver trois cas; car ou bien, 1°. les racines égales peuvent être moindres que chacune des racines inégales; 2°. ou être plus grandes; 3°. ou bien elles peuvent être plus grandes que quelques racines inégales, & moindres que les autres; par exemple si l'on suppose deux racines égales dans une équation du sixième degré, elles peuvent être, 1°. moindres que les quatre inégales; 2°. ou plus grandes; 3°. ou bien il peut y avoir quelques racines inégales moindres que les égales, & les autres inégales seront plus grandes.

## PREMIER CAS.

L'EQUATION des limites ayant une des deux racines égales de la proposée du sixième degré, la substitution de chacune des racines égales dans l'équation des limites à la place de l'inconnue, donnera zero.

La substitution de la premiere, c'est-à-dire de la plus petite des quatre racines inégales de la proposée dans l'équation des limites, donnera pour la somme toute connue le produit des différences qui sont entre cette premiere racine & toutes les autres, & comme il y a trois racines plus grandes, il y aura trois différences qui auront chacune le signe —, ainsi le produit aura le signe —.

La substitution de la seconde racine inégale de la proposée, dans l'équation des limites, donnera pour la somme toute connue le produit des différences qui sont entre la seconde racine inégale de la proposée & toutes les autres; & comme il y en a deux plus grandes que la seconde, il n'y aura que deux différences qui ayent chacune le signe —, ainsi le produit aura le signe +.

Par un semblable raisonnement on verra que la substitution de la troisième racine inégale de la proposée dans l'équation des limites, donnera une somme qui aura le signe —; & que la substitution de la quatrième ou dernière racine inégale de la proposée, donnera une somme qui aura le signe +.

D'où il suit, 1°. que la quatrième racine inégale de la proposée surpasse la plus grande racine de l'équation des limites; que la troisième racine inégale de la proposée est moindre que la plus grande ou cinquième racine de l'équation des limites, mais elle en surpasse la quatrième; que la seconde racine inégale de la proposée est moindre que la quatrième racine de l'équation des limites, mais elle en surpasse la troisième; enfin que la premiere ou plus petite racine inégale de la proposée est moindre que la troisième racine de l'équation des limites, mais qu'elle surpasse la seconde, c'est-à-dire, celle qui est immédiatement plus grande que la racine égale commune aux deux équations.

2°. Par conséquent la 3<sup>e</sup>, 4<sup>e</sup> & 5<sup>e</sup> racine de l'équation des limites, ont chacune deux limites, elles sont par conséquent réelles; la premiere l'est aussi, étant la racine égale de la proposée: La seconde racine de l'équation des limites est donc aussi une grandeur réelle, puisque les racines imaginaires sont toujours deux à deux.

3°. Il est donc évident que la seconde racine de l'équation des limites est moindre que la premiere racine inégale de la proposée.

Que la troisième racine de l'équation des limites surpasse la première racine inégale de la proposée, & est moindre que la seconde.

Que la quatrième racine de l'équation des limites surpasse la seconde racine inégale de la proposée, & est moindre que la troisième.

Enfin que la cinquième racine de l'équation des limites surpasse la troisième racine inégale, & est moindre que la quatrième ou plus grande racine inégale de la proposée.

4°. Par conséquent les racines de l'équation des limites étant substituées de suite dans la proposée, la première donnera zero; & les autres donneront des sommes qui auront alternativement les signes  $+$  &  $-$ , ou  $-$  &  $+$ , & l'on aura deux limites de chacune des racines inégales de la proposée, en prenant pour dernière limite le plus grand coefficient négatif de la proposée augmenté de l'unité.

## SECOND CAS.

**S**I les deux racines égales sont les plus grandes, & qu'on substitue la première ou la plus petite racine de la proposée dans l'équation des limites, à la place de l'inconnue, on trouvera en raisonnant comme dans le premier cas, qu'elle donnera une somme toute connue qui aura le signe  $-$ , cette somme étant le produit des cinq différences qui sont entre la première racine de la proposée & les cinq autres, & qui ont chacune le signe  $-$ .

La substitution de la seconde racine inégale de la proposée dans l'équation des limites, donnera une somme qui aura le signe  $+$ .

La substitution de la troisième donnera une somme qui aura le signe  $-$ .

La substitution de la quatrième, qui est la plus grande racine inégale, donnera une somme qui aura le signe  $+$ .

La substitution de la cinquième & sixième, qui sont les racines égales, donnera zero.

D'où il suit 1°. que la première ou plus petite racine de la proposée est moindre que la plus petite racine de l'équation des limites.

La seconde racine de la proposée est moyenne entre la première & la seconde racine de l'équation des limites.

Et

Et ainsi de suite jusqu'à la quatrième & plus grande racine inégale de la proposée, qui est moyenne entre la troisième & la quatrième racine de l'équation des limites; & les deux racines égales de la proposée, qui sont la cinquième & la sixième, sont chacune égale à la cinquième racine de l'équation des limites.

2°. Par conséquent la première, la seconde & la troisième racine de l'équation des limites, ont chacune deux limites; ainsi elles sont réelles.

La cinquième est aussi une grandeur réelle, puisque c'est la racine égale de la proposée.

La quatrième racine de l'équation des limites est donc aussi réelle; puisque les racines imaginaires ne peuvent être que deux à deux.

3°. La première racine de l'équation des limites est moyenne entre la première racine de la proposée & la seconde racine.

La seconde racine de l'équation des limites est moyenne entre la seconde & la troisième racine de la proposée.

La troisième racine de l'équation des limites est moyenne entre la troisième & la quatrième racine de la proposée.

Enfin la quatrième racine de l'équation des limites surpasse la quatrième & plus grande racine inégale de la proposée.

Ainsi prenant zero pour la moindre des limites de la proposée, & substituant de suite dans la proposée à la place de l'inconnue, zero, la première, la seconde, la troisième, la quatrième racine de l'équation des limites, les sommes toutes connues qui en viendront auront alternativement — & +, ou + & —; & l'on aura deux limites pour chacune des racines inégales de la proposée.

### T R O I S I È M E C A S.

**L**O R S Q U ' I L y a des racines inégales dans la proposée, moindres que les racines égales, par exemple deux, & qu'il y a encore d'autres racines inégales plus grandes que les racines égales, par exemple deux, il est toujours évident qu'en substituant la première, c'est-à-dire la plus petite des racines inégales de la proposée, à la place de l'inconnue dans l'équation des limites, la somme toute connue qui

en viendra, aura le signe — ; puisqu'elle est le produit des cinq différences qui sont entre la première racine & les cinq autres de la proposée, lesquelles différences ont chacune le signe —.

Si on substitue la seconde racine inégale de la proposée, la somme qui en viendra aura le signe +, étant le produit des cinq différences qui sont entre la seconde racine & toutes les autres, desquelles différences la première a le signe +, & chaque autre le signe —.

Si on substitue la troisième & la quatrième racine de la proposée, elles donneront zero ; parceque ce sont les deux racines égales.

Si on substitue la cinquième racine de la proposée, qui est la troisième des inégales, la somme aura le signe —, parcequ'elle est le produit des cinq différences qui sont entre la cinquième racine de la proposée & toutes les autres, dont une seule a le signe —, & toutes les autres le signe +.

Enfin si on substitue la sixième racine de la proposée, qui est la quatrième des inégales, la somme aura le signe +.

D'où il suit, 1°. que la première ou la plus petite des racines de la proposée est moindre que la première racine de l'équation des limites.

La seconde racine de la proposée surpasse la première racine de l'équation des limites, & elle est moindre que la seconde.

La troisième & la quatrième racine de la proposée sont égales à la troisième de l'équation des limites ; puisqu'elles donnent zero.

La cinquième racine de la proposée surpasse la quatrième racine de l'équation des limites, mais elle est moindre que la cinquième.

Enfin la sixième racine de la proposée surpasse la cinquième & plus grande racine de l'équation des limites.

2°. Par conséquent la première racine de l'équation des limites a deux limites ; la troisième est la racine égale commune aux deux équations.

La cinquième racine de l'équation des limites a deux limites, qui sont la cinquième & sixième racine de la proposée.

Ces trois racines de l'équation des limites sont donc réelles.



La seconde & la quatrième le sont aussi, car il est impossible qu'elles soient imaginaires, étant impossible qu'il y ait une grandeur réelle entre deux racines imaginaires, qui donne zero, & la troisième & quatrième racine de la proposée donnent zero, & sont entre la seconde & la quatrième racine de l'équation des limites.

Ainsi toutes les racines de l'équation des limites sont réelles.

3°. La première ou plus petite racine de l'équation des limites est donc moyenne entre la première & la seconde racine de la proposée.

La seconde racine de l'équation des limites surpasse la seconde racine de la proposée.

Ainsi en prenant zero pour la moindre limite de la première racine de la proposée, l'on a les limites de la première & de la seconde racine inégale de la proposée.

La troisième racine de l'équation des limites est la troisième & la quatrième de la proposée.

La quatrième racine de l'équation des limites est moindre que la cinquième racine de la proposée.

La cinquième racine de l'équation des limites est moyenne entre la cinquième & la sixième racine de la proposée.

Ainsi en prenant le plus grand coefficient négatif de la proposée augmenté de l'unité, l'on aura toutes les limites des racines de la proposée.

X.

*Pour les racines imaginaires.*

IL est donc évident que quand toutes les racines d'une équation proposée sont réelles & positives, toutes les racines de l'équation des limites le sont aussi. Par conséquent s'il y a des racines imaginaires dans l'équation des limites, qui ne peuvent être que deux à deux, il y a autant de racines imaginaires dans la proposée.

Mais il faut remarquer que quand toutes les racines de l'équation des limites sont réelles, ce n'est pas une marque assurée qu'il n'y ait point de racines imaginaires dans la proposée, comme on le voit dans cet exemple.

Soit l'équation du second degré  $xx - 2ax + aa = 0$ ,

+ ff

P p ij

dont deux racines sont imaginaires : qu'on la multiplie par l'équation lineaire  $x - a - g = 0$  ; le produit est une équation du troisieme degré  $x^3 - 3axx + 3aax - a^3 = 0$ , dont deux racines sont imaginaires. Qu'on multiplie chaque terme du produit par l'exposant du degré de l'inconnue de ce terme, & le dernier terme par zero ; on aura l'équation des limites, qui étant divisée par  $3x$ , donne l'équation du 2<sup>e</sup> degré, qui est l'équation des limites, dans laquelle, si l'on suppose que le dernier terme  $+aa + \frac{2}{3}ag + \frac{1}{3}ff$  est moindre que le quarré de la moitié du coefficient  $-2a - \frac{1}{3}g$  du 2<sup>e</sup> terme, qui est  $+aa + \frac{2}{3}ag + \frac{1}{3}gg$ , ou qu'il lui est égal ; il est certain que les deux racines de cette équation du second degré, qui est l'équation des limites, seront toutes deux réelles & positives : Mais il est évident que le dernier terme  $+aa + \frac{2}{3}ag + \frac{1}{3}ff$ , sera moindre que  $aa + \frac{2}{3}ag + \frac{1}{3}gg$ , si  $\sqrt{\frac{1}{3}ff}$  est moindre que  $\sqrt{\frac{1}{3}gg} = \frac{1}{3}g$ .

Ainsi, dans ce cas l'équation des limites aura toutes ses racines réelles, & cependant l'équation proposée aura deux de ses racines imaginaires.

En voici un exemple en nombres. Soit  $xx - 6x + 9 = 0$ , dont les racines sont imaginaires. Qu'on la multiplie par l'équation lineaire  $x - 9 = 0$ ,

on aura l'équation du 3<sup>e</sup> degré  $x^3 - 15xx + 64x - 90 = 0$ , dont deux racines sont imaginaires. Qu'on la multiplie par la progression arithmetique, on aura le produit  $3x^3 - 30xx + 64x = 0$ , qui étant divisé par  $3x$ , se réduit à  $xx - 10x + 21\frac{1}{3} = 0$ , dont les deux racines sont réelles, l'une étant  $x = 5 + \sqrt{3\frac{2}{3}}$ , & l'autre étant  $x = 5 - \sqrt{3\frac{2}{3}}$ .

## COROLLAIRE XI.

144. **A**P R È S les remarques précédentes, il est évident qu'en prenant zero pour la plus petite des limites des racines d'une équation quelconque, dont tous les termes ont alternativement  $+$  &  $-$ , & le plus grand coefficient négatif de cette équation, augmenté d'une unité ou d'un plus grand nombre, pour la plus grande des limites, & les racines de l'équation des limites pour les limites moyennes; l'on aura toutes les limites des racines de la proposée, deux limites pour chacune.

Zero & la premiere racine de l'équation des limites, seront les limites de la premiere racine de la proposée.

La premiere & la seconde racine de l'équation des limites, seront les limites de la seconde racine de la proposée.

La seconde & la troisième racine de l'équation des limites, seront les limites de la troisième racine de la proposée.

Et ainsi de suite jusqu'à la dernière racine de l'équation des limites; cette dernière racine & le plus grand coefficient négatif de la proposée, augmenté de l'unité ou d'un autre nombre, seront les limites de la dernière racine de la proposée.

Ainsi zero étant substitué à la place de l'inconnue dans la proposée, la somme toute connue qui en viendra sera le dernier terme de la proposée, avec son signe qui est  $+$  dans les équations des degrez pairs, &  $-$  dans les équations des degrez impairs.

La premiere racine de l'équation des limites étant ensuite substituée dans la proposée à la place de l'inconnue, la somme aura un signe opposé au précédent.

La seconde racine de l'équation des limites étant ensuite substituée dans la proposée, la somme toute connue aura un signe opposé au précédent, & ainsi de suite.

## COROLLAIRE XII.

145. **L**O R S Q'U N E des racines de l'équation des limites étant substituée dans la proposée, donne zero, il y a deux racines égales dans la proposée.

Si plusieurs racines différentes de l'équation des limites, étant substituées, donnent zero, il y a deux fois autant de racines égales, deux à deux, dans la proposée.\*

P p iij

\* 74-

## COROLLAIRE XIII.

146. **L**ORSQU'UNE des racines de l'équation des limites étant substituée dans la proposée à la place de l'inconnue, la somme qui en vient n'a pas le signe qu'elle devoit avoir, & n'est pas zero, il y a deux racines imaginaires dans la proposée.

Si plusieurs racines de l'équation des limites étant substituées dans la proposée, les sommes qui en viennent n'ont pas le signe qu'elles devoient avoir, si les racines de la proposée étoient toutes réelles, ou ne sont pas zero, il y aura deux fois autant de racines imaginaires dans la proposée, que l'on trouvera de fois des signes contraires à ceux qu'on devoit trouver.

Ainsi si l'on trouve deux fois que les racines de l'équation des limites étant substituées dans la proposée, donnent des signes contraires à ceux qu'elles devoient donner, il y a quatre racines imaginaires dans la proposée.

## COROLLAIRE XIV.

147. **L**'EQUATION des limites pouvant elle-même être considérée comme une équation principale, si on en multiplie chaque terme par l'exposant du degré de l'inconnue de ce terme, & le dernier terme par zero, le produit sera son équation des limites, à qui il faudra appliquer tout ce qu'on a dit de l'équation des limites : Et si on continue de multiplier chaque terme de cette nouvelle équation des limites par l'exposant du degré de l'inconnue de ce terme, & le dernier terme par zero, on aura l'équation des limites de l'équation précédente, en continuant cette opération jusqu'à ce qu'on soit arrivé à une équation lineaire, l'on aura toutes les limites des racines de toutes ces équations des limites.

Car la racine de l'équation lineaire avec zero & le plus grand coefficient négatif de l'équation des limites du second degré, augmenté de l'unité, seront les limites des racines de cette équation du second degré.

Les racines de celle-ci avec zero & le plus grand coefficient négatif de l'équation du troisième degré, augmenté de l'unité, seront les limites de l'équation des limites du troisième degré, & ainsi de suite jusqu'à l'équation proposée.

## S E C T I O N I I.

*Où l'on explique la méthode de trouver les limites des racines d'une équation numérique quelconque.*

## P R O B L È M E I.

148. *TROUVER les limites par ordre de toutes les racines d'une équation numérique quelconque.*

ON suppose que l'équation est sans fractions, que son premier terme n'a pas d'autre coefficient que l'unité, & que tous les termes ont alternativement les signes + & —. On a vu dans le troisième Livre les moyens de lui donner ces préparations:

1°. Il faut multiplier chaque terme de l'équation proposée par le nombre qui est l'exposant du degré de l'inconnue de ce terme, & multiplier le dernier terme par zero. Il faut diviser le produit par l'inconnue lineaire, & il sera l'équation des limites de la proposée, moindre d'un degré que la proposée, & dont toutes les racines prises de suite seront les limites des racines de la proposée. Il faut multiplier chaque terme de cette première équation des limites par l'exposant du degré de l'inconnue de ce terme, & le dernier terme par zero; & le produit étant divisé par deux fois l'inconnue (car on trouvera que tous les termes se peuvent diviser par  $2x$ ) sera la seconde équation des limites, dont les racines seront les limites de la précédente. Il faut multiplier chaque terme de cette seconde équation des limites par l'exposant du degré de l'inconnue, & le dernier terme par zero; & parcequ'on trouvera que chaque terme se peut diviser par  $3x$ , il faut diviser le produit par  $3x$ ; & l'on aura la troisième équation des limites, dont les racines seront les limites de la précédente. On continuera d'opérer de cette manière jusqu'à ce qu'on soit arrivé à une équation lineaire; ce sera la dernière équation des limites.

2°. Il faudra prendre zero pour la moindre limite de l'équation du second degré, la racine de l'équation lineaire pour la seconde limite; & le plus grand coefficient négatif augmenté de l'unité ou d'un nombre arbitraire, pour la troi-

sième & plus grande limite de la même équation du second degré ; & l'on aura ainsi toutes les limites des racines de l'équation du second degré.

Il faudra prendre pour les limites des racines de l'équation du troisième degré, zero, les deux racines de l'équation du second degré, & le plus grand coefficient négatif de l'équation du troisième degré, augmenté de l'unité ; & l'on aura ainsi toutes les limites des racines de l'équation du troisième degré, deux limites pour chacune.

Il faudra prendre de même zero, les racines de l'équation du troisième degré, & le plus grand coefficient négatif de l'équation du quatrième degré, augmenté de l'unité ou d'un autre nombre, pour les limites de l'équation des limites du quatrième degré ; & l'on aura ainsi deux limites pour chaque racine de cette équation.

Il faudra faire la même chose pour les équations suivantes jusqu'à la proposée, dont zero, les racines de la première équation des limites, & le plus grand coefficient négatif de la proposée, augmenté de l'unité ou d'un autre nombre, seront les limites, & il y en aura deux pour chacune des racines de la proposée.

On enseignera dans la Section suivante la manière de trouver chaque racine d'une équation, lorsqu'on en a les deux limites.

*Pour les racines égales.*

**QUAND** une des racines d'une des équations des limites étant substituée dans toutes les équations qui la précèdent, donne zero au lieu de donner une somme qui ait le + ou le —, qu'elle doit avoir, il y a dans ce cas des racines égales dans la proposée, Voici la manière d'en déterminer le nombre.

Si une seule des racines de la première équation des limites étant substituée dans la proposée, donne zero, il y a deux racines égales dans la proposée.

Si deux racines étoient égales dans la première équation des limites, & donnoient zero étant substituées dans la proposée, il y auroit trois racines égales dans la proposée ; & ainsi de suite.

Si deux racines de l'équation des limites, quoiqu'inégales entr'elles, étoient aussi les racines de la proposée, elle auroit quatre racines égales, deux à deux.

Si

Si une des racines de la seconde équation des limites étant substituée dans la première équation des limites, & dans la proposée, donne zero, il y a trois racines égales dans la proposée.

S'il y avoit deux racines égales dans la seconde équation des limites, & qu'elles donnassent zero étant substituées dans les précédentes, il y auroit quatre racines égales dans la proposée ; & ainsi de suite.

Si une des racines de la troisième équation des limites étant substituée dans la seconde, & dans les précédentes, donne zero, il y a quatre racines égales dans la proposée ; & ainsi des autres qui suivent la troisième équation des limites, jusqu'à l'équation lineaire, dont la racine étant substituée dans l'équation des limites du second degré & dans les autres qui la précédent, si elle donne zero, toutes les racines de la proposée seront égales.

Tout ce qu'on vient de dire des racines égales est une suite évidente de ce qu'on en a démontré dans la dernière Section du quatrième Livre.

Quand on trouve par la méthode de ce Problème, que la proposée contient des racines égales, le plus court est de diviser la proposée par l'équation composée de toutes les racines égales, & l'on aura un quotient qui contiendra les seules racines inégales de la proposée, dont on trouvera les limites par le premier article.

*Pour les racines imaginaires.*

QUAND une racine d'une des équations des limites étant substituée à la place de l'inconnue dans l'équation qui la précède immédiatement, & dont ses racines sont les limites, la somme qui en vient n'a pas le signe + ou —, qu'elle devroit avoir si les racines étoient toutes réelles & inégales, & que cette somme n'est pas zero ; dans ce cas il y a deux racines imaginaires dans l'équation qui la précède, & dans toutes les autres équations des limites qui la précédent, jusqu'à la proposée, qui a aussi deux racines imaginaires.

Si deux racines d'une des équations des limites ne donnoient dans celle qui la précède immédiatement, ni le signe qu'elles doivent donner, ni zero, il y auroit quatre racines imaginaires dans la proposée, & ainsi de suite.

Les autres racines réelles de l'équation qui précède n'au-

roient pas moins leurs limites, il y en auroit deux pour chacune, en prenant zero pour la moindre, le plus grand coefficient négatif augmenté de l'unité, pour la plus grande, & les autres racines de l'équation des limites, dont on parle, pour les limites moyennes.

Toute cette méthode est une suite évidente de tout ce qui précède.

*Application du Problème à des exemples.*

### E X E M P L E I.

POUR trouver les limites des racines de l'équation du troisième degré . . .  $x^3 - 114xx + 3744x - 30240 = 0$ ,

1<sup>o</sup>. On multipliera ses

termes par . . .  $\begin{array}{cccc} 3 & 2 & 1 & 0; \end{array}$

on divisera le produit  $3x^3 - 228xx + 3744x = 0$ ,

par  $x$ , & l'on aura

l'équation des limites  $3xx - 228x + 3744 = 0$ .

On multipliera ses

termes par . . .  $\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 0, \end{array}$

& l'on aura le pro-

duit . . .  $6xx - 228x = 0$ ,

qui étant divisé par

$6x$ , donnera . . .  $x - 38 = 0$ ,

qui est la dernière équation des limites, ou l'équation linéaire des limites.

2<sup>o</sup>. Pour avoir à présent les limites, l'on ôtera le coefficient du premier terme de l'équation des limites du second degré  $3xx - 228x + 3744 = 0$ ; ce qui se fera ici en divisant chaque terme par 3, & l'on aura  $xx - 76x + 1248 = 0$ , pour l'équation des limites du second degré.

Zero & la racine  $+ 38$  de l'équation linéaire, seront les limites de la 1<sup>re</sup> racine de l'équation  $xx - 76x + 1248 = 0$ .

$+ 38$  &  $+ 77$ , qui est le plus grand coefficient négatif de cette équation augmenté de l'unité, seront les limites de la seconde racine.

Ainsi en substituant zero au lieu de  $x$  dans l'équation  $xx - 76x + 1248 = 0$ , l'on aura  $+ 1248$ .

En substituant la seconde limite 38, on aura  $- 196$ .

En substituant la troisième limite  $+ 77$ , on aura  $+ 1325$ .

Et l'on trouvera par les méthodes de la Section suivante, que les deux racines de  $xx - 76x + 1248 = 0$ , sont 24 & 52.



Ainsi zero & 24 sont les limites de la premiere racine de la proposée  $x^3 - 114xx + 3744x - 30240 = 0$ , c'est-à-dire, la premiere racine de la proposée est entre zero & 24; & en substituant zero au lieu de l'inconnue  $x$  dans la proposée, la somme toute connue qui en viendra, aura le signe —; en substituant 24, la somme aura +.

24 & 52 sont les limites de la seconde racine de la proposée, & en substituant 52, la somme aura —.

Enfin 52 & le plus grand coefficient négatif de la proposée, augmenté de l'unité, qui est 30241, sont les limites de la troisième racine de la proposée; & en substituant 30241, la somme qui en viendra aura +.

L'on a donc les limites de toutes les racines de la proposée, deux limites pour chacune; *ce qu'il falloit trouver.*

*Second exemple où il y a des racines égales.*

P O U R trouver les limites des racines de cette équation du troisième degré . . .  $x^3 - 30xx + 288x - 864 = 0$ ,

1°. on multipliera ses

termes par . . . . . 3      2      1      0,

& l'on aura la premiere

équation des limites . . .  $3x^3 - 60xx + 288x = 0$ ,

qui étant divisée par  $x$ ,

donnera . . . . .  $3xx - 60x + 288 = 0$ ,

multipliant cette équation

par . . . . . 2      1      0

l'on aura la derniere

équation des limites . . .  $6xx - 60x = 0$ ,

qui étant divisée par  $6x$ ,

se réduit à l'équation

linéaire . . . . .  $x - 10 = 0$ .

2°. Pour avoir les limites de l'équation du second degré  $3xx - 60x + 288 = 0$ , on divisera ses termes par 3, & l'on aura  $xx - 20x + 96 = 0$  pour la premiere équation des limites. Les limites de la premiere racine de  $xx - 20x + 96 = 0$ , sont zero & la racine 10 de la derniere équation des limites. Les limites de la seconde racine de  $xx - 20x + 96 = 0$ , sont 10 & son plus grand coefficient négatif augmenté de l'unité, qui est 21. On trouvera par les méthodes de la Section suivante, que les racines de la

première équation des limites  $xx - 20x + 96 = 0$ , sont 8 & 12.

Ainsi 0, 8, 12, 865, sont les limites des racines de la proposée : mais parcequ'on trouve que 12 étant substitué dans la proposée à la place de  $x$ , la somme qui en vient est zero, & qu'ainsi 12 en est une racine ; la proposée a deux racines égales 12, 12, & il ne lui reste plus qu'une racine inégale, dont les limites sont 0 & 8.

Mais le plus court est de diviser la proposée par l'équation composée des deux racines égales 12 & 12, qui est  $xx - 24x + 144 = 0$ , & le quotient  $x - 6 = 0$ , contiendra la racine inégale.

*Troisième exemple où il y a des racines imaginaires.*

**P**OUR trouver les limites des racines de cette équation du quatrième degré  $x^4 - 76x^3 + 1872xx - 15120x + 35136 = 0$ , 1<sup>o</sup>. on multipliera ses

termes par . . . 4 . . . 3 . . . 2 . . . 1 . . . 0,

& l'on aura la 1<sup>re</sup> 

---

équation des limites  $4x^4 - 228x^3 + 3744xx - 15120x = 0$ ,

qui se réduit en di-

visant par  $4x$  à . . .  $x^3 - 57xx + 936x - 3780 = 0$ .

On multipliera cette

équation par . . . 3 . . . 2 . . . 1 . . . 0,

& on aura la seconde 

---

équation des limites  $3x^3 - 114xx + 936x = 0$ ,

qui étant divisée par

$3x$ , se réduit à . . .  $xx - 38x + 312 = 0$ ,

On multipliera cette

équation par . . . 2 . . . 1 . . . 0,

& on aura la dernière 

---

équation des limites  $2xx - 38x = 0$ ,

qui étant divisée par

$2x$ , se réduit à l'équa-

tion lineaire . . .  $x - 19 = 0$ .

2<sup>o</sup>. Pour avoir les limites des deux racines de l'équation des limites du 2<sup>e</sup> degré  $xx - 38x + 312 = 0$ , on prendra zero pour première limite ; la racine 19 de l'équation lineaire des limites  $x - 19 = 0$ , pour seconde limite ; & le plus grand coëfficient négatif de l'équation  $xx - 38x + 312 = 0$ ,

augmenté de l'unité, qui est 39, pour la troisième limite. Ainsi les trois limites seront 0, 19, 39.

On trouvera par les méthodes de la Section suivante, en se servant de ces limites, que les deux racines de la seconde équation des limites  $xx - 38x + 312 = 0$ , sont 12 & 26.

Ainsi les limites de la première équation des limites  $x^3 - 57xx + 936x - 3780 = 0$ , seront 0, 12, 26, 3781, par le moyen desquelles on trouvera que les racines de la première équation des limites  $x^3 - 57xx + 936x - 3780 = 0$ , sont 6, 21, 30.

Par conséquent les limites des racines de la proposée  $x^4 - 76x^3 + 1872xx - 15120x + 35136 = 0$ , sont 0, 6, 21, 30, 15121. *Ce qu'il falloit trouver.*

En substituant zero dans la proposée au lieu de  $x$ , la somme toute connue qui en vient est le dernier terme, & elle a le signe +.

En substituant la seconde limite 6, la somme a le signe —.

En substituant la troisième limite 21, la somme a le signe +.

En substituant la quatrième limite 30, la somme qui devoit avoir le signe —, a encore le signe +. C'est une marque certaine qu'il y a deux racines imaginaires dans la proposée, & deux racines réelles, dont on trouvera par les méthodes de la Section suivante, que la première est 4, & que la seconde est incommensurable, plus grande que 8, & moindre que 9.

## R E M A R Q U E.

**P**OUR faire concevoir clairement la méthode du Problème, on a choisi des exemples dont les équations des limites eussent ces deux conditions: 1°. qu'elles se trouvassent sans fractions, le coefficient de leur premier terme étant un diviseur exact de tous les autres termes: 2°. que toutes les racines des équations des limites fussent commensurables. Quand ces deux conditions ne se trouvent pas, qui est le cas le plus ordinaire, on verra à la fin de la Section suivante le moyen de trouver, nonobstant cela, les limites qu'on cherche.

## PROBLÈME II.

149. QUAND on a les limites des racines d'une équation, trouver les limites des racines de toute équation en laquelle on transformera la première.

PAR exemple on a l'équation  $x^3 - 114xx + 3744x - 30140 = 0$ , dont on connoît les limites 0, 24, 52, 24241; on veut la transformer en une autre, soit en supposant par exemple  $x - 10 = y$ , qui se réduit à  $x = y + 10$ ,  
ou  $x + 10 = y$   $x = y - 10$ ,  
ou  $10 - x = y$   $x = 10 - y$ ,  
ou  $10x = y$   $x = \frac{y}{10}$ ,  
ou  $\frac{x}{10} = y$   $x = 10y$ ,

ou enfin de quelque autre manière qu'on voudra. Substituant ensuite la valeur de  $x$  prise dans quelque'une de ces équations où  $x$  est linéaire, au lieu de  $x$  dans la proposée, l'équation qui en naîtra sera la transformée.

Pour avoir les limites des racines de la transformée, il faut substituer les limites successivement à la place de  $x$  dans l'équation où  $x$  est linéaire, & qui a servi à faire la transformation; & les valeurs de  $y$  toutes connues qui viendront de ces substitutions, seront les limites des racines de la transformée; par exemple en substituant 0 à la place de  $x$  dans l'équation  $x - 10 = y$ , on aura  $0 - 10 = y$ ; ainsi la première limite de la transformée sera  $-10$ .

En substituant 24, on aura la seconde limite  $24 - 10 = 14 = y$ .

En substituant 52, on aura  $52 - 10 = 42 = y$ , ainsi la troisième limite de la transformée sera 42.

Il en est de même des autres transformations.

## DÉMONSTRATION.

- \* 36. IL est évident par la transformation, \* que les racines de la transformée sont les racines mêmes de la proposée, diminuées ou augmentées de la grandeur connue 10, ou de telle autre qu'on voudra, ou multipliées ou divisées par cette même grandeur, &c. Par conséquent si l'on diminue, ou si l'on augmente, ou si l'on multiplie, ou si l'on divise, &c. chaque limite de la proposée de la même manière, il est

visible que les grandeurs qui en viendront, seront les limites des racines de la transformée, c'est à-dire, ces racines seront des grandeurs moyennes entre ces limites.

Mais en substituant chaque limite des racines de la proposée à la place de  $x$ , dans l'équation qui a servi à la transformation, dans laquelle équation  $x$  est lineaire, il est évident que les limites de la proposée sont diminuées ou augmentées de la grandeur, par exemple 10, dont les racines de la proposée sont diminuées ou augmentées dans la transformée, ou bien qu'elles sont multipliées ou divisées, &c. par la même grandeur 10, par laquelle les racines de la proposée sont multipliées ou divisées, &c. dans la transformée. Les grandeurs qu'on trouve par ce Problème sont donc les limites de la transformée.

## C O R O L L A I R E.

SI l'on transforme une équation proposée  $x^3 - 114xx$ , &c. en une autre dont les racines soient celles de la proposée, diminuées chacune d'une des limites des racines de la proposée, par exemple de 24, qui est la plus petite des deux limites de la seconde racine de la proposée, en supposant  $x - 24 = y$ ; il est évident que la plus petite des deux limites de la seconde racine de la transformée sera zero; la seconde limite sera la différence qui est entre la limite 24 & la limite suivante 52, c'est à-dire la seconde limite sera 28; &c. les limites des racines suivantes de la transformée, si elle en a plusieurs, seront les différences qui se trouvent entre la limite 24 & chacune des limites suivantes de la proposée.

## R E M A R Q U E S.

I.

QUAND on trouve par le Problème précédent une grandeur négative pour la première limite de la première racine d'une transformée, comme on a trouvé la grandeur négative  $-10$ , il faut prendre zero pour première limite de la première racine de la transformée, & non pas la grandeur négative  $-10$ : Cela est plus commode dans la pratique.

I I.

Quand toutes les racines d'une équation sont positives, ou toutes négatives & réelles, comme le coefficient du second

terme en est la somme, si l'on prend le tiers de ce coefficient, si elle est du troisième degré, le quart si elle est du 4<sup>e</sup> degré, & ainsi de suite; cette grandeur sera une limite moyenne, au moins entre la plus petite & la plus grande des racines.

Ainsi la plus petite des racines est entre zero & cette limite moyenne; & la plus grande des racines est entre cette limite moyenne & le plus grand coefficient négatif de la proposée, augmenté de l'unité ou d'un autre nombre.

On pourra trouver la plus petite & la plus grande racine de la proposée en se servant de ces limites par les méthodes de la Section suivante.

#### AVERTISSEMENT.

CEUX qui commencent & ceux qui ne savent pas le calcul des différences, doivent passer à la Section suivante.

#### THEOREME X.

150. *LES racines de l'équation des limites formée par la méthode du premier Problème, sont les véritables limites des racines de la proposée dont elle est l'équation des limites, c'est-à-dire, elles sont les véritables limites moyennes entre la plus petite & la plus grande racine de la proposée.*

POUR bien entendre ce Theorème, il faut remarquer, 1<sup>o</sup>. que dans une équation proposée comme  $xx - 76x + 1248 = 0$ , dont les racines sont 24 & 52, toutes les grandeurs qui sont entre 24 & 52, comme 25, 26, 27, 28, &c. sont des grandeurs moyennes, ou des limites entre la première racine 24 & la seconde racine 52; & que la substitution de chacune de ces grandeurs à la place de  $x$  dans la proposée, donnera différentes sommes toutes connues, dont chacune aura toujours le même signe —.

2<sup>o</sup>. Que les sommes toutes connues qui naissent de la substitution de + 25, 26, 27, &c. sont toujours en augmentant, c'est-à-dire, celle qui vient de la substitution de 25 est moindre que celle qui vient de la substitution de 26, & celle-ci moindre que celle qui vient de la substitution de 27; & elles vont ainsi en augmentant jusqu'à la substitution de la limite 38 trouvée par le premier Problème, qui donne une somme qui est la plus grande de toutes.

Et

Et substituant ensuite 39, 40, 41, 42 & les autres nombres suivans, les sommes toutes connues qui naissent des substitutions vont en diminuant, celle qui vient de la substitution de 39 étant plus grande que celle qui vient de la substitution de 40, & celle-ci plus grande que celle qui vient de la substitution de 41, & ainsi de suite jusqu'à la substitution de la racine 52 qui donne zero.

Or j'appelle *la veritable limite* la grandeur 38, qui est celle de toutes les limites qui sont entre la racine 24 & la racine 52, qui étant substituée dans la proposée, donne la plus grande somme toute connue, les autres limites donnant chacune de moindres sommes toutes connues : Et je dis que les limites qu'on trouve par le Problème, c'est-à-dire les racines de l'équation des limites, sont les veritables limites moyennes des racines de la proposée entre la premiere & la derniere racine de la proposée ; c'est-à-dire, qu'étant substituées dans la proposée, les sommes toutes connues qui en viennent, sont plus grandes que celles qui viennent de la substitution des autres limites, qui ne sont pas celles que j'appelle les veritables, & lesquelles veritables limites se trouvent par le premier Problème.

Pour le démontrer, 1<sup>o</sup>. il faut supposer dans le second membre d'une équation proposée, comme  $x^3 - 114xx + 3744x - 30240 = 0$ , dont les racines sont 12, 42, 60, au lieu de zero, une grandeur indéterminée  $y$ , & l'on aura  $x^3 - 114xx + 3744x - 30240 = y$ .

2<sup>o</sup>. Il faut concevoir distinctement que  $x$  représentant tous les nombres imaginables qu'on peut substituer à sa place dans le premier membre,  $y$  représente toutes les sommes connues qui naîtront de la substitution de chacune de ces grandeurs à la place de  $x$ .

Et pour concevoir distinctement toutes ces grandeurs que représente  $y$ , il faut commencer par la substitution de zero à la place de  $x$  ; & allant successivement par ordre, il faut concevoir qu'on substitue à la place de  $x$ , après la substitution de zero, un nombre si petit qu'il differe de zero moins qu'aucune grandeur donnée, quelque petite qu'elle puisse être, & cette grandeur moindre qu'aucune grandeur donnée, est ce qu'on appelle une *grandeur infiniment petite*, ou une *différence*.

Il faut ensuite concevoir qu'on substitue après la grandeur précédente une autre grandeur plus grande, mais qui ne surpasse la précédente que d'une grandeur infiniment petite, ou d'une différence.

Concevant ainsi de suite qu'on substitue des grandeurs par ordre qui ne se surpassent que d'une grandeur infiniment petite, on concevra en même temps que les sommes toutes connues qui naissent par ordre de ces substitutions, vont toujours en diminuant, & sont représentées par  $y$ , & que le premier  $y$  surpasse le second d'une grandeur infiniment petite, le second surpasse le troisième d'une grandeur infiniment petite, & ainsi de suite jusqu'à ce que concevant que la première racine de la proposée  $x^3 - 114xx + 3744x - 30240 = y$ , qui est 12, étant substituée à la place de  $x$ , la somme toute connue qui en vient est zero; ainsi  $y$  représente alors zero, & n'est aucune grandeur réelle.

Continuant de concevoir qu'on substitue à la place de  $x$  un nombre qui surpasse la première racine 12 d'une grandeur infiniment petite, & ensuite une autre qui surpasse le précédent d'une différence, & ainsi de suite, on concevra en même temps que  $y$ , qui est toujours égale à chaque somme toute connue qui vient de chacune de ces substitutions, devient encore une grandeur réelle qui va en augmentant d'une grandeur infiniment petite, jusqu'à ce que concevant qu'on substitue la première limite qui est 24,  $y$  devient la plus grande somme toute connue que puissent donner les substitutions successives de chacun de tous les membres qui sont entre la première racine 12 & la seconde racine 42.

Et concevant qu'on substitue ensuite une grandeur qui surpasse la véritable limite 24 d'une différence, & ensuite une autre qui surpasse la précédente d'une différence, & ainsi de suite,  $y$  représentera les sommes toutes connues qui naissent de ces substitutions, qui vont en diminuant, & dont chacune surpasse celle qui la suit d'une différence, jusqu'à ce que concevant que l'on substitue à la place de  $x$  la seconde racine 42, l'on conçoive en même temps que la somme toute connue qui naît de cette substitution est zero, & qu'ainsi  $y$  représente alors zero, & n'est aucune quantité réelle.



On continuera le même raisonnement sur les substitutions des grandeurs qui sont entre la seconde racine 42 & la troisième racine 60, & sur les sommes représentées par  $y$  qui en naîtront ; & ainsi de suite dans les équations des degrez plus élevez ; & ensuite

3°. On remarquera que dans les substitutions des grandeurs qui sont entre deux racines de la proposée, par exemple des grandeurs qui sont entre la première racine 12 & la seconde 42, à la place de  $x$ , les  $y$ , c'est à-dire les grandeurs que représente  $y$ , vont toujours en augmentant d'une différence jusqu'à la substitution de la véritable limite 24.

Que dans la substitution de 24, l'augmentation cesse, c'est à-dire qu'elle est nulle ou égale à zero, & qu'ainsi la différence de  $y$  est nulle dans cette substitution.

Et qu'enfin dans la substitution des grandeurs suivantes, jusqu'à celle de la racine 42, au lieu d'augmentation, c'est une diminution, & les  $y$  vont en diminuant jusqu'à ce qu'ils deviennent zero dans la substitution de la seconde racine 42.

D'où il suit, pour la démonstration du 10<sup>e</sup> Theorème, que lorsque l'augmentation ou la différence de  $y$  est égale à zero, alors la valeur de  $x$  est celle qui étant substituée à sa place dans la proposée, donne une somme qui est la plus grande de toutes celles que donne la substitution des autres grandeurs moyennes entre deux racines, & que cette valeur de  $x$  est la véritable limite entre ces deux racines.

Pour trouver donc les véritables limites des racines, il ne faut que prendre la grandeur qui exprime la différence de  $y$ , la supposer égale à zero, & les racines de l'équation qui naîtra de cette substitution, c'est à-dire les valeurs de  $x$  dans cette équation, seront les véritables limites des racines de la proposée.

Or le calcul des différences apprend que pour prendre la différence de  $x^3 - 114xx + 3744x - 30240 = y$ , il faut multiplier 3                      2                      1                      0, chaque terme

par l'exposant  $3xxdx - 228xdx + 3744dx = dy$  de son inconnue, & par la différentielle  $dx$  ; qu'il faut multiplier le dernier terme par zero, & écrire au second membre  $dy$  au lieu de  $y$ , & diviser chaque terme par  $x$ , & l'on aura la différence  $3xxdx - 228xdx + 3744dx = dy$ .

R r ij

Il faut ensuite supposer  $dy=0$ , & l'on aura  $3xxdx - 228xdx + 3744dx = 0$ .

Il faut diviser chaque terme par  $dx$ , & l'on aura l'équation  $3xx - 228x + 3744 = 0$ ; ou divisant par 3,  $xx - 76x + 1248 = 0$ , dont les racines étant substituées dans la proposée à la place de  $x$ , les sommes toutes connues qui en naîtront, seront plus grandes que toutes celles que pourront donner les substitutions des autres grandeurs moyennes entre les racines de la proposée.

Par conséquent les racines de l'équation des limites, qui est la même que celle qu'on vient de trouver, sont les véritables limites des racines de la proposée. *Ce qu'il falloit démontrer.*

### COROLLAIRE I.

251. SI l'on conçoit dans  $x^3 - 114xx + 3744x - 30240 = y$ , que  $y$  représente les plus grandes sommes toutes connues que donnent les substitutions successives des véritables limites des racines de la proposée, c'est-à-dire, par ce dixième Théorème, les sommes que donnent les substitutions successives des racines de l'équation des limites  $xx - 76x + 1248 = 0$ ; & qu'on transpose  $y$  dans le premier membre, les racines de l'équation des limites  $xx - 76x + 1248 = 0$ , seront des racines exactes de l'équation  $x^3 - 114xx + 3744x - 30240 - y = 0$ ; car les racines 24 & 52 de l'équation des limites étant substituées l'une après l'autre dans l'équation  $x^3 - 114xx + 3744x - 30240 - y = 0$ , la somme qui viendra de la 1<sup>re</sup> substitution sera  $+7776$ ; &  $y$  représentant cette même somme là, l'on aura  $+7776 - 7776 = 0$ , ainsi la première racine 24 de l'équation des limites étant substituée à la place de  $x$  dans l'équation  $x^3 - 114xx + 3744x - 30240 - y = 0$ , donne zero; 24 est donc une racine de cette équation. La somme qui viendra de la substitution de 52 sera  $-3200$ ; &  $y$  représentant cette même somme,  $-y$  sera égal à  $+3200$ ; ainsi l'on aura  $-3200 + 3200 = 0$ . La seconde racine 52 de l'équation des limites étant substituée à la place de  $x$  dans  $x^3 - 114xx + 3744x - 30240 - y = 0$ , donnant zero, est donc une racine de cette équation.

## COROLLAIRE II.

152. D'OU il suit que chaque équation lineaire comme  $x - 24 = 0$ ,  $x - 52 = 0$ , dont le premier terme est  $x$ , & le second l'une des racines de l'équation des limites, est un diviseur exact de l'équation  $x^3 - 114xx + 3744x - 30240 - y = 0$ , & de l'équation des limites  $xx - 76x + 1248 = 0$ , en supposant que  $y$  représente par rapport à  $x - 24 = 0$ , la somme toute connue  $+ 7776$ , que donne la substitution de 24 à la place de  $x$  dans la proposée, & que  $y$  représente par rapport à  $x - 52 = 0$ , la somme toute connue  $- 3200$  que donne la substitution de 52 à la place de  $x$  dans la proposée.

## COROLLAIRE III.

153. APRES avoir transposé  $y$  du second membre dans le premier membre d'une équation  $x^3 - 114xx + 3744x - 30240 - y = 0$ , si on la divise par son équation des limites  $xx - 76x + 1248 = 0$ , & après être arrivé à un reste où  $x$  ait un degré de moins que dans le diviseur  $xx - 76x + 1248 = 0$ , on divise ce diviseur par ce premier reste, & qu'on continue la méthode de chercher le plus grand diviseur commun, jusqu'à ce qu'on soit arrivé à un reste  $yy - 4576y + 24883200 = 0$ , dans lequel  $x$  ne se trouve plus, & qui n'a d'inconnue que  $y$ , & qu'on suppose ce reste  $yy - 4576y + 24883200$  égal à zero, & le dernier diviseur où  $x$  est lineaire aussi égal à zero, qui est  $- 392x + 17184 - y = 0$ , ou  $+ 392x - 17184 + y = 0$ . Il suit du Corollaire précédent que le reste, ou l'équation  $yy - 4576y + 24883200 = 0$ , (qui sera toujours du même degré que l'équation des limites, comme l'opération le démontre,) aura pour ses racines, ou pour les valeurs de  $y$ , les sommes toutes connues que donnent les substitutions successives des racines de l'équation des limites à la place de  $x$  dans la proposée, qui sont ici  $+ 7776$  &  $- 3200$ ; & en mettant successivement ces valeurs de  $y$  dans le dernier diviseur où  $x$  est lineaire, c'est-à-dire dans  $392x - 17184 = 0$ , l'on aura les deux équations lineaires  $x - 24 + y = 0$ ,  $x - 52 = 0$ , qui sont les diviseurs communs aux

équations  $x^3 - 114xx + 3744x - 30240 = 0$ , où  $y$  repré-

sente successivement  $+ 7776$  &  $- 3200$ , &  $xx - 76x + 1248 = 0$ , & qui contiennent les racines de l'équation des limites  $xx - 76x + 1248 = 0$ .

Ce Corollaire est une suite évidente du précédent & de la méthode de trouver le plus grand diviseur commun de deux équations: car les racines de  $yy - 4576y + 24883200 = 0$ , sont telles, qu'étant substituées à la place de  $y$  dans le dernier diviseur où  $x$  est lineaire, qui est  $392x - 17184$

$= 0$ , & dans  $x^3 - 114xx + 3744x - 30240 = 0$ , l'équa-

tion lineaire est changée en deux autres, qui divisent exactement l'équation des limites, & qui par conséquent en contiennent les racines, & ces mêmes équations lineaires divisent aussi exactement  $x^3 - 114xx + 3744x - 30240 = 0$ ,

où l'on suppose à la place de  $y$ , les deux valeurs  $+ 7776$ ,  $- 3200$ .

#### COROLLAIRE IV.

*Pour les racines égales.*

154. **S**OIT une équation qui a des racines égales  $x^4 - 16x^3 + 72xx - 64x + 16 = 0$ , dont l'équation des limites est  $x^3 - 12xx + 36x - 16 = 0$ ; qu'on mette  $y$  à la place de zero, (conformément à la supposition du 2<sup>e</sup> Corollaire qui précède,) l'on aura  $x^4 - 16x^3 + 72xx - 64x + 16 = y$ . Les racines de l'équation des limites étant substituées successivement à la place de  $x$  dans cette équation, les sommes toutes
152. connues qui en viendront seront les valeurs de  $y$ ; par conséquent les racines égales étant communes à la proposée & à l'équation des limites, il y aura tout autant de valeurs de  $y$  égales à zero, qu'il y aura de ces racines communes.

#### COROLLAIRE V.

*Qui contient une méthode pour connoître quand une équation proposée a des racines égales.*

155. **D**OÛ il suit & du troisième Corollaire, que si l'on transpose  $y$  dans le premier membre; qu'on cherche ensuite le

plus grand diviseur commun de  $x^4 - 16x^3 + 72xx - 64x + 16 = 0$ , & de l'équation des limites  $x^4 - 12xx + 36x - y$

$-y = 0$ , & qu'on continue l'opération jusqu'à ce qu'on soit arrivé à un reste où  $x$  ne se trouve plus, & qui n'ait pour inconnue que  $y$ , en supposant ce reste égal à zero; il y aura autant de  $y$  égaux à zero dans l'équation de ce reste, qu'il y a de racines communes à la proposée  $x^4 - 16x^3 + 72xx - 64x + 16 = 0$ , & à l'équation des limites  $x^4 - 12xx + 36x - y = 0$ , ce qui marquera qu'il y a des racines égales dans la proposée; c'est-à-dire,  $y$  auroit trois dimensions dans l'équation faite du reste, si les quatre racines de la proposée étoient inégales, mais au lieu de cela,  $y$  n'aura que deux dimensions, s'il y a une racine commune à la proposée & à l'équation des limites;  $y$  n'aura qu'une dimension dans l'équation du reste, s'il y a deux racines communes; &  $y$  se trouvera entièrement égale à zero dans l'équation faite du reste, si toutes les racines de l'équation des limites sont aussi les racines de la proposée, & que les quatre racines de la proposée soient égales.

Dans cet exemple on trouve pour reste  $y - 144 = 0$ , ce qui fait connoître qu'il y a deux racines communes à la proposée & à son équation des limites, & que la proposée contient par conséquent des racines égales.

D'où l'on voit que pour connoître si une équation proposée contient des racines égales, il n'y a qu'à ajouter  $-y$  à son dernier terme, & ensuite chercher le plus grand diviseur commun de cette équation & de son équation des limites; & continuer l'opération jusqu'à ce qu'on ait un reste qui n'ait que  $y$  pour inconnue, & supposer ce reste égal à zero. Si l'inconnue  $y$  est au même degré dans cette équation, qu'est  $x$  dans l'équation des limites, c'est une marque qu'il n'y a pas de racines égales dans la proposée: Si l'inconnue  $y$  est à un degré moindre dans cette équation du reste que celui de  $x$  dans l'équation des limites, c'est une marque qu'il y a des racines égales dans la proposée.

## SECTION III.

Où l'on explique différentes méthodes pour trouver les racines d'une équation lorsqu'on a deux limites pour chacune.

## PROBLÈME III.

156. QUAND on a deux limites d'une racine d'une équation numérique, l'une moindre & l'autre plus grande que cette racine; ou, ce qui revient au même, lorsque la substitution de l'une & ensuite de l'autre à la place de l'inconnue, donne des sommes toutes connues dont les signes sont differens; trouver cette racine quand elle est commensurable; en trouver une valeur approchée quand elle est incommensurable; & continuer l'approximation tant qu'on voudra.

PREMIERE METHODE PAR SUBSTITUTION  
OU PAR DIVISION.

ON appliquera la méthode à un exemple en l'énonçant pour la rendre plus claire.

Il faut trouver les racines de  $xx - 76x + 1248 = 0$ ; les limites de la plus petite sont zero & 38; la premiere étant substituée donne +, & la seconde donne -; les limites de la plus grande sont 38 & 77; la premiere étant substituée donne -, & la seconde donne +.

1°. On prendra la difference des deux limites, & l'on ajoutera la moitié de cette difference, prises en nombres entiers, à la moindre limite, ce qui donnera une somme; ainsi la difference des deux limites zero & 38 de la premiere racine, est 38, dont la moitié est 19, & la somme de la moindre limite zero & de cette moitié, est 19. La difference des deux limites 38 & 77 est 39, dont la moitié est 19 ou 20; on prendra laquelle on voudra, quand la difference est un nombre impair: on ajoutera cette moitié à la moindre limite 38, & la somme sera 57 ou 58, il n'importe pas laquelle on prendra.

2°. On substituera la somme qu'on vient de trouver à la place de l'inconnue  $x$  dans la proposée; ainsi on substituera + 19 pour la premiere racine, & + 57 pour la seconde;  
ou,

ou, ce qui revient au même, on divisera l'équation proposée par l'équation lineaire  $x$  moins cette somme, c'est-à-dire par  $x - 19 = 0$ , pour trouver la premiere racine, & par  $x - 57 = 0$ , pour trouver la seconde. On remarquera le signe de la somme toute connue qui viendra de la substitution, ou du reste qui viendra de la division, & s'il est conforme au signe que doit donner la premiere limite, ou à celui que doit donner la seconde limite, par exemple en substituant 19, on trouve le signe + conforme au signe que donne la moindre limite zero des deux limites 0 & 38 de la premiere racine; en substituant 57, on trouve le signe + conforme au signe que donne la plus grande limite 77 des deux limites 38 & 77 de la seconde racine.

30. On laissera à present comme inutile celle des deux limites d'une racine dont la grandeur, substituée à la place de  $x$ , a donné le signe, & on prendra cette grandeur à la place pour être une des limites de la racine qu'on cherche, avec l'autre limite dont la grandeur substituée n'a pas donné le signe.

Dans notre exemple en cherchant la premiere racine de la proposée dont zero & 38 sont les limites, la grandeur 19 ayant donné le signe de la moindre limite zero, c'est-à-dire +, la limite zero sera désormais inutile pour trouver la premiere racine, on prendra à sa place la grandeur 19 qui a donné le même signe + de la premiere limite zero, & la seconde limite sera 38.

On trouve de même en cherchant la seconde racine, que la grandeur 57 étant substituée à la place de  $x$ , donne le signe + de la plus grande des deux limites 38 & 77 de la seconde racine; ainsi il faut laisser la plus grande limite 77 comme inutile, & prendre à sa place la grandeur 57 pour la plus grande limite, & la plus petite 38 demeure la même.

Il faut à present chercher la premiere racine de la proposée entre les nouvelles limites 19 & 38, & la seconde entre les limites 38 & 57, en faisant une operation semblable à celle du premier & du second article, c'est-à-dire en prenant, pour trouver la valeur de la premiere racine, la moitié de la difference de ces deux limites 19 & 38, laquelle moitié est 9, l'ajoutant à la moindre limite 19, ce qui donnera la somme 28, & substituant cette grandeur 28 à la place de  $x$  dans la

proposée : & comme la somme qui en vient a le signe —, qui est celui que donne la substitution de la plus grande limite, il faut laisser la limite 38 comme inutile, & mettre à sa place 28 pour la plus grande limite de la première racine, dont la plus petite limite sera 19, & continuer l'opération en ajoutant la moitié en nombres entiers de la différence 9 des deux dernières limites 19 & 28, laquelle moitié est 5 ou 4, à la plus petite limite 19, ce qui donnera la somme 24, & substituant cette grandeur 24 à la place de  $x$  dans la proposée ; Et comme on trouve que la somme qui en vient est zéro, la grandeur 24 est la plus petite racine de la proposée.

On cherchera la seconde racine comme on a fait la première, en prenant 9 qui est la moitié de la différence 19 qui se trouve entre les deux dernières limites 38 & 57 de la seconde racine de la proposée, & ajoutant cette moitié 9 à la moindre limite, la somme sera 47, qui étant substituée à la place de  $x$  dans la proposée, donne le signe — conforme à celui qui vient de la substitution de la moindre limite 38. On laissera la limite 38 comme inutile, & on prendra à sa place 47, & la plus grande limite sera encore 57, ainsi les deux limites de la seconde racine seront 47 & 57. On prendra 5, qui est la moitié exacte de leur différence, qui est 10, on l'ajoutera à la moindre limite 47, & la somme sera 52 ; on substituera 52 à la place de  $x$  dans la proposée, & l'on trouvera que la somme qui en vient est zéro ; ce qui fera voir que la grandeur 52 est la seconde racine de la proposée.

#### R E M A R Q U E.

**I**L est visible qu'en cherchant une racine, par cette méthode, entre deux limites, entre lesquelles cette racine est une grandeur moyenne, on augmente à chaque opération la plus petite limite, ou l'on diminue la plus grande, c'est pourquoi on arrive enfin à trouver la racine même, quand elle est commensurable. Mais quand en suivant la méthode, on arrive à deux limites, l'une moindre, & l'autre plus grande que la racine, ou qui donnent par leur substitution des signes différens, qui ne diffèrent entr'elles que de l'unité, il est certain que la racine est incommensurable, car on suppose



l'équation sans fractions, & que son premier terme n'a pas d'autre coëfficient que l'unité; ainsi la racine étant entre deux nombres qui ne diffèrent que de l'unité, elle ne peut pas être un nombre entier; & on a démontré \* qu'une fraction ne peut pas être la racine d'une telle équation. \* 14.

*Continuation de la première méthode.*

4°. ON continuera d'augmenter par la méthode la moindre limite, & de diminuer la plus grande limite de la racine qu'on cherche, jusqu'à ce qu'on trouve une grandeur qui étant substituée à la place de l'inconnue, donne zero; ou, quand la racine est incommensurable, jusqu'à ce qu'on ait trouvé deux limites, l'une moindre que la racine, & l'autre plus grande, qui ne diffèrent entr'elles que de l'unité; & alors la moindre limite sera la valeur approchée de la racine, plus petite que la racine, & la plus grande limite sera la valeur approchée plus grande que la racine; & l'une & l'autre valeur approchée ne diffèrent pas de la racine exacte de l'unité entière.

Pour continuer l'approximation, on se servira ordinairement de la troisième méthode qui suit, comme étant la plus courte; mais on le pourra faire aussi par cette première, le calcul en sera un peu plus long; on prendra  $\frac{1}{2}$ , qui est la moitié de la différence des deux dernières limites, qui ne diffèrent entr'elles que de l'unité, & on l'ajoutera à la moindre des deux dernières limites; on substituera cette grandeur à la place de l'inconnue, & on la prendra au lieu de la limite dont elle donnera le signe. Ensuite on prendra la moitié de la différence qui est entre cette nouvelle limite & l'autre limite qui est demeurée, on ajoutera cette moitié à la moindre de ces deux limites, & la somme sera la grandeur qu'il faut substituer à la place de l'inconnue dans la proposée, & on prendra cette grandeur au lieu de la limite dont elle donnera le signe.

On continuera ainsi de trouver des valeurs qui approchent de plus en plus à l'infini de la racine exacte, qu'on ne peut pas trouver autrement, puisqu'elle est incommensurable.

*Exemple où les racines sont incommensurables.*

POUR trouver les racines de l'équation  $xx - 20x + 65 = 0$ , dont la première a pour limites zero & 10, la seconde 10 & 21 : 1°. on prendra la moitié de la différence des limites zero & 10, laquelle moitié est 5, on l'ajoutera à zero, & la somme sera 5; on substituera 5 à la place de  $x$  dans la proposée, & l'on trouvera la somme toute connue  $-10$ ; ainsi 5 donnant le signe  $-$  de la plus grande des deux limites 0 & 10, on prendra 3 pour la plus grande limite au lieu de 10, & zero demeurera pour la moindre limite.

On prendra la plus grande moitié en nombres entiers de la différence des limites 0 & 5, cette moitié est 3, on la substituera à la place de  $x$ , & elle donnera  $+14$ ; ainsi 3 donnant le signe de la moindre des deux limites zero & 5, on prendra 3 pour la moindre limite au lieu de zero, & la plus grande sera 5; on ajoutera 1, qui est la moitié de la différence de ces deux limites 3 & 5, à la plus petite 3, & on substituera la somme 4 au lieu de  $x$ , & l'on trouvera qu'elle donne la somme  $+1$ , qui a le même signe  $+$  que donné la moindre limite.

L'on a donc les deux limites 4 & 5, qui ne diffèrent que de l'unité, dont l'une donne  $+$  & l'autre  $-$ ; ainsi la première racine de la proposée est plus grande que 4, & moindre que 5, & elle est incommensurable.

Pour en trouver la valeur en fractions qui en approche tant qu'on voudra, on prendra  $\frac{1}{2}$  qui est la moitié de la différence des deux limites 4 & 5, on l'ajoutera à la moindre limite 4, & la somme sera  $4\frac{1}{2} = \frac{9}{2}$ ; on substituera  $\frac{9}{2}$  à la place de  $x$  dans la proposée, & on trouvera la somme toute connue  $-4\frac{1}{4}$ , qui a le signe  $-$  que donne la plus grande des deux limites 4 & 5; ainsi on prendra  $4\frac{1}{2} = \frac{9}{2}$  au lieu de 5, & les deux limites ou valeurs approchées de la première racine seront 4 &  $4\frac{1}{2}$ . On prendra  $\frac{1}{4}$  qui est la moitié de la différence  $\frac{1}{2}$  de ces deux limites 4,  $4\frac{1}{2}$ ; on ajoutera cette moitié  $\frac{1}{4}$  à la plus petite 4, & la somme  $4\frac{1}{4} = \frac{17}{4}$  sera la grandeur qu'on substituera à la place de  $x$  dans la proposée, & on trouvera la somme  $-1\frac{15}{16}$ , qui a le signe que donne la plus grande des deux limites 4,  $4\frac{1}{2}$ ; ainsi on pren-

dra  $4\frac{1}{4}$  au lieu de la plus grande limite, & 4 demeurera pour la plus petite.

On continuera l'approximation en ajoutant  $\frac{1}{8}$  qui est la moitié de la différence des deux dernières limites 4,  $4\frac{1}{4}$ , à la moindre 4; & l'on substituera la somme  $4\frac{1}{8} = \frac{33}{8}$  à la place de  $x$  dans la proposée, & l'on trouvera la somme  $-\frac{11}{24}$ , qui a encore le signe que donne la plus grande limite  $4\frac{1}{4}$ ; ainsi on prendra  $4\frac{1}{8}$  pour la plus grande limite, au lieu de  $4\frac{1}{4}$ , & 4 demeurera la moindre limite.

Pour continuer l'approximation, on ajoutera  $\frac{1}{16}$ , qui est la moitié de la différence des deux limites 4,  $4\frac{1}{8}$ , à la moindre limite 4, & on substituera la somme  $4\frac{1}{16} = \frac{65}{16}$ , à la place de  $x$  dans la proposée, & on trouvera la somme toute connue  $+\frac{65}{128}$ , qui a le même signe que donne la substitution de la moindre limite 4; ainsi  $4\frac{1}{16}$  sera une valeur approchée de la première racine moindre que la première racine, &  $4\frac{1}{8}$  sera une valeur approchée de la même racine plus grande que cette racine, qui est entre  $4\frac{1}{16}$  &  $4\frac{1}{8}$ .

On peut continuer l'approximation à l'infini; mais l'approximation qu'on vient de faire suffit pour faire concevoir la méthode.

2<sup>o</sup>. On appliquera la même méthode à la recherche de la seconde racine de la proposée, dont les limites sont 15 & 16; & après avoir trouvé qu'elle est entre 15 & 16, on continuera l'approximation en fractions, en ajoutant la moindre limite 15; la moitié de la différence qui est entre 15 & 16; c'est-à-dire  $\frac{1}{2}$ ; & on substituera la somme  $15\frac{1}{2}$  à la place de  $x$  dans la proposée, & le reste comme dans l'approximation de la première racine.

Cette première méthode est évidente après tout ce qui précède, puisqu'elle en est une suite nécessaire, & elle n'a pas besoin de démonstration.

*Seconde méthode par le moyen de la transformation, qui sert à diminuer & à augmenter les racines.*

157. **P**OUR rendre la méthode plus facile à entendre, on l'appliquera à un exemple en l'énonçant, & l'on fera en même temps les raisonnemens qui la démontrent.

Soit l'équation  $xx - 76x + 1248 = 0$ , dont il faut trouver la plus petite racine par cette méthode; les limites de la première racine sont la plus petite 19, qui étant substituée à la place de  $x$ , donne une somme toute connue qui a le signe +; la plus grande 38, qui étant substituée à la place de  $x$ , donne une somme qui a le signe —.

Il faut commencer par la moindre limite 19, & supposer  $+19 +$  une indéterminée  $f = x$ , & substituer  $+19 + f = x$  à la place de  $x$  dans la proposée, comme on le voit dans l'exemple figuré; le dernier terme de la transformée qui en viendra, aura toujours le même signe que donne la moindre limite; dans notre exemple il a le signe +.

\* 38.

Il est évident \* que par cette première transformation, l'on diminue la première & plus petite racine dont on fait la recherche, de la grandeur 19, ainsi on la peut déjà concevoir comme partagée en deux parties, dont l'une est la moindre limite 19, & l'autre est la plus petite racine de la transformée, dont il faut continuer la recherche. Il est de même évident qu'étant la moindre limite 19 de la plus grande 38, la différence 19 surpasse la première racine de la transformée, puisque 38 surpasse la première racine de la proposée; ainsi il faut prendre la moitié en entiers 9 ou 10, il n'importe pas laquelle, de la différence 19, & supposer cette moitié 9 + une nouvelle indéterminée  $g$ , égale à la première indéterminée  $f$ , & substituer  $+9 + g = f$  à la place de  $f$  dans la première transformée.

\* 30

La seconde transformée qui vient de cette substitution, ayant le signe — au dernier terme, on est assuré \* que la première racine de la première transformée est devenue négative dans la seconde, & qu'ainsi on l'a trop diminuée en la diminuant de 9.

On sait donc déjà que la première racine de la proposée est plus petite que 19,  $+9 = 28$ , & que la grandeur dont elle est plus petite que 28, est moindre que 9. C'est pourquoi il faut diminuer la première racine de la seconde transformée qui est négative, d'une grandeur moindre que 9; c'est à dire, il faut prendre la moitié de 9 en entiers qui est 4, la rendre négative, supposer  $-4 +$  une nouvelle indéterminée  $h$ , égale à l'indéterminée  $g$ , & substituer  $-4 + h = g$  à la place de  $g$  dans la seconde transformée; Et

comme l'on trouve que le dernier terme de la troisième transformée qui vient de cette substitution, est zero; il est évident \* que la grandeur 4 est justement celle dont la première racine de la seconde transformée avoit été trop diminuée, & qui étoit devenue négative par cette diminution; & qu'ainsi 4 est la grandeur qu'il faut ôter de + 28, pour avoir la racine qu'on cherche, qui est par conséquent  $19 + 9 - 4 = 24$ . Ce qu'il falloit trouver. \* 37.

Exemple figuré pour trouver la plus petite racine de l'équation  $xx - 76x + 1248 = 0$ , dont la moindre limite est 19, qui étant substituée à la place de  $x$ , donne une somme qui a le signe +, & dont la plus grande limite est 38, qui donne le signe —.

EQUATION PROPOSÉE,

$$xx - 76x + 1248 = 0.$$

IL faut commencer par la moindre limite 19, & supposer

$$+ 19 + f = x$$

$$\begin{array}{rcl} xx & = & + 361 + 38f + ff \\ - 76x & = & - 1444 - 76f \\ + 1248 & = & + 1248 \end{array}$$

Il faut ôter la moindre limite 19 de la plus grande 38, & prendre la moitié en entiers, qui est 9, de la différence qui est 19, & supposer

Première transformée.

$$+ 165 - 38f + ff$$

$$+ 9 + g = f$$

$$\begin{array}{rcl} ff & = & + 81 + 18g + gg \\ - 38f & = & - 342 - 38g \\ + 165 & = & + 165 \end{array}$$

9 ayant donné au dernier terme de la transformée le signe — de la plus grande limite 38, il faut prendre la moitié de 9 en entiers, qui est 4, & lui donner le signe —, & supposer

Seconde transformée.

$$- 96 - 20g + gg$$

$$- 4 + b = g$$

$$\begin{array}{rcl} gg & = & + 16 - 8b + bb \\ - 20g & = & + 80 - 20b \\ - 96 & = & - 96 \end{array}$$

Étant arrivé à une transfor- *Troisième*  
mée dont le dernier terme *transfor-*  $0 - 18b + bb$   
est zéro, la racine est com- *mée.*  
mensurable, & elle est égale à la somme des grandeurs con-  
nues des équations linéaires qui ont servi aux transforma-  
tions; ainsi  $x = +19 + 9 - 4 = 24$ . *Ce qu'il faut trouver.*

En diminuant la première racine de la proposée par les  
transformations, on diminue aussi la seconde; ainsi en ajou-  
tant la première racine 24 à la racine 28 de la dernière trans-  
formée qui est linéaire, la somme 52 est la seconde racine  
de la proposée, dont cependant on va faire la recherche  
par la méthode, pour la faire mieux concevoir.

On trouvera donc de même que la seconde racine est 52;  
on en voit les opérations dans l'exemple figuré.

Pour trouver la plus grande racine de  $xx - 76x + 1248 = 0$ ,  
dont la plus petite limite est 38, qui étant substituée donne le  
signe -, & la plus grande est 77, qui étant substituée, donne  
le signe +.

ON supposera $+38 + f = x$	$xx$	$= +1444 + 76f + ff$
	$-76x$	$= -2888 - 76f$
	$+1248$	$= +1248$

On ôtera la moindre limite.	<i>Première</i>	
38 de la plus grande 77, & on	<i>transfor-</i>	$-196 + ff$
prendra la moitié en entiers	<i>mée,</i>	
19 de la différence 39, & on		
supposera		

$+19 + g = f$	$ff$	$= +361 + 38g + gg$
	$-196$	$= -196$

$+19$ donnant au dernier	<i>Seconde</i>	
terme de la transformée le	<i>transfor-</i>	$+165 + 38g + gg$
signe + de la plus grande li-	<i>mée.</i>	
mite 77, on prendra en en-		
tiers la moitié 9 de 19, &		
on supposera		

$-9 + h = g$	$gg$	$= +81 - 18h + hh$
	$+38g$	$= -342 + 38h$
	$+165$	$= +165$

— 9 donnant au dernier terme de la transformée le signe — de la moindre limite, on prendra en entiers la moitié 4 de 9, & on supposera	<i>Troisième transformée.</i>	$-96 + 20h + hh$
--	-------------------------------	------------------

$+4 + i = h$	$hh$	$= +16 + 8i + ii$
	$+20h$	$= +80 + 20i$
	$-96$	$= -96$

Etant arrivé à une transformée dont le dernier terme est zero, la racine qu'on cherche est commensurable, & elle est égale à la somme des grandeurs connues des équations lineaires qui ont servi aux transformations; ainsi la plus grande racine de la proposée est  $x = +38 + 19 - 9 + 4 = 52$ .  
*Ce qu'il falloit trouver.*

*Continuation de la méthode quand la racine qu'on cherche est incommensurable.*

**L**O R S Q U' E N cherchant une racine par cette méthode, on arrive à une transformation où l'on est obligé pour continuer, de prendre la moitié de l'unité, la racine qu'on cherche est incommensurable, n'étant pas un nombre entier, puisqu'on trouveroit une transformée dont le dernier terme seroit zero; c'est à dire, on trouveroit la racine exactement, si elle étoit un nombre entier, elle ne peut pas être aussi une fraction, \* car on suppose la proposée sans fractions, & que son premier terme n'a pas d'autre coefficient que l'unité. Dans ce cas la somme de toutes les quantitez connues des équations lineaires qui ont servi aux transformations, est la valeur approchée en nombres entiers de la racine qu'on cherche. \* 341

On continuera tant qu'on voudra l'approximation en prenant  $\frac{1}{2}$ , c'est-à-dire la moitié de l'unité précédée du signe + ou —, selon que le dernier terme de la dernière transformée aura le signe de la moindre ou de la plus grande limite, c'est-à-dire + dans le premier cas, & — dans le second;

& on supposera  $+$  ou  $-\frac{1}{2}+$  une nouvelle indéterminée, égale à l'indéterminée de la dernière transformée, & le reste comme dans l'exemple figuré qui suit.

## EXEMPLE FIGURÉ.

Pour trouver la plus grande racine de  $xx - 20x + 65 = 0$ , dont la moindre limite est 10, qui étant substituée à la place de  $x$ , donne le signe  $-$ ; & la plus grande est 21, qui donne le signe  $+$ .

ON supposera $+10+f=x$	$xx$	$= +100 + 20f + ff$
	$-20x$	$= -200 - 20f$
	$+65$	$= +65$

On ôtera la moindre limite 10 de la plus grande 21, on prendra la moitié en entiers 6 du reste 11, & on supposera	Première transformée.	$-35 + ff$
---	-----------------------	------------

$+6+g=f$	$ff$	$= +36 + 12g + gg$
	$-35$	$= -35$

Le dernier terme de cette transformée ayant le signe $+$ de la plus grande limite, le nombre 6 est trop grand, il faut en prendre la moitié 3, & supposer	Seconde transformée.	$+1 + 12g + gg$
---	----------------------	-----------------

$-3+h=g$	$gg$	$= +9 - 6h + hh$
	$+12g$	$= -36 + 12h$
	$+1$	$= +1$

Le dernier terme de cette transformée ayant le signe $-$ de la moindre limite, on ôtera 3 de 6, & on prendra la moitié du reste 3 en entiers, qui est 2, & on supposera	Troisième transformée.	$-26 + 6h + hh$
---	------------------------	-----------------

$+2+i=h$	$hh$	$= +4 + 4i + ii$
	$+6h$	$= +12 + 6i$
	$-26$	$= -26$



Le dernier terme ayant le signe — de la moindre limite, on ôtera 2 du reste précédent 3, il restera 1, dont il faut prendre la moitié  $\frac{1}{2}$ , & supposer

$$+ \frac{1}{2} + k = i$$

Le dernier terme ayant encore le signe —, il faut ôter  $\frac{1}{2}$  du dernier reste 1, & prendre la moitié du reste  $\frac{1}{2}$ , laquelle est  $\frac{1}{4}$ , & supposer

$$+ \frac{1}{4} + l = k$$

Le dernier terme ayant encore le signe —, il faut ôter  $\frac{1}{4}$  du dernier reste  $\frac{1}{2}$ , il restera  $\frac{1}{4}$ , dont il faut prendre la moitié  $\frac{1}{8}$ , & supposer

$$+ \frac{1}{8} + m = l$$

Le dernier terme ayant encore le signe — de la moindre limite, la somme de toutes

les grandeurs connues des équations lineaires qui ont servi aux transformations, est une valeur approchée moindre que la racine qu'on cherche; ainsi  $+ 10 + 6 - 3 + 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 15 + \frac{7}{8}$ , est une valeur approchée moindre que la racine qu'on cherche, qui est moyenne entre  $15 \frac{7}{8}$  & 16. On peut continuer l'approximation tant qu'on voudra, en ôtant  $\frac{1}{8}$  du dernier reste  $\frac{1}{4}$ , & prenant la moitié du reste  $\frac{1}{8}$ , laquelle moitié est  $\frac{1}{16}$ , & supposant  $+ \frac{1}{16} + n = m$ , &c.

Quatrième  
trans-  
formée.

$$- 10 + 10i + ii$$

$$\begin{aligned} ii &= + \frac{1}{4} + 1k + kk \\ + 10i &= + 5 + 10k \\ - 10 &= - 10 \end{aligned}$$

Cinquième  
trans-  
formée.

$$- 4 \frac{3}{4} + 11k + kk$$

$$\begin{aligned} kk &= + \frac{1}{16} + \frac{1}{2}l + ll \\ + 11k &= + \frac{11}{4} + 11l \\ - 4 \frac{3}{4} &= - 4 \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Sixième  
transfor-  
mée.

$$- 1 \frac{15}{16} + 11 \frac{1}{2}l + ll$$

$$\begin{aligned} ll &= + \frac{1}{64} + \frac{1}{4}m + mm \\ + 11 \frac{1}{2}l &= + \frac{23}{16} + \frac{23}{2}m \\ - 1 \frac{15}{16} &= - 1 \frac{15}{16} \end{aligned}$$

Septième  
transfor-  
mée.

$$- \frac{31}{64} + \frac{47}{4}m + mm$$

T t ij

Quand zero est une des limites de la racine qu'on cherche, il faut prendre la moitié de la plus grande limite, & supposer cette moitié positive plus une indéterminée, égale à l'inconnue de la proposée, & continuer l'opération comme dans les exemples précédens.

Par exemple si l'on cherche la premiere racine de  $xx - 20x + 65 = 0$ , dont la moindre limite est zero, qui étant substituée à la place de l'inconnue, donne +, & la plus grande limite est 10, qui étant substituée donne -, il faut prendre la moitié de 10 qui est 5, & supposer  $+5 + f = x$ , & faire l'opération comme dans les exemples précédens.

Cette seconde méthode est démontrée par les raisonnemens qu'on a faits en l'énonçant.

*Troisième méthode par le moyen de la transformation, qui sert à multiplier les racines d'une équation.*

#### AVERTISSEMENT.

158. CETTE méthode sert à trouver une valeur approchée d'une racine d'une équation qui en diffère moins que de  $\frac{1}{10}$ , ou  $\frac{1}{100}$ , ou  $\frac{1}{1000}$ , ou  $\frac{1}{10000}$ , & ainsi à l'infini.

On peut l'appliquer immédiatement à la recherche d'une racine dont on a deux limites, l'une moindre & l'autre plus grande que cette racine : mais pour éviter la longueur du calcul, il est mieux de trouver par la premiere méthode, avant de se servir de cette troisième, deux valeurs en entiers approchées de la racine, qui ne diffèrent entr'elles que de l'unité, & il faut ensuite se servir de cette troisième méthode pour trouver des valeurs en fractions décimales qui approchent tant qu'on voudra de la racine.

1°. Il faut mettre un zero devant le coefficient du second terme, c'est-à-dire, multiplier ce coefficient par 10, si l'on veut une valeur approchée qui ne diffère de la racine que de  $\frac{1}{10}$ ; il faut mettre deux zeros, si l'on veut une valeur qui ne diffère que de  $\frac{1}{100}$ ; il faut mettre trois zeros, si l'on veut une valeur qui ne diffère que de  $\frac{1}{1000}$ , & ainsi de suite.

Il faut mettre devant le coefficient du troisième terme deux fois autant de zeros qu'on en a mis au second terme, devant celui du quatrième terme, trois fois autant de zeros,

devant le coefficient du cinquième terme, quatre fois autant de zeros qu'on en a mis au second terme, & ainsi de suite.

Par exemple si l'on a mis deux zeros au second terme, il en faut mettre deux fois deux, c'est-à-dire, quatre zeros au troisième; trois fois deux, c'est-à-dire six zeros au quatrième terme, & ainsi de suite.

2°. Il faut mettre devant chacune des deux limites autant de zeros qu'on en a mis au second terme.

3°. Il faut ensuite par la première méthode, trouver deux valeurs approchées de la racine qu'on cherche, qui ne diffèrent entr'elles que de l'unité.

4°. Enfin il faut écrire chaque valeur sur une ligne pour les numérateurs, & écrire au-dessous de chacune pour dénominateur, l'unité avec autant de zeros qu'on en a mis au second terme. Ces deux fractions sont les valeurs approchées qu'on cherchoit.

## E X E M P L E.

**P**OUR trouver une valeur approchée de la plus petite racine de  $xx - 20x + 65 = 0$ , qui n'en diffère pas de  $\frac{1}{1000}$ , dont on a par la première méthode les deux limites approchées en entiers 4 & 5, qui ne diffèrent entr'elles que de l'unité; 1°. On mettra trois zeros au second terme, & six au troisième, & l'on aura la transformée  $xx - 20000x + 65000000 = 0$ , dont les racines sont celles de la proposée, multipliées chacune par 1000. 2°. On mettra autant de zeros devant chacune des limites 4 & 5, qu'on en a mis au second terme, & l'on aura 4000, & 5000 pour les limites de la transformée. 3°. On cherchera par la première méthode deux valeurs approchées en entiers, qui ne diffèrent entr'elles que de l'unité, de la première racine de la transformée, dont la moindre limite est 4000, qui donne +, & la plus grande 5000, qui donne —, & l'on trouvera que ces valeurs sont 4094 & 4095. 4°. il faut écrire ces valeurs en fraction, & leur donner 1000 pour dénominateur, & l'on aura  $\frac{4094}{1000}$  &  $\frac{4095}{1000}$  pour les valeurs approchées de la première racine de la proposée  $xx - 20x + 65 = 0$ , dont la première  $\frac{4094}{1000}$  est moindre que cette racine, & la seconde  $\frac{4095}{1000}$  est plus grande, & l'une & l'autre n'en diffèrent pas de  $\frac{1}{1000}$ .

Il est si facile d'appliquer cette méthode à tous les exemples qu'on voudra, qu'il est inutile d'en grossir ce traité.

*Démonstration de cette méthode.*

**L**ES racines de la transformée sont les racines de la proposée, multipliées chacune par 1000 \*; les limites de la première racine de la proposée, qui sont 4 & 5, étant multipliées par 1000, sont les limites de la première racine de la transformée \*; par conséquent les valeurs 4094 & 4095 qu'on trouve en employant la première méthode, sont les valeurs approchées de la première racine de la transformée; il est donc évident qu'en divisant ces valeurs par 1000, les fractions qui en naîtront seront les valeurs approchées de la première racine de la proposée.

Il est clair que cette démonstration est générale, & qu'on ne l'a appliquée à un exemple que pour la rendre plus facile & plus courte.

*Quatrième méthode par le moyen de la transformation, qui sert à diminuer & à augmenter les racines des équations, mais d'une manière un peu différente de la seconde méthode.*

A V E R T I S S E M E N T.

**159. Q**UOIQ'ON puisse se servir de cette méthode pour approcher à l'infini d'une racine d'une équation, lorsqu'on en connoît deux limites quelconques, l'une moindre & l'autre plus grande que la racine, avec le signe que donne chacune de ces limites, étant substituées dans l'équation à la place de l'inconnue, & même lorsqu'on ne connoît qu'une des deux limites de la racine qu'on cherche, pourvu qu'on sache si elle est moindre ou plus grande que cette racine, & le signe qu'elle donne, étant substituée dans l'équation à la place de l'inconnue; cependant on abrégera de beaucoup le calcul; si l'on trouve par la première méthode les limites qui ne diffèrent pas de la racine qu'on cherche de l'unité entière; c'est à-dire, qui ne diffèrent entr'elles que de l'unité.

On appliquera cette méthode à un exemple en l'énonçant, pour la faire mieux concevoir, & l'on fera dans les opérations qu'elle prescrit, les raisonnemens qui en font la démonstration, qu'on mettra dans la dernière évidence dans les remarques.

Soit proposé de trouver par cette méthode les racines de l'équation  $x^4 - 80x^3 + 1998xx - 14937x + 5000 = 0$ , qui sont toutes incommensurables, la première & plus petite racine est moindre que l'unité, & elle est plus grande que  $\frac{1}{10}$ , qui étant substituée à la place de  $x$ , donne une somme toute connue qui a +, & elle est moindre que  $\frac{1}{10}$  qui donne —, la seconde est entre 12 qui donne —, & 13 qui donne +, la 3<sup>e</sup> racine est entre 32 qui donne +, & 33 qui donne —, la 4<sup>e</sup> est entre 34 qui donne —, & 35 qui donne +.

Pour trouver celle de ces racines qu'on voudra, par exemple la seconde qui est entre 12 qui donne —, & 13 qui donne +, 1<sup>o</sup>. on supposera la moindre limite 12 plus une indéterminée  $f$ , égale à  $x$ , & l'on aura  $+12 + f = x$ ; si on vouloit se servir de la plus grande limite 13, on supposeroit  $13 - f = x$ . On substituera dans la proposée  $12 + f = x$ , à la place de  $x$ : (En voici l'opération.)

$$\begin{aligned} x^4 &= + 20736 + 6912f + 864ff + 48f^3 + f^4 \\ - 80x^3 &= - 138240 - 34560f - 2880ff - 80f^3 \\ + 1998xx &= + 287712 + 47952f + 1998ff \\ - 14937x &= - 179244 - 14937f \\ + 5000 &= + 5000 \end{aligned}$$

& l'on aura la transformée  $0 = - 4036 + 5367f - 18ff - 32f^3 + f^4$ ,  
on la supposera représentée par  $0 = - r + pf - pff - nf^3 + f^4$

Il est évident \* que les racines de la transformée sont \* 38. celles de la proposée, diminuées chacune de la quantité 12, parcequ'elles sont toutes positives. Ainsi la première ou plus petite racine de la proposée étant moindre que 12, elle est trop diminuée pour demeurer positive, & elle est devenue négative; & la seconde racine qu'on cherche étant diminuée de 12 dans la transformée, elle est encore positive, & sa grandeur dans la transformée est exactement le reste de la seconde racine de la proposée, dont on a ôté la grandeur 12; c'est-à-dire le reste de la seconde racine de la proposée, après en avoir ôté 12, est la plus petite des racines qui restent positives dans la transformée; d'où l'on voit que pour avoir la valeur approchée de la seconde racine de la proposée, il faut trouver la valeur approchée de la plus

petite des racines positives de la transformée, ajouter cette valeur approchée à la quantité 12, & la somme sera la valeur approchée de la seconde racine de la proposée.

Pour trouver cette valeur approchée de la plus petite racine de la transformée, c'est-à-dire la plus petite valeur de  $f$  dans la transformée, il y a deux manières : Et pour faire des formules pour l'une & pour l'autre de ces manières, il faut se servir de l'équation littérale  $0 = -r + qf - pff - nf^3 + f^4$ .

*Première maniere de trouver la valeur approchée de f.*

LA première maniere est de se servir d'abord des deux derniers termes seuls  $+ qf - r = 0$  de la transformée, en négligeant tous les autres dans lesquels les puissances de  $f$  vont en diminuant, puisque  $f$  est moindre que l'unité, & de supposer ces deux derniers termes égaux à zero, & l'on aura  $f = \frac{r}{q}$ .

Cette valeur de  $f$  est un peu trop petite ; car puisque  $r = qf - pff - nf^3 + f^4$ , il est visible que  $f = \frac{r}{q - pf - nff + f^3}$ , & que  $\frac{r}{q - pf - nff + f^3}$  est plus grande que  $\frac{r}{q}$ , puisque le dénominateur de la première est plus petit que le dénominateur de la seconde ; ainsi on corrigera la première valeur de  $f = \frac{r}{q}$ , en mettant cette valeur de  $f$ , au lieu de  $f$ , dans  $f = \frac{r}{q - pf - nff + f^3}$ , & l'on aura  $f = \frac{r}{q - \frac{pr}{q} - \frac{nrr}{q^2} + \frac{r^3}{q^3}}$  ; c'est la formule dont il faut se servir pour trouver la valeur de  $f$  par cette première maniere.

Cette formule de la valeur de  $f = \frac{r}{q - \frac{pr}{q} - \frac{nrr}{q^2} + \frac{r^3}{q^3}}$  qu'on peut aussi exprimer par  $f = \frac{q^3 r}{q^4 - pqqr - nqrr + r^3}$  donne une valeur un peu trop petite ; car le conséquent de la fraction  $\frac{r}{q - \frac{pr}{q} - \frac{nrr}{q^2} + \frac{r^3}{q^3}}$ , est plus grand qu'il ne devoit être, puisque si l'on conçoit la véritable valeur de  $f$ , qui surpasse  $\frac{r}{q}$ , à la place de  $\frac{r}{q}$  dans le conséquent de la fraction  $\frac{r}{q - \frac{pr}{q} - \frac{nrr}{q^2} + \frac{r^3}{q^3}}$ , il est visible que les grandeurs négatives

negatives  $-\frac{pr}{q} - \frac{nr}{qq}$  du consequent, seroient plus grandes qu'elles ne sont, ainsi elles ôteroient une plus grande quantité de la grandeur  $q$ , que n'en ôtent les grandeurs négatives  $-\frac{pr}{q} - \frac{nr}{qq}$ .

La valeur de  $f = \frac{r}{q - \frac{pr}{q} - \frac{nr}{qq} + \frac{r^2}{q^2}}$ , est donc plus petite qu'elle ne devoit être, puisque le dénominateur en est plus grand qu'il ne devoit être.

Pour avoir la valeur approchée de  $f$  par cette formule; qui est ce qu'on cherche, on mettra dans cette formule

$$f = \frac{r}{q - \frac{pr}{q} - \frac{nr}{qq} + \frac{r^2}{q^2}}, \text{ ou plutôt dans celle-ci, qui est}$$

$$\text{toute préparée } f = \frac{q^2 r}{q^3 - pqqr - nqrr + r^2}, \text{ les grandeurs}$$

numeriques de la transformée, à la place des lettres qui les représentent, & l'on aura  $f = \frac{623944475023068}{824885660086681}$ ; ou bien

en réduisant cette fraction en fraction décimale, ce qui est plus commode pour le calcul, on aura  $f = \frac{q^2 r}{q^3 - pqqr - nqrr + r^2} =$

0, 75640°. La valeur approchée par cette première manière de la seconde racine de la proposée, est donc 12, 75640°.

*Seconde maniere de trouver la valeur approchée de f.*

LA seconde maniere de trouver la valeur approchée de la plus petite des racines positives, représentée par  $f$ , de la transformée, qui est représentée par  $0 = -r + qf - pff - nf^3 + f^4$ , est de se servir des trois derniers termes seuls  $0 = -r + qf - pff$  de cette transformée, en négligeant d'abord les autres  $-nf^3 + f^4$ , comme très-petits par rapport aux trois derniers, & de supposer que ces trois termes font une équation du second degré  $0 = -r + qf - pff$ ; ou bien en transposant, pour rendre le terme  $-pff$  positif, l'on aura  $pff - qf + r = 0$ , qui se réduit à  $ff - \frac{q}{p}f + \frac{r}{p} = 0$ ; on prendra ensuite par la méthode qui sert à résoudre les équations du second degré, la plus petite des deux racines de cette équation, qui est  $f = \frac{\frac{q}{p}}{2} - \frac{\sqrt{\frac{q^2}{p^2} - \frac{4r}{p}}}{2}$ , qu'on

peut aussi exprimer ainsi  $f = \frac{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - pr}}{p}$ ; c'est la formule dont il faut se servir d'abord pour trouver par cette

seconde maniere la valeur approchée de  $f$  qu'on cherche, en substituant les grandeurs numeriques de la transformée à la place des lettres qui les représentent, & l'on trouvera en faisant le calcul, & se servant des fractions décimales,

$$f = \frac{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - pr}}{p} = \frac{2683,5^{\text{e}} - \sqrt{\frac{48804689}{4}} - 72648}{18} =$$

$$0,7539^{\text{e}}; \text{ ainsi on a déjà } f = \frac{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - pr}}{p} = 0,7539^{\text{e}}.$$

Il faut corriger cette valeur qui est trop petite; car disposant ainsi la transformée  $pf^2 - qf + r + nf^3 - f^4 = 0$ , ou bien  $ff - \frac{1}{p}f + \frac{r}{p} + \frac{n}{p}f^3 - \frac{f^4}{p} = 0$ , & regardant cette équation comme du second degré, dont le premier terme est  $ff$ , le second  $-\frac{1}{p}f$ , & le troisième  $+\frac{r}{p} + \frac{n}{p}f^3 - \frac{f^4}{p}$ , on trouve en la résolvant, que la plus petite de ses deux racines est  $f = \frac{1}{2p} - \sqrt{\frac{1}{4p^2} - \frac{r}{p} - \frac{n}{p}f^3 + \frac{f^4}{p}}$ , qui peut aussi

$$\text{s'exprimer ainsi } f = \frac{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - pr - npf^3 + pf^4}}{p},$$

Or il est évident que  $\sqrt{\frac{1}{4p^2} - \frac{r}{p}}$ , est plus grande que  $\sqrt{\frac{1}{4p^2} - \frac{r}{p} - \frac{n}{p}f^3 + \frac{f^4}{p}}$ ; la premiere étant ôtée de  $\frac{1}{2p}$ , laisse donc un reste  $\frac{1}{2p} - \sqrt{\frac{1}{4p^2} - \frac{r}{p}}$ , qui est moindre que le reste  $\frac{1}{2p} - \sqrt{\frac{1}{4p^2} - \frac{r}{p} - \frac{n}{p}f^3 + \frac{f^4}{p}}$ , qui est celui que laisse la seconde, étant ôtée de  $\frac{1}{2p}$ ; ainsi la premiere valeur  $f = \frac{1}{2p} - \sqrt{\frac{1}{4p^2} - \frac{r}{p}}$ , est plus petite qu'il ne faut.

Pour la corriger on supposera  $f = \frac{1}{2p} - \sqrt{\frac{1}{4p^2} - \frac{r}{p}} = m$ , & on substituera  $m$  à la place de  $f$  dans le second membre de  $f = \frac{1}{2p} - \sqrt{\frac{1}{4p^2} - \frac{r}{p} - \frac{n}{p}f^3 + \frac{f^4}{p}}$ , & l'on aura la formule corrigée  $f = \frac{1}{2p} - \sqrt{\frac{1}{4p^2} - \frac{r}{p} - \frac{n}{p}m^3 + \frac{m^4}{p}}$ , qui se peut aussi exprimer de cette maniere pour la commodité du calcul,  $f = \frac{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - pr - nfm^3 + fm^4}}{p}$ .

Pour trouver par cette formule la valeur approchée de  $f$ , qui est ce qu'on cherche, on substituera dans cette formule à la place des lettres, les grandeurs numeriques de la transformée que représentent ces lettres; & à la place de  $m$ , la grandeur  $\frac{1}{2p} - \sqrt{\frac{1}{4p^2} - \frac{r}{p}}$ , qui est égale dans notre



exemple à 0, 7539<sup>iv</sup>, & l'on trouvera en employant les fractions décimales, la valeur approchée qu'on cherche,

$$f = \frac{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - pr - npm^2 + pm^2}}{p} = 0, 75641609^{\text{viii}}.$$

Cette valeur de  $f$ , ou de la plus petite des racines positives de la transformée précédente, est encore un peu plus petite que cette racine, car il est évident que  $m$  étant moindre que la valeur exacte de  $f$  dans la transformée, la grandeur négative  $-\frac{nm^2}{p}$  est moindre que la grandeur  $\frac{mf^2}{p}$ , en supposant que  $f$  représente sa valeur exacte, par conséquent la grandeur négative  $-\frac{nm^2}{p}$ , étant moindre qu'il ne faut dans

$\sqrt{\frac{qq}{4pp} - \frac{r}{p} - \frac{n}{p}m^2 + \frac{m^4}{p}}$ , cette grandeur entière a, pour ainsi parler, une plus grande grandeur positive qu'elle ne devrait avoir; elle ôte donc plus qu'elle ne devrait ôter de la grandeur  $\frac{q}{2p}$ , d'où il suit que la quantité totale  $\frac{q}{2p}$

$-\sqrt{\frac{qq}{4pp} - \frac{r}{p} - \frac{n}{p}m^2 + \frac{m^4}{p}}$ , qu'on suppose égale à  $f$ , est cependant un peu plus petite que la valeur exacte de  $f$ ; ainsi la valeur approchée de  $f$ , qu'on trouve par cette seconde manière, qui est  $f = 0, 75641609^{\text{viii}}$ , est un peu plus petite que la valeur exacte de  $f$ .

Joignant cette valeur de  $f$  à la moindre limite 12, l'on a 12, 75641609<sup>viii</sup> pour la valeur approchée de la seconde racine de la proposée.

On peut continuer l'approximation de cette seconde racine à l'infini par cette quatrième méthode, comme on le va voir. Mais il est bon de remarquer auparavant que si l'on ne pouvoit pas s'assurer, comme on l'a fait, que la valeur approchée de  $f$  qu'on a trouvée par ces deux manières, fût moindre ou plus grande que sa valeur exacte, on le pourroit toujours en substituant cette valeur approchée de  $f$  à la place de  $f$  dans la transformée; car si la somme toute connue qui en viendrait, avoit le signe de la moindre limite, ou, ce qui est la même chose, celui du dernier terme de la transformée, il est évident que la valeur approchée seroit moindre que la valeur exacte de  $f$ . Si cette somme avoit le signe de la plus grande limite de la racine dont on fait la recherche, ou, ce qui est la même chose, le signe opposé à celui du dernier terme de la transformée, il est

évident que la valeur approchée seroit plus grande que la valeur exacte de  $f$ .

Il faut aussi remarquer que si l'on s'étoit servi de la plus grande limite 13, au lieu de la moindre limite 12, pour trouver la seconde racine de la proposée, & que l'on eût supposé  $13 - f = x$  pour la première transformée, il faudroit ôter de 13 la valeur approchée de  $f$ , au lieu de l'ajouter à 12, comme on l'a fait en se servant de la moindre limite 12.

*Continuation de l'approximation de la seconde racine de la proposée, ou continuation de la quatrième méthode.*

10. **P**OUR continuer l'approximation de la seconde racine, on supposera la valeur approchée de  $f$  qu'on vient de trouver par l'une ou l'autre des deux manières précédentes plus une indéterminée  $g$ , égale à  $f$ ; ce qui donnera  $0,75640^v + g = f$ , ou  $0,75641609^{viii} + g = f$ ; on substituera cette valeur de  $f$  à sa place dans la transformée précédente, & l'on trouvera une seconde transformée.

Si la valeur approchée de  $f$  étoit plus grande que  $f$ , on supposeroit pour trouver la seconde transformée, cette valeur de  $f$  moins  $g$ , égale à  $f$ .

Comme il ne s'agit ici que de faire concevoir clairement la méthode, pour rendre le calcul un peu moins long, on ne prendra que le dernier chiffre  $7^i$  ou  $\frac{7}{10}$  de la valeur de  $f$  qu'on a trouvée, pour la valeur approchée de  $f$ , & l'on supposera  $7^i + g = f$ ; on substituera cette valeur de  $f$  à sa place dans la transformée précédente, comme on le voit ici:

$$\begin{aligned} f^4 &= + 0,2401^{iv} + 1,372^{iii}g + 2,94^{ii}gg + 2,8^ig^3 + g^4 \\ - 32f^3 &= - 10,976^{ii} - 47,04^ig - 67,2^igg - 32g^3 \\ - 18ff &= - 8,82^{ii} - 25,2^ig - 18gg \\ + 5367f &= + 3756,9^i + 5367g \\ - 4036 &= - 4036 \end{aligned}$$

On trouvera la transformée	0	=	- 298,6559^{ii}	+ 5296,132^{iii}g	- 82,26^{ii}gg	- 29,2^ig^3	+ g^4;
on la supposera représentée par	0	=	- r	+ 48g	- 8gg	- 8g^3	+ g^4.

Il est évident par les raisonnemens qu'on a faits sur la première transformée, que la plus petite valeur positive de  $g$ , c'est-à-dire la plus petite des racines positives de cette

seconde transformée, est exactement ce qui reste de la valeur de la seconde racine de la proposée, après en avoir ôté 12, & encore la valeur approchée de  $f$  dans la première transformée; ainsi il faut pour continuer l'approximation de la seconde racine de la proposée, trouver la valeur approchée de la plus petite racine  $g$  de cette seconde transformée.

Pour la trouver par la première manière, on se servira de la formule  $g = \frac{r}{q - \frac{pr}{r} - \frac{nr}{r^2} + \frac{r^3}{r^4}}$ , ou plutôt de la

formule  $g = \frac{q'r}{q^2 - pqqr - nqrr + r^3}$ , qui est plus propre pour le calcul; & on trouvera en substituant dans cette formule, au lieu des lettres, les grandeurs numériques de la seconde transformée, qui sont représentées par ces lettres,  $g = 0,056441^{vi}$ ; ainsi en ajoutant cette valeur approchée de  $g$  à 12, 7' qu'on a déjà, la valeur approchée de la seconde racine de la proposée sera 12, 756441<sup>vi</sup>, qui est un peu plus petite que la véritable seconde racine de la proposée.

Pour trouver la valeur de  $g$  par la seconde manière, on se servira d'abord de la formule  $g = \frac{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - pr}}{p}$ ; on substituera dans cette formule à la place des lettres, les grandeurs numériques de la seconde transformée, représentées par ces lettres, & on trouvera  $g = 0,05644080331^{xi}$ ; & supposant ensuite la lettre  $m = g = 0,05644080331^{xi}$   $= \frac{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - pr}}{p}$ , on prendra la formule corrigée

$g = \frac{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - pr - npm^3 + pm^2}}{p}$ , on substituera dans cette formule les grandeurs numériques de la transformée, à la place des lettres qui les représentent; on y substituera aussi la valeur de  $m = 0,056440$ , &c. à la place de  $m$ , & on trouvera  $g = 0,05644179448074402^{xvii}$ ; on ajoutera cette valeur approchée de  $g$  aux parties 12, 7' de la seconde racine de la proposée, qu'on a déjà trouvées, & l'on aura pour la valeur approchée de cette seconde racine  $x = 12,75644179448074402^{xviii}$ . Cette valeur approchée est de très peu plus petite que la véritable.

3°. On peut continuer l'approximation de la seconde racine de la proposée, en supposant la valeur approchée de  $g$  qu'on vient de trouver, plus une nouvelle indéterminée  $h$ , égale à  $g$ ; & substituant cette valeur de  $g$  à sa place dans la seconde transformée, il en viendra une troisième transformée; on trouvera la valeur approchée de la plus petite racine positive  $h$  de cette troisième transformée, par laquelle on voudra des deux formules précédentes, & ainsi à l'infini.

#### R E M A R Q U E.

CETTE quatrième méthode convient avec la seconde dans la première opération, par laquelle on trouve la première transformée, mais elle en est différente dans la manière de trouver les valeurs approchées de la plus petite racine positive de chacune des transformées, par le moyen des formules qu'on a expliquées. Le calcul de cette quatrième méthode est long, mais en récompense on approche à chaque opération extrêmement de la racine qu'on cherche.

Ceux qui veulent se la rendre familière, peuvent l'appliquer à la recherche de la première, de la troisième & de la quatrième racine de la proposée.

#### *Corollaire de la quatrième méthode.*

160. P O U R avoir les formules des équations de chaque degré, qui servent à trouver la valeur approchée de la moindre racine positive de chacune des transformées, on supposera que  $k$  représente l'indéterminée ou l'inconnue de chacune des transformées, & que ces transformées sont représentées par les équations littérales qui suivent :

$$0 = \dots q \dots pk \dots nkk \dots k'$$

$$0 = \dots r \dots qk \dots pkk \dots nk' \dots k''$$

$$0 = \dots s \dots rk \dots qkk \dots pk' \dots nk' \dots k''$$

$$0 = \dots t \dots sk \dots rkk \dots qk' \dots pk' \dots nk' \dots k''$$

On ne met pas la formule du second degré, dont on trouve facilement les racines approchées, par la méthode qui est particulière aux équations du second degré : On ne met pas les signes, mais seulement des points entre les termes, pour marquer que les signes de ces équations générales pour chaque degré, doivent être déterminées par les signes des

transformées qu'on trouve, c'est-à-dire leur être semblables: On ne mettra pas les signes devant les grandeurs des formules suivantes pour la même raison. Enfin on ne met pas les équations qui passent le sixième degré, dont on a rarement besoin, chacun peut les ajouter, & leurs formules, ce qui est facile.

*Formules de la première manière.*

POUR le troisième degré  $k = \frac{ppq}{p^3 \dots npq \dots qq^3}$

Pour le quatrième degré  $k = \frac{q^3 r}{q^4 \dots pqqr \dots nqrr \dots r^3}$

Pour le cinquième degré  $k = \frac{r^3 s}{r^5 \dots qrrs \dots prrs \dots nrs^3 \dots s^5}$

Pour le sixième degré  $k = \frac{s^3 t}{s^6 \dots rrs^3 \dots qstt \dots pstt^3 \dots nst^3 \dots t^6}$

*Formules de la seconde manière.*

Pour le troisième degré.

*Formules par où il faut commencer.*

$$k = \frac{\dots \frac{1}{2} p \dots \sqrt{\frac{1}{4} pp \dots nq}}{p} = m.$$

Pour le quatrième degré.

$$k = \frac{\dots \frac{1}{2} q \dots \sqrt{\frac{1}{4} qq \dots pr}}{p} = m.$$

Pour le cinquième degré.

$$k = \frac{\dots \frac{1}{2} r \dots \sqrt{\frac{1}{4} rr \dots qs}}{q} = m.$$

Pour le sixième degré.

$$k = \frac{\dots \frac{1}{2} s \dots \sqrt{\frac{1}{4} ss \dots rt}}{r} = m.$$

*Formules corrigées.*

$$k = \frac{\dots \frac{1}{2} p \dots \sqrt{\frac{1}{4} pp \dots nq \dots nm^3}}{p}$$

$$k = \frac{\dots \frac{1}{2} q \dots \sqrt{\frac{1}{4} qq \dots pr \dots npm^3 \dots pm^3}}{p}$$

$$k = \frac{\dots \frac{1}{2} r \dots \sqrt{\frac{1}{4} rr \dots qs \dots pqm^3 \dots nqm^3 \dots qm^3}}{q}$$

$$k = \frac{\dots \frac{1}{2} s \dots \sqrt{\frac{1}{4} ss \dots rt \dots qrm^3 \dots prrm^3 \dots nrm^3 \dots rm^3}}{r}$$

Pour se servir de ces formules, il faut d'abord supposer la plus petite limite de la racine dont on veut trouver la valeur approchée, plus une nouvelle indéterminée  $f$ , égale à l'inconnue  $x$  de l'équation proposée. (On suppose que la limite ne diffère pas de la racine qu'on cherche d'une unité entière.) Il faut substituer la valeur de  $x$  à sa place dans la proposée, & l'on aura la première transformée.

Pour trouver la valeur approchée de la moindre des racines positives de cette transformée, on supposera que cette transformée est représentée par l'équation générale qui lui convient, dans le troisième degré, par  $k' \dots nkk$ , &c. & ainsi des autres. On supposera que l'inconnue  $f$  de cette transformée est représentée par la lettre  $k$  des formules.

Si l'on veut se servir des formules de la première manière, on substituera dans la formule du degré de la proposée, les grandeurs numériques de la transformée, à la place des lettres qui les représentent; & après la substitution, on aura la valeur approchée qu'on cherche.

Si l'on veut se servir des formules de la seconde manière, il faut faire deux opérations: 1°. Il faut substituer dans la formule du degré qui convient à la transformée, par laquelle on a marqué qu'il falloit commencer, les grandeurs numériques de la transformée, à la place des lettres qui les représentent; & après la substitution, on aura la valeur qu'on cherche; mais il la faut corriger. On nommera cette valeur non corrigée  $m$ ; 2°. & on substituera dans la formule corrigée la valeur de  $m$ , & les valeurs des autres lettres de la formule à la place de ces lettres; & ce qui viendra de la substitution fera la valeur approchée qu'on cherche.

Pour continuer l'approximation, on supposera la valeur approchée qu'on vient de trouver plus une nouvelle indéterminée  $g$ , égale à l'indéterminée  $f$  de la première transformée. Si la valeur approchée surpassoit la véritable valeur de  $f$ , on supposeroit cette valeur moins  $g$ , égale à  $f$ . On substituera cette valeur de  $f$  à sa place dans la première transformée, & il en viendra une seconde transformée: on trouvera la valeur approchée de la plus petite racine positive  $g$  de cette transformée par les formules, comme on a trouvé la valeur approchée de  $f$ , & on continuera l'approximation tant qu'on voudra.

La somme de la limite de la racine qu'on cherche, qui a servi à la première opération, & de toutes les valeurs approchées des inconnues des transformées, prises de suite, sera la valeur approchée de la racine qu'on cherche.

L'exemple qu'on en a donné suffit pour faire concevoir l'application des formules.

AVERTISSEMENT.

## A V E R T I S S E M E N T.

ON pourroit chercher une racine négative d'une équation proposée par les méthodes précédentes, en employant des limites négatives; mais comme il est facile \* de faire en sorte \* 48. que les racines négatives d'une équation proposée deviennent positives, en changeant les signes des termes pairs, il vaut mieux chercher les racines par les limites positives, cela accoutume à une même méthode, & la rend plus facile.

*Remarque sur cette quatrième méthode d'approximation, qu'il faut se rendre familières.*

## I.

161. C E T T E méthode fait trouver une racine d'une équation proposée par parties, que l'on découvre les unes après les autres; elle suppose qu'on sçait par une autre voye la première partie de la racine, qui en diffère très peu: mais elle fait trouver les autres parties par des transformées, dont les racines positives sont les racines positives de la proposée, diminuées chacune de la somme déjà trouvée des parties de la racine dont on fait la recherche, & dont les racines négatives sont les négatives de la proposée augmentées chacune de la même somme; & quand la somme déjà trouvée des parties de la racine dont on fait la recherche, surpasse cette racine, ou surpasse aussi d'autres racines positives de la proposée, la racine de la proposée dont on fait la recherche, & toutes ces autres racines positives, sont devenues négatives dans la transformée où cela se rencontre; puisqu'elles ont été trop diminuées; & il ne leur reste à chacune dans cette transformée, que l'excès dont la somme déjà trouvée des parties de la racine qu'on poursuit, surpasse chacune de ces racines positives de la proposée; & cet excès est négatif.

Ainsi si l'on appelle  $a$  la première partie de la racine dont on fait la recherche;  $b$ , la seconde partie;  $c$ , la troisième, & ainsi de suite, la première partie  $a$  est supposée connue d'ailleurs, & elle sert à trouver la seconde partie  $b$ , en transformant l'équation proposée, par exemple  $x^4 - nxx + px - q = 0$ , par la supposition de  $a + f = x$ , & par la substitution de cette valeur de  $x$  à sa place dans la proposée.

On remarquera sur cette première transformée, 1<sup>o</sup>. que les racines positives de la proposée, & par conséquent celle que l'on cherche, sont diminuées chacune de la grandeur  $a$ ; ainsi chacune des racines positives de la première transformée, est précisément l'excès des racines positives de la proposée plus grandes que  $a$  sur cette grandeur  $a$ ; & si  $a$  surpasse quelques racines positives de la proposée, elles deviennent négatives dans la transformée, & l'excès de  $a$  sur ces racines positives de la proposée, est précisément leur valeur négative pour ainsi parler, dans la transformée; & les autres racines négatives de la transformée étant augmentées chacune de  $a$ , leur valeur dans la transformée est la somme de chacune des racines négatives de la proposée & de la grandeur  $a$ .

2<sup>o</sup>. Par conséquent le terme tout connu, (qu'on nommera 119. ici le premier,) de la transformée, étant la somme toute connue qui vient de la grandeur  $a$ , substituée à la place de  $x$  dans la proposée; cette somme ou ce premier terme est le produit des différences qui sont entre chacune des racines positives de la proposée & la grandeur  $a$ , par les racines négatives de la proposée augmentées chacune de la grandeur  $a$ .

## I I.

162. La première transformée fait découvrir la seconde partie  $b$  de la racine de la proposée, dont on fait la recherche, par la première manière de la quatrième méthode; c'est le quotient qu'on trouve en divisant le premier terme tout connu de la première transformée par le coefficient du terme suivant, c'est-à-dire du terme où  $f$  est linéaire, (qu'on nommera ici le second terme,) ou, ce qui revient au même, cette seconde partie  $b$  est une fraction dont le numérateur est le premier terme tout connu de la transformée dont on a changé le signe, (car pour trouver cette fraction, on a supposé le premier terme égal au second, ce qui change le signe du premier terme,) & dégageant  $f$  dans cette équation, on trouve la fraction dont on vient de parler, & le dénominateur est le coefficient du second terme de la transformée. Mais comme le premier terme n'est pas égal au seul second terme, mais à tous les autres termes, quand on veut avoir la seconde partie  $b$  de la racine plus approchante de la veri-



table, il faut ajouter au dénominateur de cette fraction le produit du coefficient du troisieme terme par cette fraction, le produit du coefficient du quatrieme terme par le quarré de cette fraction, & ainsi de suite, en observant d'ajouter ces produits au dénominateur avec les signes qu'ont les coefficients dans la transformée; & la fraction qui naît de cette operation est la seconde partie  $b$  de la racine qu'on cherche plus approchante qu'elle n'auroit été.

Pour trouver la troisieme partie  $c$ , il faut faire une seconde transformée, en supposant  $b + g = f$ , & substituer cette valeur de  $f$  à sa place dans la transformée précédente; & l'on aura la seconde transformée, qui servira à faire découvrir la troisieme partie  $c$  de la racine qu'on cherche; de la même maniere que la premiere transformée a servi à faire trouver la seconde partie  $b$ .

Cette troisieme partie de la racine qu'on cherche, servira de même à former une troisieme transformée, en supposant  $c + b = g$ , & substituant cette valeur de  $g$  à sa place dans la seconde transformée; & cette troisieme transformée fera trouver la quatrieme partie  $d$  de la racine qu'on cherche, & ainsi de suite à l'infini.

## I I I.

163. On fera sur chacune de ces transformées, par rapport à la transformée qui la précède immédiatement, les mêmes remarques qu'on a faites sur la premiere transformée par rapport à l'équation proposée dont elle est la transformée immédiate; & on remarquera de plus, 1°. que si le premier terme d'une transformée se trouvoit égal à zero, l'on auroit la racine exacte de l'équation proposée qu'on cherche, qui seroit égale à la somme de toutes les parties de cette racine qui ont été découvertes, jusqu'à la transformée où cela arrive. Car la derniere partie découverte étant substituée à la place de l'inconnue dans la transformée qui précède celle dont le premier terme est égal à zero, donneroit une somme toute connue égale à zero, puisque cette somme est égale à ce premier terme; ainsi elle seroit la racine exacte de cette transformée qui précède celle dont le premier terme est égal à zero; l'on auroit donc précisément ce qui manquoit aux parties déjà découvertes de la racine qu'on cherchoit; par conséquent on l'auroit entiere.

2.<sup>o</sup>. Quand le premier terme d'une transformée a un signe différent de celui du premier terme de la transformée qui la précède immédiatement, dans ce cas la partie qui a servi à faire la transformée où cela se rencontre, est plus grande que la partie de la racine que l'on cherche; car si cette partie étoit plus petite que la partie que l'on cherche, elle donneroit au premier terme de la transformée le signe du premier terme de la transformée précédente\*, si elle étoit égale, elle donneroit zéro, & donnant un signe différent, elle est plus grande.

\* 122.

Remarques.

D'où l'on voit que si c'est par exemple la troisième partie  $c$ , qui change le signe de la troisième transformée, supposé que  $c$  fût positive, l'on trouvera par la méthode même la quatrième partie  $d$  négative, & dans ce cas il faudra supposer  $-d + i = b$ , pour faire la quatrième transformée, parceque la racine positive dont on faisoit la recherche, étant devenue négative dans la troisième transformée, la troisième partie  $c$  se trouve plus grande qu'il ne faut, ainsi il faut la diminuer dans la transformée suivante.

#### EV.

164. On peut rapporter immédiatement chaque transformée à l'équation proposée; on rapportera ici à l'équation proposée, la troisième transformée qui est faite par la supposition de  $c + b = g$ , & par la substitution de cette valeur de  $g$  à sa place dans la seconde transformée, & ce que l'on en dira, pourra facilement s'appliquer aux transformées les plus reculées de l'équation proposée.

Si l'on supposoit la somme de toutes les parties déjà découvertes de la racine qu'on cherche, plus une nouvelle inconnue  $h$ , égale à l'inconnue de l'équation proposée, par exemple si l'on supposoit  $a + b + c + h = x$ , (on a mis une ligne sur  $a + b + c$  pour marquer qu'on regarde cette somme comme une seule grandeur, ) & qu'on substituât cette valeur de  $x$  à sa place dans l'équation proposée, la transformée qui en viendrait, seroit précisément la troisième transformée; c'est-à-dire la transformée que l'on a trouvée en substituant  $c + b = g$ , à la place de  $g$  dans la seconde transformée.

Car les racines positives de la transformée qui viendrait de la substitution de  $a + b + c + h = x$ , à la place de  $x$

dans la proposée, seroient les racines positives de la proposée diminuées chacune de la grandeur  $a + b + c$ ; les négatives de la transformée seroient les négatives de la proposée augmentées chacune de la grandeur  $a + b + c$ ; & s'il se trouvoit que la grandeur  $a + b + c$  surpassât quelques racines positives de la proposée, ces racines seroient devenues négatives dans la transformée, & chacune de ces racines négatives seroit l'excès de  $a + b + c$  sur chacune des racines positives de la proposée, qui seroient moindres que  $a + b + c$ . Or en considérant avec attention la suite des transformations, depuis la proposée jusqu'à la troisième dont  $b$  est l'inconnue, on verra clairement que les racines positives & négatives de la troisième transformée, sont précisément les mêmes racines dont on vient de parler. Par conséquent la troisième transformée est précisément la même transformée qu'on trouveroit en substituant immédiatement dans l'équation proposée  $a + b + c + b$ , à la place de  $x$ .

D'où il suit aussi que si l'on substituoit avec des signes contraires la somme de toutes les parties qu'on a déjà découvertes de la racine qu'on cherche plus l'inconnue  $x$ , à la place de l'inconnue  $b$ , dans la troisième transformée, l'équation qui en viendrait, seroit exactement l'équation proposée; par exemple si l'on suppose  $-a - b - c + x = b$ , & qu'on substitue cette valeur de  $b$  à sa place dans la troisième transformée, l'équation qui en naîtra, sera l'équation proposée.

## V.

265. Si la grandeur  $a$  qu'on prend pour la première partie de la racine qu'on cherche, étoit la limite en dessus, c'est-à-dire, si  $a$  surpassoit la racine qu'on cherche, il faudroit supposer, pour faire la première transformée,  $a - f = x$ , & substituer cette valeur de  $x$  à sa place dans la proposée: Et l'on feroit sur cette transformée & sur les suivantes, des remarques semblables à celles qu'on a faites en supposant que la première partie  $a$  de la racine qu'on cherche, est moindre que cette racine. Mais il est mieux de prendre la première partie  $a$  plus petite que la racine, pour s'accoutumer à une même méthode.

Ou bien, pour suivre la même méthode, on supposera  $a + f = x$ , quoique  $a$  surpassé la racine qu'on cherche;

Xx iij;

on substituera  $a + f$  dans la proposée à la place de  $x$ , & le premier terme tout connu de la transformée qui en viendra, aura un signe opposé à celui du premier terme tout connu de la proposée; ce qui fera trouver la seconde partie  $b$  négative; & pour faire la seconde transformée, on supposera  $-b + g = f$ .

## A V E R T I S S E M E N T.

**O**N n'a fait ces remarques que sur la première manière qu'on a donnée dans la quatrième méthode de trouver par le moyen de chaque transformée, la partie de la racine qu'elle doit faire découvrir, quoiqu'elles puissent aussi convenir à la seconde manière; parceque cette seconde manière renfermant le signe radical  $\sqrt{\phantom{x}}$ , & obligeant à l'extraction des racines, le calcul en est plus embarrassant, & on peut moins facilement s'en servir dans l'approximation des racines des équations littérales.

Il faut se rendre ces remarques & la quatrième méthode bien familières, & la première manière qu'on a donnée dans la quatrième méthode, de trouver par chaque transformée la partie de la racine qu'elle doit faire découvrir, afin de concevoir clairement la méthode d'approximation des racines des équations littérales qu'on doit donner dans le 7<sup>e</sup> Livre, qui n'aura pas besoin de démonstration, n'étant qu'une application de cette quatrième méthode.

La quatrième remarque donne lieu à une autre pratique de la quatrième méthode, qu'on appellera une cinquième méthode d'approximation, pour faire mieux distinguer ces deux manières de pratiquer la quatrième méthode.

*Cinquième méthode pour trouver les valeurs approchées tant près qu'on voudra des racines des équations; ou autre pratique de la quatrième méthode.*

166. 1<sup>o</sup>. **O**N partagera en deux parties l'inconnue de l'équation proposée dont on veut trouver les racines; par exemple si on veut chercher la première racine de l'équation  $xx - 20x + 65 = 0$ , qui est entre 4 & 5, on supposera  $E + y = x$ ,  $E$  représentera la partie de la racine que l'on connoît déjà, & à mesure que l'on découvrira les parties de la racine qu'on cherche, on supposera que  $E$  représente toutes ces parties

déjà découvertes,  $y$  représentera ce qui reste à découvrir de la racine qu'on cherche.

On substituera  $E + y$  à la place de  $x$  dans la proposée, & l'on aura l'équation  $EE + 2Ey + yy = 0$ , qui représen-

$$- 20E - 20y$$

$$+ 65$$

tera toutes les transformées qui doivent servir à découvrir les parties de la racine qu'on cherche, les unes après les autres à l'infini: on l'appellera la transformée indéterminée. On suppose la première partie  $\frac{1}{4}$  de la racine, connue d'ailleurs. Pour trouver la seconde partie:

2°. On supposera que  $E$  représente  $\frac{1}{4}$ , & on substituera  $\frac{1}{4}$  à la place de  $E$  dans la transformée indéterminée, & l'on aura  $+1 - 12y + yy = 0$ ; pour trouver la valeur de  $y$ , on fera une équation du premier & du second terme, qui donnera  $y = \frac{1}{12}$ . C'est la seconde partie de la racine que l'on cherche; ou, ce qui est la même chose, on divisera le premier terme par le coefficient du second; & changeant le signe du quotient, l'on aura la seconde partie de la racine.

Si on vouloit une seconde partie plus approchée, on feroit ce raisonnement, comme dans la quatrième méthode. Le premier terme 1 n'est pas seulement égal au second  $12y$ , mais  $-1 = -12y + yy$ , ainsi  $y = \frac{1}{12} - \frac{1}{144}$ , & mettant la valeur de  $y = \frac{1}{12}$  déjà découverte, à la place de  $y$  dans le second membre, on auroit  $y = \frac{1}{144}$ , qui est une valeur un peu plus approchée. Mais pour éviter la longueur du calcul, on prendra ici  $y = \frac{1}{12}$ , pour la seconde partie de la racine.

3°. Pour avoir la troisième partie de la racine, on supposera que  $E$  dans la transformée indéterminée représente la somme  $\frac{1}{4} + \frac{1}{12}$  des parties de la racine déjà découvertes, & que  $y$  représente ce qui en reste à découvrir: On substituera dans cette transformée  $\frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{49}{144}$  à la place de  $E$ , & l'on aura  $+ \frac{1}{144} - \frac{142}{12}y + yy = 0$ . On divisera le premier terme  $+ \frac{1}{144}$  par le coefficient  $-\frac{142}{12}$  du second terme, & changeant le signe du quotient, on aura  $+ \frac{1}{1704}$  pour la troisième partie de la racine qu'on cherche.

4°. Pour trouver la quatrième partie de la racine, on supposera dans la transformée indéterminée, que  $E$  représente la somme des parties de la racine déjà découvertes,  $\frac{1}{4} + \frac{1}{12}$

$+ \frac{1}{1754} = + \frac{6212}{1704}$  ; on substituera cette valeur de  $E$  à la place dans la transformée indéterminée, & prenant ensuite le quotient du premier terme de l'équation qui en viendra, divisé par le coefficient du second terme, & changeant le signe de ce quotient, ce sera la quatrième partie qu'on cherche.

On peut continuer cette approximation à l'infini. Cet exemple, qui n'est pas composé, suffit pour faire concevoir clairement cette méthode, qui est démontrée par la quatrième méthode, & par les remarques, & sur-tout la 4<sup>e</sup>. Il est évident que la partie de la racine représentée par  $E$ , ne fait qu'augmenter, pendant que celle qui est représentée par  $y$ , ne fait que diminuer.

Pour se rendre cette méthode familière, on peut continuer l'approximation précédente, & chercher la seconde racine de la proposée, qui surpasse 15, & qui est moindre que 16. On peut aussi chercher, par la même méthode, les racines de l'équation  $x^3 - 2700x + 32400 = 0$ , dont la plus petite est entre 12 & 13 ; la 2<sup>e</sup>, entre 44 & 45 ; & la 3<sup>e</sup>, entre 57 & 58.

On va faire ici l'application de cette cinquième méthode à l'approximation des racines des puissances numériques imparfaites.

*Usage de la cinquième méthode d'approximation des racines des équations, pour trouver les valeurs approchées tant près qu'on voudra des racines des puissances numériques imparfaites.*

167. ON suppose qu'on a trouvé par la méthode de l'extraction des racines de l'arithmétique, la racine de la plus grande puissance parfaite contenue dans la puissance numérique imparfaite ; ce sera la première partie de la racine qu'on cherche, qui ne diffère pas de la racine véritable, qui est incommensurable, d'une unité entière ; il faut trouver les autres parties de cette racine, & en continuer l'approximation à l'infini, ou autant près qu'on voudra de la véritable racine, qu'on ne peut pas exprimer par nombres.

10. On supposera que la racine de la plus grande puissance parfaite contenue dans la puissance numérique imparfaite dont on cherche la racine, est représentée par  $E$ , & l'excès de la puissance numérique imparfaite sur la plus grande puissance parfaite qui y est contenue, est représentée par  $D$  ; ces

ces deux nombres sont supposez connus. Ainsi  $EE + D$  sera l'expression de toutes les secondes puissances numeriques imparfaites ;  $E^3 + D$ , celle de toutes les troisiemes puissances ;  $E^4 + D$ , de toutes les quatriemes ;  $E^5 + D$ , de toutes les cinquiemes ; & ainsi de suite.

2°. On supposera que  $E + x$  representent les deux parties de la racine qu'on cherche ; sçavoir  $E$ , celle qui est connue ; &  $x$ , celle qui est inconnue & que l'on cherche ; ce qui donnera les équations suivantes :  $E + x = \sqrt{EE + D}$ , pour les secondes puissances :  $E + x = \sqrt[3]{E^3 + D}$ , pour les troisiemes :  $E + x = \sqrt[4]{E^4 + D}$ , pour les quatriemes ; & ainsi de suite.

3°. On ôtera les incommensurables de ces équations, & l'on aura  $-D + 2Ex + xx = 0$ , pour les secondes puissances ;  $-D + 3EEx + 3Exx + x^3 = 0$ , pour les troisiemes ;  $-D + 4E^2x + 6EExx + 4Ex^3 + x^4 = 0$ , pour les quatriemes ;  $-D + 5E^3x + 10E^2xx + 10EEEx^2 + 5Ex^3 + x^5 = 0$ , pour les cinquiemes ;  $-D + 6E^4x + 15E^3xx + 10E^2x^2 + 15EEEx^2 + 6Ex^3 + x^6 = 0$ , pour les sixiemes ; & ainsi des autres suivantes.

Ces équations seront les transformées indéterminées comme dans la cinquieme methode, chacune pour son degré.  $E$  représentera d'abord la premiere partie de la racine qu'on cherche ; & substituant cette premiere partie à la place de  $E$ , on trouvera la seconde partie comme dans la 5<sup>e</sup> methode ; puis substituant la somme des deux premieres parties à la place de  $E$ , on trouvera la troisieme ; après substituant la somme des trois premieres parties à la place de  $E$ , on trouvera la quatrieme partie ; & ainsi à l'infini.

168. Le premier terme  $D$  est toujours entierement connu quand on commence l'operation, puisque c'est le reste connu de la puissance numerique imparfaite, qui demeure après avoir ôté de cette puissance imparfaite la plus grande puissance parfaite qui y est contenue.

Quand on a trouvé la seconde partie de la racine par la substitution de la premiere partie, qu'on suppose connue, à la place de  $E$ , pour avoir la seconde valeur de  $D$ , il faut substituer cette seconde partie de la racine qu'on vient de trouver, à la place de  $x$ , & laisser la premiere partie substituée à la place de  $E$  ; & la somme toute connue qui vient

- \* 119. de cette substitution, est le second  $D^*$ , qui doit servir pour trouver la troisième partie.

Quand on aura trouvé cette troisième partie par la substitution de la somme des deux parties déjà découvertes à la place de  $E$  dans l'équation transformée indéterminée, où l'on a laissé la valeur du  $D$  précédent, il faudra substituer cette troisième partie à la place de  $x$ , & la somme toute connue qui viendra de cette substitution, sera le troisième  $D$ , ou la troisième valeur de  $D$ , qui doit servir pour trouver la quatrième partie.

Quand on aura découvert cette quatrième partie par la substitution de la somme des trois premières parties déjà connues à la place de  $E$ , il faudra substituer cette quatrième partie qu'on vient de découvrir à la place de  $x$ , & la somme toute connue qui naîtra de cette substitution, sera le 4<sup>e</sup>  $D$ , ou la 4<sup>e</sup> valeur de  $D$ , qui doit servir à faire découvrir la 5<sup>e</sup> partie, & ainsi à l'infini.

169. Ou bien pour avoir la valeur de  $D$ , qui sert à trouver chaque partie, par exemple la quatrième, il n'y a qu'à élever à la même puissance dont on cherche la racine, la somme de toutes les parties déjà trouvées, par exemple des trois premières, & ôter la puissance de cette somme de la puissance numérique imparfaite proposée; le reste sera la valeur de  $D$  qu'on cherche.

On peut faire comme dans la quatrième méthode, des formules générales dans chaque degré, pour trouver les parties de la racine qu'on cherche, les unes après les autres, la première partie étant supposée connue.

*Formules générales pour l'approximation des racines des puissances numériques imparfaites.*

170. Pour les racines des secondes puissances . . .  $x = \frac{D}{2E + \frac{D}{2E}}$

Pour les racines des troisièmes puissances . . .  $x = \frac{D}{3EE + \frac{D}{E} + \frac{DD}{9E^2}}$

Pour les racines des quatrièmes puissances . . .  $x = \frac{D}{4E^3 + \frac{3D}{2E} + \frac{DD}{4E^2} + \frac{D^2}{64E^3}}$



Pour les racines des cin-  
quièmes puissances.

$$x = \frac{D}{5E^4 + \frac{2D}{E} + \frac{2DD}{5E^3} + \frac{D^3}{25E^{11}} + \frac{D^4}{725E^{16}}}$$

On peut facilement trouver, comme dans la 4<sup>e</sup> methode, les formules pour les puissances suivantes à l'infini, si l'on en a besoin.

Pour trouver par le moyen de ces formules la racine cubique, par exemple de 12; 1<sup>o</sup>. le plus grand cube contenu dans 12, est 8, dont la racine cubique est 2; ainsi  $2 = E$ ;  $12 = 8 + 4 = E^3 + D$ , & le premier  $D = 4$ . L'équation indéterminée du troisième degré, qui représente toutes les transformées qui feront trouver les parties de la racine qui suivent la première qui est 2, est  $-D + 3EEx + 3Exx + x^3 = 0$ : La formule qui sert à trouver ces parties représentées par  $x$ , déduite de cette équation, est  $x = \frac{D}{3EE + \frac{D}{E} + \frac{DD}{9E^2}}$ .

Ces choses supposées:

2<sup>o</sup>. Pour trouver la seconde partie de la racine, on substituera dans cette formule 4 à la place de  $D$ , & 2 à la place de  $E$ ; & l'on aura la seconde partie  $= \frac{4}{12 + 2 + \frac{1}{9}} = \frac{36}{127}$ .

Pour avoir la seconde valeur de  $D$ , qui servira à trouver la troisième partie de la racine, on substituera dans l'équation  $-D + 3EEx + 3Exx + x^3 = 0$ , 4 à la place de  $D$ ; 2 à la place de  $E$ ; &  $\frac{36}{127}$  à la place de  $x$ ; & l'on aura  $-4 + 12 \times \frac{36}{127} + 6 \times \left(\frac{36}{127}\right)^2 + \left(\frac{36}{127}\right)^3 = -\frac{115716}{2048181}$ , pour la seconde valeur de  $D$ , qu'on trouveroit aussi en élevant la somme des deux parties déjà trouvées  $2 + \frac{36}{127}$  à la 3<sup>e</sup> puissance, & retranchant cette 3<sup>e</sup> puissance de la proposée 12, le reste feroit la seconde valeur de  $D$ .

3<sup>o</sup>. Pour trouver la troisième partie de la racine qu'on cherche, il faut substituer dans la formule  $x = \frac{D}{3EE + \frac{D}{E} + \frac{DD}{9E^2}}$

à la place de  $D$ , la valeur qu'on vient de trouver, & à la place de  $E$ , la somme  $2 + \frac{36}{127}$  des parties de la racine déjà découvertes, &c.

On peut continuer l'approximation à l'infini: ces opérations suffisent pour faire clairement concevoir la méthode.

271. Si L'on veut des formules où il faut extraire la racine quar-  
rée, on les formera comme dans la quatrième méthode;  
elles sont inutiles pour tirer les racines des quarrés impar-  
faits. Voici la maniere de les former pour trouver les valeurs  
approchées des racines troisièmes des troisièmes puissances  
imparfaites, dont l'équation indéterminée est  $-D + 3EEx + 3Exx + x^3 = 0$ . Il faut faire une équation des trois pre-  
miers termes, & l'on aura  $-D + 3EEx + 3Exx = 0$ , ou  
bien  $xx + Ex = \frac{D}{3E}$ , d'où l'on tire  $x = -\frac{1}{2}E + \sqrt{\frac{1}{4}EE + \frac{D}{3E}}$ .

C'est la formule par où il faut commencer pour trouver  
chaque partie de la racine qu'on cherche, la premiere  
partie étant supposée connue: Et pour rendre cette partie  
de la racine encore plus approchanté, on supposera cette  
premiere valeur de chaque partie  $= m$ , & ensuite on con-  
siderera l'équation indéterminée entiere  $-D + 3EEx + 3Exx + x^3 = 0$ , comme étant du second degré, l'or-  
donnant ainsi  $3Exx + 3EEx = D - x^3$ , ou plutôt  $xx + Ex$

$$= \frac{D}{3E} - \frac{x^3}{3E}, \text{ d'où l'on tirera } x = -\frac{1}{2}E + \sqrt{\frac{1}{4}EE + \frac{D}{3E} - \frac{x^3}{3E}};$$

& mettant dans le 2<sup>e</sup> membre la valeur de  $x$  déjà trouvée,

$$\text{qu'on a supposée } = m, \text{ on aura } x = -\frac{1}{2}E + \sqrt{\frac{1}{4}EE + \frac{D}{3E} - \frac{m^3}{3E}}.$$

C'est la formule corrigée, qui à chaque operation fera trou-  
ver une partie très-approchante de la racine qu'on cherche.

On trouvera de la même maniere que pour découvrir les  
parties de la racine d'une quatrième puissance imparfaite,  
il faut commencer, en cherchant chaque partie, par la

$$\text{formule } x = -\frac{1}{3}E + \sqrt{\frac{1}{9}EE + \frac{D}{6EE}}; \text{ \& cette partie étant}$$

découverte par cette formule, on la supposera  $= m$ , & on  
l'approchera encore plus par cette formule corrigée  $x =$

$$-\frac{1}{3}E + \sqrt{\frac{1}{9}EE + \frac{D}{6EE} - \frac{m^3}{3E} - \frac{m^4}{6EE}}.$$

Pour la cinquième puissance, on commencera par la for-

$$\text{mule } x = -\frac{1}{4}E + \sqrt{\frac{1}{16}EE + \frac{D}{10E^3}}; \text{ \& après avoir trouvé}$$

la valeur de la partie qu'on cherche par cette formule, on  
la supposera  $= m$ , & on se servira ensuite de la formule

$$\text{corrigée } x = -\frac{1}{4}E + \sqrt{\frac{1}{16}EE + \frac{D}{10E^3} - \frac{m^3}{E} - \frac{m^4}{2EE} - \frac{m^5}{10E^2}}.$$

Il est facile de trouver les formules pour l'approximation des racines des puissances numeriques imparfaites plus élevées, si l'on en a besoin.

Pour se servir de ces formules dans l'approximation des racines des puissances imparfaites, par exemple pour approcher de la racine cubique de  $12 = 8 + 4$  : 1°. on substituera dans la formule par où il faut commencer, la premiere partie de la racine qui est 2, à la place de  $E$ , & 4 à la place de  $D$ , & l'on aura la seconde partie de la racine qu'on cherche. Pour l'approcher d'avantage, on la supposera cette seconde partie représentée par  $m$ , & on la substituera avec les précédentes valeurs de  $E$  & de  $D$  dans la formule corrigée, & l'on aura la seconde partie de la racine très-approchée.

Pour trouver la troisième partie de la racine, on cherchera la seconde valeur de  $D$ , comme aux articles 168, 169; on substituera cette valeur de  $D$  à sa place dans la formule par où il faut commencer, & la somme des deux parties de la racine déjà découvertes, à la place de  $E$ ; & on aura la troisième partie de la racine. Pour la corriger, c'est-à-dire pour la rendre plus approchante, on la regardera comme représentée par  $m$ , & on la substituera avec les valeurs précédentes de  $D$  & de  $E$  dans la formule corrigée; & l'on aura la troisième partie de la racine très-approchante. On réitérera l'operation tant qu'on voudra: mais le calcul en étant plus penible que celui qu'il faut employer dans l'usage des premieres formules, on peut se contenter de ces premieres formules; & il suffit ici d'avoir fait concevoir clairement la formation & l'usage des unes & des autres.

## SECTION IV.

*Où l'on enseigne à résoudre toutes les équations numeriques.*

### PROBLÈME IV.

172. RESOUDRE toute équation numerique de quelque degré qu'elle puisse être, lorsqu'elle n'a qu'une inconnue.

C'EST-à-dire trouver les racines commensurables d'une équation numerique, lorsqu'elle en a de commensurables; trouver les valeurs approchées des racines incommensurables.

furables, & en continuer l'approximation à l'infini, déterminer si elle a des racines imaginaires, & si la proposée a de ces racines, en déterminer le nombre.

On suppose que l'équation proposée n'a point de fractions ni d'incommensurables; que son premier terme n'a pas d'autre coefficient que l'unité; qu'elle a tous ses termes, & qu'ils ont alternativement les signes + & —.

## M É T H O D E.

\* 148. 1°. **I**L faut trouver par le premier Problème\* toutes les équations des limites de l'équation proposée.

2°. La racine de l'équation lineaire des limites sera la limite moyenne des deux racines de l'équation des limites du second degré; zero & son plus grand coefficient négatif rendu positif & augmenté de l'unité, en seront les limites extrêmes. Par le moyen de la limite zero & de la limite moyenne, on trouvera la première & plus petite racine de l'équation des limites du second degré, par les méthodes du troisième Problème si elle est commensurable, ou sa valeur approchée si elle est incommensurable. On trouvera de même en se servant de la limite moyenne & de la plus grande limite extrême, la seconde racine de la même équation, ou sa valeur approchée.

Les racines de l'équation des limites du second degré, ou leurs valeurs approchées, seront prises pour les limites moyennes des racines de l'équation des limites du 3<sup>e</sup> degré; zero & son plus grand coefficient négatif augmenté de l'unité, en seront les limites extrêmes. On trouvera par le moyen de ces limites les racines de cette équation ou leurs valeurs approchées, qu'on prendra pour les limites moyennes des racines de l'équation des limites du quatrième degré, dont zero & le plus grand coefficient négatif augmenté de l'unité seront les limites extrêmes. On trouvera par le moyen de ces limites les racines de cette équation du quatrième degré, ou leurs valeurs approchées, qui seront les limites moyennes des racines de l'équation des limites du cinquième degré; zero & le plus grand coefficient négatif de cette équation du cinquième degré augmenté de l'unité, seront les limites extrêmes, & par le moyen de ces limites on trouvera les racines de cette équation ou leurs valeurs approchées.

Continuant ces opérations jusqu'à l'équation proposée, de quelque degré qu'elle soit, on en trouvera toutes les racines lorsqu'elles sont commensurables, ou leurs valeurs approchées.

3°. Si l'on trouve qu'une des limites, c'est-à-dire une des racines d'une équation des limites, étant substituée dans l'équation du degré immédiatement plus élevé, & dans toutes celles qui précèdent, à la place de l'inconnue, donne zero; c'est-à-dire, si toutes ces équations ont une racine commune, il y a des racines égales dans la proposée: on en a marqué dans le premier Problème la manière d'en déterminer le nombre.

4°. Lorsque la racine d'une équation des limites étant substituée à la place de  $x$  dans l'équation immédiatement plus élevée d'un degré, ne donne ni zero, ni une somme toute connue qui ait le signe  $+$  ou  $-$  que doit donner cette racine prise pour limite moyenne, il y a des racines imaginaires dans la proposée; & comme les racines imaginaires sont toujours deux à deux, il y en a deux fois autant que cela arrive de fois.

*Application de la méthode aux exemples.*

## E X E M P L E I.

POUR trouver les racines de  $x^4 - 80x^3 + 1998xx - 14937x + 5000 = 0$

1°. on en trouvera par le premier Problème les équations des limites, comme on les voit ici:

1<sup>re</sup> équation  
des limites.

$$\begin{array}{rcccccc} 4 & 3 & 2 & 1 & 0: & \\ \hline 4x^4 - 240x^3 + 3996xx - 14937x = 0 \\ \text{ou } 4x^3 - 240xx + 3996x - 14937 = 0 \\ \hline 3 & 2 & 1 & 0. \end{array}$$

2<sup>e</sup> équation  
des limites.

$$\begin{array}{l} 12x^3 - 480xx + 3996x = 0 \\ \text{ou } 12xx - 480x + 3996 = 0, \\ \text{ou bien encore en divisant chaque} \\ \text{terme par 12, qui s'en trouve un} \\ \text{diviseur exact:} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccc} xx - 40x + 333 = 0 \\ 2 & 1 & 0. \end{array}$$

3<sup>e</sup> équation  
des limites.

$$\begin{array}{l} 2xx - 40x = 0 \\ \text{ou } x - 20 = 0. \end{array}$$

20. On prendra la racine 20 de l'équation lineaire  $x - 20 = 0$ , pour la limite moyenne des deux racines de la seconde équation des limites  $xx - 40x + 333 = 0$ ; & l'on prendra zero & le plus grand coefficient négatif augmenté de l'unité pour les limites extrêmes; & les limites des racines seront 0, 20, 41.

2156. On cherchera par la premiere methode du 3<sup>e</sup> Problème, \* la premiere & plus petite racine de  $xx - 40x + 333 = 0$ , en se servant des limites 0 & 20; & l'on trouvera que cette racine est incommensurable, & qu'elle est entre 11 qui donne + 14, & 12 qui donne - 3. On prendra pour la valeur approchée de cette premiere racine 11 ou 12.

On trouvera de même en se servant des limites 20 & 41, que la seconde racine est incommensurable, & qu'elle est entre 28 qui donne, étant substituée à la place de  $x$ , la somme toute connue - 3, & 29 qui donne + 14. On prendra pour la valeur approchée de cette seconde racine 28 ou 29.

Ainsi 0, 12, 28, & le plus grand coefficient négatif de la premiere équation des limites  $4x^3 - 240xx + 3996x - 14937 = 0$ , seront les limites de cette équation. Pour avoir ce plus grand coefficient négatif, il faut diviser tous les termes par le coefficient 4 du premier terme, afin d'avoir l'équation  $x^3 - 60xx + 999x - 3734\frac{1}{4} = 0$ , dont le premier terme n'a pas d'autre coefficient que l'unité; & ses limites seront 0, 12, 28, 3736.

On trouvera par la premiere methode du troisieme Problème, en se servant des limites 0 & 12, que la premiere & plus petite racine est entre 5 qui donne le signe -, & 6 qui donne le signe +. On prendra pour la valeur approchée de cette racine 5 ou 6.

On trouvera de même en se servant des limites 12 & 28, que la seconde racine est entre 21 qui donne +, & 22 qui donne -. On prendra pour la valeur approchée de cette seconde racine 21 ou 22.

On trouvera en se servant des limites 28 & 3736, que la troisieme racine est entre 34 qui donne -  $24\frac{1}{4}$ , & 35 qui donne +  $605\frac{1}{4}$ . On prendra pour la valeur approchée de cette racine 34 ou 35.

Ainsi les limites des racines de la proposée sont 0, 6, 21, 34, 14938.

On trouvera par la premiere methode du troisieme Problème, en se servant des deux limites 0 & 6, que la premiere & plus petite racine de la proposée, est entre zero & l'unité, & si on se sert ensuite de la troisieme methode, on trouvera qu'elle est entre  $\frac{1}{10}$  &  $\frac{2}{10}$ ; car  $\frac{2}{10}$  donne +, &  $\frac{1}{10}$  donne —.

On trouvera de même, en se servant des deux limites 6 & 21, que la seconde racine de la proposée est entre 12 qui donne —, & 13 qui donne +.

On trouvera, en se servant des deux limites 21 & 34, que la troisieme racine de la proposée est entre 32 qui donne +, & 33 qui donne —.

Enfin on trouvera en se servant des deux limites 34 & 14938, que la quatrieme & plus grande racine de la proposée est entre 34 qui donne —, & 35 qui donne +.

Ainsi les quatre racines de la proposée sont incommensurables; la premiere ou plus petite surpasse  $\frac{1}{10}$ , & est moindre que  $\frac{2}{10}$  qui sont ses valeurs approchées.

Les valeurs approchées en entiers de la seconde, sont la moindre 12 & la plus grande 13.

Les valeurs approchées en entiers de la troisieme, sont la moindre 32 & la plus grande 33.

Les valeurs approchées en entiers de la quatrieme, sont la moindre 34 & la plus grande 35.

Si l'on veut après cela approcher à l'infini de chacune de ces racines, il faut se servir de la troisieme methode du troisieme Problème; \* & si l'on ne craint pas la longueur du \* 158. calcul, il faut se servir de la quatrieme methode, \* par le \* 159. moyen de laquelle on trouve à chaque operation des valeurs extrêmement approchées des racines qu'on cherche, & qu'on ne sçauroit trouver exactement par les nombres; puisqu'elles sont incommensurables.

*Remarques pour la pratique de ce Problème.*

I.

**I**L faut toujours avoir en vûe le signe que doit donner chaque limite: Que la moindre limite & toutes les grandeurs moindres que la plus petite racine d'une équation, doivent donner le signe du dernier termé de cette équation.

Que la seconde limite & toutes les grandeurs moindres que la seconde racine, mais plus grande que la premiere,

doivent donner le signe contraire à celui du dernier terme:

Que la troisième limite & toutes les grandeurs moindres que la troisième racine; mais plus grandes que la seconde, doivent donner le signe du dernier terme.

Que la quatrième limite & toutes les grandeurs moindres que la quatrième racine, mais plus grandes que la troisième, doivent donner le signe contraire à celui du dernier terme.

Et ainsi de suite jusqu'à la dernière & plus grande limite, qui doit toujours donner le signe +, & toutes les grandeurs qui surpassent la plus grande & dernière racine, doivent donner le même signe +.

Qu'entre les grandeurs qui sont moyennes entre les deux mêmes racines, & qui donnent le même signe, celles qui donnent de moindres restes que les autres, approchent plus de la racine qu'on cherche.

### I I.

Quand on cherche les racines d'une équation des limites, ou de la proposée, dont on a les limites; il faut toujours commencer par la première méthode du troisième Problème, \* & la continuer jusqu'à ce qu'on ait trouvé les racines exactes, lorsqu'elles sont commensurables; ou, quand elles sont incommensurables, jusqu'à ce qu'on ait trouvé leurs valeurs approchées en entiers, qui ne diffèrent entre elles que de l'unité, dont l'une soit moindre & l'autre plus grande que la racine qu'on cherche.

\* 156. S'il faut ensuite trouver des valeurs en fractions qui approchent de plus en plus à l'infini, on se servira de la troisième méthode du troisième Problème, \* & si l'on veut bien prendre la peine du calcul, on se servira de la quatrième méthode, \* par laquelle on trouve à chaque opération des valeurs qui approchent bien de plus près de la racine qu'on cherche.

### I I I.

Lorsque les racines d'une équation des limites sont commensurables, on les appellera les limites exactes, & l'on est assuré qu'étant substituées à la place de l'inconnue dans l'équation dont elles sont les limites, elles donneront les signes qu'elles doivent donner, sans même en faire la substitution, si les racines de cette équation sont inégales; & que celles des limites qui sont égales à quelques-unes des racines, donneront zero, quand il y a des racines égales; & qu'enfin



celles de ces limites exactes qui ne donneront ni zero, ni le signe qu'elles doivent donner, feront connoître qu'il y a des racines imaginaires dans l'équation dont elles sont les limites, & dans la proposée.

Mais quand les racines d'une équation des limites ne sont pas commensurables, l'on n'est pas assuré que leurs valeurs approchées en nombres entiers, qu'on appellera ici les limites approchées en entiers, donnent toujours les signes qu'elles doivent donner. Comme cependant il arrive ordinairement que les limites approchées en nombres entiers, donnent les signes que doivent donner les limites exactes, parce qu'ordinairement les racines des équations dont elles sont les limites, diffèrent entr'elles de plusieurs unitez, quand on a trouvé ces limites approchées par la premiere méthode, il faut les substituer à la place de l'inconnue dans l'équation dont elles sont les limites, pour voir si elles donnent les signes qu'elles doivent donner, & si l'on trouve qu'elles les donnent, il faut s'en servir pour trouver les racines, comme l'on a fait dans l'exemple précédent.

Si les limites approchées en nombres entiers, ne donnent pas les signes des limites exactes, ce qui arrive lorsque les racines de l'équation dont elles sont les limites, sont incommensurables, & ne diffèrent entr'elles que par des grandeurs moindres que l'unité, il faut alors continuer l'approximation des limites par la 3<sup>e</sup> ou 4<sup>e</sup> méthode.

Ou bien il faut d'abord multiplier les racines de la proposée par 10, ou par 100, ou 1000, &c. en mettant un ou plusieurs zeros au second terme, deux fois autant au troisième terme, trois fois autant au quatrième terme, & ainsi de suite; & après cela les racines différeront entr'elles de plusieurs unitez, & les limites approchées en nombres entiers qu'on trouvera, donneront les signes que doivent donner les limites exactes, lorsque les racines de la proposée seront réelles & différentes entr'elles: & si elles ne les donnoient pas, ce seroit une marque qu'il y auroit dans la proposée des racines égales incommensurables, ou des racines imaginaires. On en fera une remarque à la fin des exemples.

Mais quand on a ajouté des zeros au second terme de la proposée & aux autres termes, il faut diviser les valeurs approchées des racines de la proposée, quand on les aura

trouvées, par l'unité précédée d'autant de zeros qu'on en a mis au second terme de la proposée, & ces fractions seront les valeurs approchées des racines de la proposée.

Il faut donc remarquer qu'on trouvera toujours les limites approchées en nombres entiers, du moins en ajoutant des zeros au second terme & aux autres termes de la proposée, lorsque sans cela on ne peut pas les trouver en entiers; ou des limites approchées en fractions, en continuant l'approximation par la troisième ou quatrième méthode, lesquelles limites donneront les signes que doivent donner les limites exactes, lorsque les racines de l'équation sont toutes réelles & inégales.

Ainsi si l'on ne pouvoit pas trouver ces limites, ce seroit une marque assurée que les racines de la proposée ne seroient pas toutes inégales, & qu'il y en auroit d'égales, mais incommensurables, ou bien qu'il y auroit des racines imaginaires.

#### I V.

On peut souvent diminuer le calcul de la méthode de ce quatrième Problème, en faisant quelques tentatives, surtout en deux choses.

La première est, quand la plus grande limite, qui est le plus grand coefficient négatif rendu positif & augmenté de l'unité, surpasse considérablement la limite pénultième, comme dans le premier exemple, où la plus grande limite 14938, surpasse considérablement la pénultième limite 34; au lieu de se servir de la plus grande limite, on peut faire quelques tentatives sur des grandeurs plus approchantes de la limite pénultième, comme dans le premier exemple on peut essayer si la substitution de 40 à la place de l'inconnue, ne donnera point le signe + de la plus grande limite, & comme l'on trouve que 40 donne le signe +, on est assuré que 40 surpasse la plus grande racine de la proposée; & on se servira des limites 34 & 40, pour la trouver par la première méthode, au lieu des limites 34 & 14938.

La seconde est, qu'avant de résoudre les premières & les plus composées équations des limites, c'est-à-dire avant d'en chercher toutes les racines, on peut faire des tentatives, pour voir si les racines exactes ou approchées des dernières & plus simples équations des limites, ne peuvent point servir immédiatement de limites aux racines de la proposée, en

substituant ces racines des dernières équations des limites, à la place de l'inconnue, immédiatement dans l'équation proposée; on trouvera le plus souvent qu'elles donnent les signes que doivent donner les limites des racines de la proposée, & on les prendra dans ce cas pour ces limites des racines de la proposée.

Par exemple, lorsqu'on a trouvé que les racines approchées de l'équation des limites du second degré dans le premier exemple, sont la plus petite 11 ou 12, la plus grande 28 ou 29, on substituera la première de ces racines 11 ou 12, à la place de l'inconnue dans la proposée; & trouvant une somme toute connue qui a le signe —, qui est celui que doit donner la seconde limite des racines de la proposée, on prendra 11 ou 12 pour la seconde limite, & l'on aura pour les deux limites de la première & plus petite racine de la proposée, 0 & 12.

On substituera de même 28 ou 29, & trouvant que 28 ou 29 donne le signe +, qui est celui que doit donner la troisième limite, on prendra 12 & 28 pour les deux limites dont il faut se servir pour chercher la seconde racine de la proposée.

D'où l'on voit que pour avoir toutes les limites de la proposée, il ne faudra plus chercher que la grandeur qui surpasse 28, & qui donne le signe —, c'est-à-dire la limite qui surpasse la troisième racine de la proposée, & qui est moindre que la quatrième; ainsi il ne faudra chercher dans l'équation des limites du troisième degré, que la plus grande racine seule, dont les limites sont 28 & 3736, & le calcul se trouve bien abrégé par ces tentatives.

Un peu de pratique fera trouver beaucoup d'autres abrégez.

## E X E M P L E I I.

**P**OUR trouver les racines de l'équation  $x^3 - 7xx + 6 = 0$ , qui n'est que du troisième degré, par lesquelles on aura les valeurs de  $x$  linéaire dans cette équation; 1°. il faut la transformer en une autre équation qui ait tous ses termes avec les signes alternatifs + & —; ce qui se fera en supposant  $z - xx = z$ ; d'où l'on aura  $xx = 8 - z$ ; & substituant

Zz iij.

8 —  $x$  à la place de  $x$ , on aura la transformée que voici, qu'on regardera comme la proposée.

2°. Il faut en trouver les équations des limites, comme on les voit ici :

$$\begin{array}{rcccc} x^3 & - & 14xz & + & 185z & - & 462 & = & 0. \\ 3 & & 2 & & 1 & & 0 \end{array}$$


---

$$3x^2 - 48xz + 185z = 0;$$

divisant par  $3z$ , on aura la première équation des limites,

$$\begin{array}{rccc} x^2 & - & 16x & + & 61\frac{2}{3} & = & 0. \\ 2 & & 1 & & 0. \end{array}$$


---

$$2xz - 16z = 0;$$

divisant par  $2z$ , on aura la dernière équation des limites,

$$x - 8 = 0.$$

3°. Il faut prendre la racine 8 de l'équation linéaire des limites  $x - 8 = 0$ , pour la limite moyenne entre les deux racines de la première équation des limites, & les trois limites des deux racines de cette première équation des limites seront 0, 8, 17.

En cherchant la première, c'est-à-dire, la plus petite racine de l'équation  $x^2 - 16x + 61\frac{2}{3} = 0$ , par le moyen de ses deux limites 0 & 8, on trouve qu'elle surpasse 6, & qu'elle est moindre que 7.

Pour abréger, on pourra, avant de chercher la seconde racine de la première équation des limites, tenter si la substitution de l'une ou l'autre des limites 6 ou 7, à la place de  $x$  dans la proposée, ne donneroit point le signe + que doit donner la seconde limite des racines de la proposée, & en servir elle-même, en cas qu'elle le donne. Mais trouvant que la substitution de 6 au lieu de  $x$  dans la proposée donne zero, on a par cette simple opération 6 pour la première racine de la proposée  $x^3 - 14xz + 8c$ .

Pour abréger encore le calcul, on divisera la proposée  $x^3 - 14xz + 8c$  par l'équation linéaire  $x - 6 = 0$ , qui contient la première racine; & l'on aura le quotient  $x^2 - 18x + 77 = 0$ , qui contient les deux autres racines de la proposée.

On pourra enfin, pour abréger, résoudre cette équation qui contient les deux autres racines de la proposée, par la

méthode qui convient au second degré, & l'on trouvera que ses racines sont 7 & 11.

Pour achever la résolution, on substituera successivement les trois racines 6, 7 & 11 de la transformée  $z^3 - 24xz + 8c$ , dans l'équation  $8 - xx = z$ , ou  $xx = 8 - z$ , qui a servi à la transformation; & l'on trouvera les trois valeurs de  $xx$  dans  $x^3 - 7xx + 6 = 0$ , qui sont  $xx = 1$ ,  $xx = 2$ ,  $xx = -3$ .

D'où l'on tirera les six valeurs de  $x$  lineaire, dans la proposée  $x^3 - 7xx + 6 = 0$ , qui sont  $x = +\sqrt{1}$ ,  $x = -\sqrt{1}$ ;  $x = +\sqrt{2}$ ,  $x = -\sqrt{2}$ ;  $x = +\sqrt{-3}$ ,  $x = -\sqrt{-3}$ . D'où l'on voit que  $x$  a quatre valeurs réelles, & deux valeurs imaginaires dans la proposée  $x^3 - 7xx + 6 = 0$ ; & la proposée est entièrement résolue.

E X E M P L E I I I.

Pour trouver les valeurs approchées des trois racines de l'équation irréductible du 3<sup>e</sup> degré  $x^3 - 2700x + 32400 = 0$ , dont les deux plus petites racines sont positives, & dont la plus grande est négative & égale à la somme des deux autres, puisque le second terme est évanoui; 1<sup>o</sup>. Il faut la transformer en une autre qui ait tous ses termes, & dont toutes les racines soient positives, ce qu'on fera en supposant le plus grand coefficient négatif rendu positif & augmenté de l'unité moins une nouvelle inconnue  $z$ , égal à l'inconnue  $x$ ; ce qui donnera  $2701 - z = x$ ; & en substituant cette valeur de  $x$  à sa place dans la proposée, on aura la transformée suivante,  $z^3 - 8103zz + 21883503z - 19697617801 = 0$ , qui a les conditions

$$\begin{array}{cccc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3z^3 - 16206zz + 21883503z = 0. \end{array}$$

divisant par  $3z$ , l'on a la première équation des limites,

2<sup>o</sup>. Il faut trouver les équations des limites des racines de la transformée, comme on le voit ici:

$$\begin{array}{cccc} & 2 & 1 & 0. \\ z^2 - 5402z + 7294501 = 0. \\ 2z^2 - 5402z = 0. \end{array}$$

divisant par  $2z$ , l'on a la seconde équation des limites,

La racine de la 2<sup>e</sup> équation des limites étant  $z = 2701$ , les

$$z - 2701 = 0.$$

limites des racines de la première équation des limites seront 0, 2701, 5403. On trouvera par le moyen de ces limites, ou si l'on veut par la méthode des équations du second degré, que les racines de la première équation des limites sont exactement 2671 & 2731.

Ainsi les limites des racines de la transformée seront 0, 2671, 2731, 19697617802.

On trouvera par le moyen des deux premières limites 0, 2671, que la première & plus petite racine de la transformée est entre 2656, qui étant substituée à la place de  $x$ , donne le signe —, & 2657 qui donne +.

On trouvera par le moyen de la seconde & troisième limite 2671, 2731, que la seconde racine de la transformée est entre 2688 qui donne +, & 2689 qui donne —.

Il est inutile, comme on le va voir, de se donner la peine de chercher la valeur approchée entre deux limites qui ne diffèrent que de l'unité, de la troisième racine de la transformée; comme aussi de trouver des valeurs plus approchées de la première & de la seconde racine de la transformée.

30. Il faut substituer dans l'équation simple  $2701 - x = x$ , qui a servi à trouver la transformée, à la place de  $x$ , les valeurs approchées en entiers de la première & seconde racines de la transformée; & l'on trouvera la première & plus petite valeur de  $x$  dans la proposée entre 12, qui y étant substituée à la place de  $x$ , donne +, & 13 qui donne —.

On trouvera de même la seconde valeur de  $x$  dans la proposée entre 44 qui donne —, & 45 qui donne +.

On trouvera ensuite des valeurs approchées en fractions de la première & seconde racines de la proposée tant près qu'on voudra, en employant la troisième ou la quatrième méthode du troisième Problème.

Et comme l'on sçait que la troisième & plus grande racine de la proposée est égale à la somme des deux autres, il n'y aura qu'à prendre la somme des valeurs approchées de la première & seconde racines, & la rendre négative, & ce sera la valeur approchée de la troisième racine de la proposée.

Ou bien si l'on veut chercher la troisième racine de la proposée en particulier, on la rendra positive en changeant le signe du quatrième terme de la proposée, & l'on aura  $x^3 - 2700x - 32400 = 0$ ,

On

On prendra la somme des deux moindres limites en nombres entiers des deux plus petites racines, lesquelles limites sont 12 & 44, & cette somme 56 sera la moindre limite de la troisième racine de la proposée, qui étant substituée à la place de  $x$ , donnera le signe —.

On prendra de même la somme des deux plus grandes limites 13 & 45 des deux premières racines de la proposée, & cette somme 58 sera la plus grande limite de la troisième racine de la proposée, qui étant substituée donnera +.

On trouvera en employant la première méthode du troisième Problème avec ces deux limites 56 & 58, que la troisième racine de la proposée est entre 57 qui donne —, & 58 qui donne +; & en employant la 3<sup>e</sup> ou la 4<sup>e</sup> méthode du troisième Problème, on trouvera la valeur approchée en fractions tant près qu'on voudra de la troisième racine de la proposée.

EXEMPLE IV. où IL Y A DES RACINES EGALES.

POUR trouver les racines de l'équation suivante du quatrième degré; 1<sup>o</sup>. on en trouvera les équations des limites comme on les voit ici . . .

2<sup>o</sup>. La racine de la dernière équation des limites étant 6, les limites des racines de la seconde seront 0, 6, 13.

On trouvera par le moyen des limites 0, 6, que la première racine de la seconde équation des limites est 4; & par le moyen des limites 6 & 13, que la seconde est 8; ainsi les limites des racines de la première équation des limites seront 0, 4, 8, 16.

Mais on trouvera en cherchant la première racine de la première

$$x^4 - 24x^3 + 192xx - 640x + 768 = 0.$$

$$\begin{array}{cccccc} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & \\ \hline 4x^4 & - 72x^3 & + 384xx & - 640x & = 0; \end{array}$$

divisant par  $4x$ , on aura la première équation des limites,

$$\begin{array}{cccc} x^3 & - 18xx & + 96x & - 160 = 0. \\ 3 & 2 & 1 & 0. \end{array}$$

$$3x^3 - 36xx + 96x = 0;$$

divisant par  $3x$ , on aura la seconde équation des limites,

$$\begin{array}{ccc} xx & - 12x & + 32 = 0. \\ 2 & 1 & 0. \end{array}$$

$$2xx - 12x = 0;$$

divisant par  $2x$ , on aura la troisième équation des limites,

$$x - 6 = 0.$$

équation des limites entre 0 & 4, que 4 est une racine exacte.

Ainsi il y a dans la première équation des limites deux racines égales à 4, & il y a dans la proposée trois racines égales à 4, car on trouve zero en y substituant 4.

Le plus court est quand on trouve ainsi des racines égales exactes, de diviser la proposée par l'équation qui est le produit des trois équations lineaires des trois racines égales à 4, lequel produit est  $x^3 - 12xx + 48x - 64 = 0$ ; & le quotient  $x - 12 = 0$ , contiendra les racines inégales, qui sont ici la seule  $x = 12$ .

Si l'on vouloit employer la méthode de ce 4<sup>e</sup> Problème à trouver la racine inégale de la proposée, il faudroit trouver la troisième racine de la première équation des limites, en se servant de la limite 8 & du plus grand coefficient négatif augmenté de l'unité, qui est 161 pour la seconde limite, & on trouveroit que cette racine est 10. On se serviroit ensuite de cette racine 10 pour première limite, & du plus grand coefficient négatif de la proposée augmenté de l'unité, qui est 641, pour seconde limite; & l'on trouveroit par le moyen de ces deux limites, que la quatrième racine de la proposée est 12.

On peut remarquer qu'on a dit qu'il falloit chercher la racine inégale de la première équation des limites, entre les limites 8 & 161, parceque 8 surpasse la racine égale 4; mais si la racine égale avoit surpasse 8, il auroit fallu chercher la racine inégale entre 0 & 8. De même si la racine égale eût surpasse la limite 10, que la première équation des limites donne pour limite de la racine inégale de la proposée, il auroit fallu chercher la racine inégale de la proposée entre zero & la limite 10.

#### EXEMPLE V. où LES RACINES SONT IMAGINAIRES.

POUR résoudre l'équation  $x^4 - 12x^3 + 68xx - 192x + 288 = 0$ .

1<sup>o</sup>. On trouvera toutes les équations des limites, comme on les voit ici:

2<sup>o</sup>. La racine de la dernière équation des limites étant 3, les limites des racines de la seconde équation

$$\begin{array}{r} 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 0. \\ 4x^4 - 36x^3 + 136x^2 - 192x = 0; \\ \text{divisant par } 4x, \text{ on aura la première} \\ \text{équation des limites,} \\ 3 \quad 2 \quad 1 \quad 0. \\ 3x^3 - 9xx + 34x - 48 = 0. \\ 3x^3 - 18xx + 34x = 0; \end{array}$$



des limites seront 0, 3, 7.

Mais on trouve que la limite 3 étant substituée dans la seconde équation des limites à la place de  $x$ , donne le signe + au lieu du signe — qu'elle devoit donner; ainsi l'on est assuré que les deux racines de la seconde équation des limites sont imaginaires, & que par conséquent il y a deux racines imaginaires dans la premiere équation des limites, & dans la proposée.

La seconde équation des limites ne donnant aucunes limites pour les racines de la premiere équation des limites, on n'aura pour les limites de la racine réelle de la premiere équation des limites, que 0 & 49.

On trouvera par le moyen de ces deux limites, que 3 est la racine réelle de la premiere équation des limites.

Ainsi on aura pour les limites des deux racines de la proposée qui restent à trouver, 0, 3, 193.

Mais l'on trouve que la limite 3, qui est une limite exacte, donne le signe + au lieu du signe — qu'elle devoit donner; (car la limite 0 & la limite 193 donnent chacune le signe +) cela fait voir qu'il y a encore deux racines imaginaires dans la proposée.

La proposée est résolue, car sçachant que ces quatre racines sont imaginaires, on est assuré que le Problème exprimé par cette équation, est impossible, ou renferme contradiction.

EXEMPLE VI. QUI APPARTIENT A UN CAS QU'IL FAUT REMARQUER PAR RAPORT A CETTE METHODE.

POUR résoudre l'équation  $x^4 - 16x^3 + 72xx - 64x + 16 = 0$ .

1°. Il faut trouver les équations des limites, comme on les voit ici:

2°. La racine de la dernière équation des limites étant 4, on aura pour les limites des racines de la seconde équation des limites 0, 4, 9.

divisant par  $3x$ , on aura la seconde équation des limites,

$$\begin{array}{r} xx - 6x + 11 \frac{1}{3} = 0. \\ 2 \quad 1 \quad 0. \end{array}$$

---


$$2xx - 6x = 0;$$

divisant par  $2x$ , on aura la dernière équation des limites,

$$x - 3 = 0.$$

---


$$4x^4 - 48x^3 + 144xx - 64x = 0;$$

divisant par  $4x$ , on aura la premiere équation des limites,

$$\begin{array}{r} x^3 - 12xx + 36x - 16 = 0 \\ 3 \quad 2 \quad 1 \quad 0. \end{array}$$

---


$$3x^3 - 24xx + 36x = 0;$$

A a a ij

On trouvera par le moyen des limites 0 & 4, que la premiere & plus petite racine de la seconde équation des limites est 2.

On trouvera de même par le moyen des limites 4 & 9, que la seconde racine est 6.

Ainsi les limites des racines de la premiere équation des limites sont 0, 2, 6, 17.

On trouvera par le moyen des limites 0, 2, que la premiere & plus petite racine de la premiere équation des limites est incommensurable, & qu'elle est entre zero & l'unité; & par l'approximation de la troisieme méthode du troisieme Problème, qu'elle est entre  $\frac{1}{10}$ , qui étant substituée à la place de  $x$  donne —, &  $\frac{6}{10}$  qui donne +.

On trouvera par le moyen des limites 2 & 6, que la seconde racine de la premiere équation des limites est exactement 4.

On trouvera enfin par le moyen des limites 6 & 17, que la troisieme & plus grande racine de la premiere équation des limites est incommensurable, & qu'elle est entre 7 qui donne —, & 8 qui donne +.

Ainsi les limites des racines de la proposée sont 0,  $\frac{1}{10}$  ou  $\frac{6}{10}$ , 4, 7 ou 8, & 65.

On cherchera donc la premiere & plus petite racine de la proposée entre les limites 0 &  $\frac{1}{10}$  ou  $\frac{6}{10}$ .

La seconde entre les limites  $\frac{1}{10}$  ou  $\frac{6}{10}$  & 4.

La troisieme entre les limites 4 & 7 ou 8.

La quatrième entre les limites 7 ou 8 & 65.

Mais en cherchant la premiere racine de la proposée par le moyen des limites 0 &  $\frac{1}{10}$  ou  $\frac{6}{10}$ , on ne trouve point que la seconde limite  $\frac{1}{10}$  ou  $\frac{6}{10}$ , donne le signe — qu'elle doit donner.

De même en cherchant la seconde racine entre les limites  $\frac{1}{10}$  ou  $\frac{6}{10}$  & 4, on ne trouve point que la premiere limite, ni aucune grandeur entre la premiere limite & la seconde 4, donne le signe — qu'elle doit donner.

On trouvera le même inconvénient en cherchant la troisieme & la quatrième racine de la proposée.

divisant par  $3x$ , on aura la seconde équation des limites,

$$\frac{xx}{2} - \frac{8x}{1} + \frac{12}{0} = 0.$$

$$2xx - 8x = 0;$$

divisant par  $2x$ , on aura la troisieme ou dernière équation des limites,

$$x - 4 = 0.$$

3°. Dans ce cas il faut approcher les limites en fractions, & se servant de la troisième méthode du troisième Problème, mettre plusieurs zeros au second terme de la première équation des limites, en mettre deux fois autant au troisième terme qu'on en a mis au second terme, en mettre trois fois autant au quatrième terme, & quatre fois autant au cinquième, &c. trouver ensuite les limites approchées de la première & troisième racines de la première équation des limites, de manière que les deux limites pour la première racine, ne diffèrent que d'une unité, & de même les deux limites pour la troisième racine, &c.

Il faut mettre ces limites pour numérateurs, & l'unité précédée d'autant de zeros qu'on en a mis au second terme, pour chaque dénominateur, & ensuite chercher avec ces limites approchées les racines de la proposée.

Mais comme en cherchant la première racine entre les deux nouvelles limites qui sont des fractions dont les dénominateurs sont fort grands, on trouve toujours que la seconde limite approchée ne donne point le signe — qu'elle doit donner, cela porte à conclure que l'on ne sauroit trouver de seconde limite qui donne le signe — qu'elle doit donner, & qu'ainsi il faut ou que la première racine de la première équation des limites qui est incommensurable, soit égale à la première racine de la proposée, & que si on la pouvoit trouver exactement, elle donneroit zero, étant substituée à la place de  $x$  dans la proposée; que ce n'est que parcequ'elle est incommensurable qu'on ne peut pas trouver sa valeur exacte, qui étant substituée dans la proposée donne zero, & que dans ce cas les deux premières racines de la proposée sont égales: Ou bien il faut que les deux premières racines de la proposée soient imaginaires, parceque dans ce cas la seconde limite de la première racine de la proposée, quoiqu'approchée à l'infini, ne donnera jamais le signe qu'elle devoit donner, si les deux premières racines de la proposée étoient réelles & inégales.

Et comme en cherchant la troisième & quatrième racines de la proposée, la limite 4<sup>e</sup> qui devoit donner le signe —, donne aussi le signe +, quoiqu'on l'approche tant qu'on voudra, cela portera de même à conclure que la troisième & la quatrième racines de la proposée sont égales ou imaginaires.

4°. Au lieu de la méthode de l'article troisième, on peut se servir de celle-ci, qui revient à la même chose.

On mettra plusieurs zeros au second terme de la proposée, plus on en mettra, & plus on sera assuré que la proposée appartient au cas pour lequel est ce sixième exemple. On mettra le même nombre de zeros au second terme de la première équation des limites. On mettra deux fois autant de zeros au troisième terme de la proposée, & de la première équation des limites, qu'on en a mis au second terme. On en mettra trois fois autant au quatrième, &c. On en met dans notre exemple seulement deux pour abréger le calcul, & l'on aura les transformées,

$$x^5 - 1600x^4 + 720000x^3 - 64000000x + 1600000000 = 0.$$

$$x^4 - 1200x^3 + 360000x^2 - 16000000 = 0.$$

Comme l'on a déjà, par le premier & le second article de ce sixième exemple, les racines approchées de la première équation des limites, qui sont  $\frac{1}{10}$  ou  $\frac{6}{10}$ , la seconde exactement 4, la troisième 7 ou 8, on mettra devant chacune deux zeros, & elles seront les racines approchées de la première équation des limites de la transformée. Ces racines approchées sont la première 50 ou 60, la seconde exactement 400, la troisième 700 ou 800.

On cherchera, par la première méthode du troisième Problème, deux valeurs approchées de la première racine de la transformée de l'équation des limites, qui ne diffèrent que de l'unité, & l'on trouvera 53 qui donne —, & 54 qui donne +.

On cherchera de même deux valeurs approchées de la troisième racine, & l'on trouvera 744 qui donne —, & 745 qui donne +.

Ainsi les limites des racines de la transformée de l'équation proposée, seront 0, 53 ou 54; 400, 744 ou 745, & 64000000.

Mais en cherchant la première racine de la transformée de la proposée, avec les limites zero & 53 ou 54, on ne trouve pas que la seconde limite 53 ou 54 donne le signe — qu'elle devrait donner : Comme l'on suppose qu'on a mis beaucoup de zeros au second terme des transformées, cela porte à conclure que les deux premières racines de la trans-

formée de la proposée, & par conséquent les deux premières racines de la proposée, sont égales ou imaginaires.

La même chose arrivant en cherchant la troisième racine, on en conclut de même que les deux dernières racines de la proposée sont égales ou imaginaires.

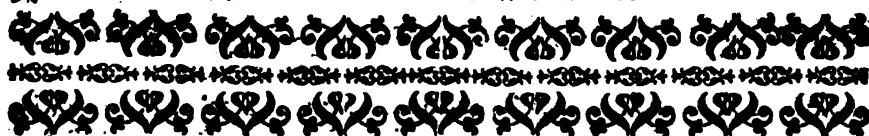
5°. On pourroit, au lieu de se servir de la méthode du troisième article de cet exemple, c'est-à-dire, au lieu de se servir de la troisième méthode du troisième Problème, employer la quatrième méthode du troisième Problème, pour trouver les valeurs extrêmement approchées des racines de la première équation des limites.

*Remarque sur le cas de ce sixième exemple.*

ON ne peut pas, dans le cas de ce sixième exemple, s'assurer par cette méthode d'approximation du quatrième Problème, si les racines de la proposée, pour lesquelles on ne trouve pas des limites approchées qui donnent les signes qu'elles doivent donner, sont des racines égales & incommensurables, ou si elles sont imaginaires. Il faut avoir recours, quand la proposée ne surpasse pas le quatrième degré, aux marques certaines qu'on a données dans le cinquième Livre, pour distinguer les racines qui sont imaginaires, de celles qui sont égales, dans le quatrième, troisième & second degré.

On peut encore se servir de la méthode générale des équations qui ont des racines égales, qu'on a donnée à la fin du quatrième Livre, c'est-à-dire, chercher le plus grand diviseur commun de la proposée & de la première équation des limites; & trouvant que  $xx - 8x + 4 = 0$ , est un diviseur qui leur est commun, on est assuré que les deux racines de ce diviseur commun, qui sont  $x = 4 + 2\sqrt{3}$  &  $x = 4 - 2\sqrt{3}$ , sont communes à la première équation de la proposée, & par conséquent que les deux racines de la proposée sont  $x = 4 - 2\sqrt{3}$ ,  $x = 4 -$  & deux dernières sont  $x = 4 + 2\sqrt{3}$ ,  $x = 4 + 2\sqrt{3}$ .

On peut aussi se servir de la méthode du cinquième Corollaire du dixième Théorème, pour distinguer dans le cas de ce sixième exemple, s'il y a des racines égales.



## ANALYSE COMPOSÉE,

O U

ANALYSE QUI ENSEIGNE A RESOUDRE  
les Problèmes qui se réduisent à des équations  
composées.

## LIVRE VII

*De l'approximation des racines des équations  
littérales.*

## SECTION I.

*De l'approximation des racines des équations littérales  
déterminées.*

## PROBLÈME I.

273. TROUVER les racines d'une équation littérale qui n'a  
qu'une inconnue, ou bien les valeurs approchées des racines,  
et en continuer l'approximation à l'infini.

MÉTHODE GÉNÉRALE POUR LES ÉQUATIONS  
DE TOUS LES DEGRÉS.

**L**ES lettres connues des coefficients des termes de l'équa-  
tion, & celles du dernier terme, marquant des gran-  
deurs connues, il faut supposer que l'une de ces lettres est  
l'unité, ou un nombre pris à discrétion, comme 10, 20, 30,  
100, 1000, &c.

Le rapport de chaque autre lettre connue à celle qu'on  
vient de supposer égale à un nombre, étant connu, il faut  
trouver la valeur en nombres de toutes les autres lettres  
connues

connues par rapport à la lettre qu'on a supposée égale à un nombre. Il faut substituer tous ces nombres égaux aux lettres connues, à la place de ces lettres connues, dans l'équation proposée, & elle sera changée en une équation numérique. Il faut trouver par le quatrième Problème du sixième Livre, les racines de cette équation numérique, ou leurs valeurs approchées tant près qu'on voudra. Ces racines ou leurs valeurs approchées, seront les racines ou les valeurs approchées des racines de la proposée; ainsi elle sera résolue.

## E X E M P L E.

**P**OUR trouver les racines ou les valeurs approchées tant près qu'on voudra de l'équation  $x^3 - 3aax + aab = 0$ , il faut supposer la grandeur marquée par la lettre connue  $a$ , égale à un nombre pris à discrétion, par exemple à 30, & l'on aura  $a = 30$ .

Le rapport des grandeurs marquées par  $a$  & par  $b$ , étant connu, par exemple supposant que  $\frac{a}{b} = \frac{4}{6}$ , la grandeur marquée par  $b$  sera égale à 36, ainsi  $b = 36$ . Il faut substituer ces nombres à la place des lettres auxquelles on les a supposé égaux, dans la proposée, & la proposée  $x^3 - 3aax + aab = 0$ , sera changée en l'équation numérique,  $x^3 - 2700x + 32400 = 0$ .

Il faut chercher par le quatrième Problème du sixième Livre, les racines de cette équation numérique, ou leurs valeurs approchées, comme on le voit dans le troisième exemple du quatrième Problème, où l'on résout cette même équation; & l'on trouvera que les valeurs approchées entières des trois racines de cette équation, sont 12 ou 13, 44 ou 45, 57 ou 58.

On peut continuer l'approximation à l'infini de ces valeurs approchées en nombres entières des racines de la proposée; par la troisième ou par la quatrième méthode du troisième Problème du sixième Livre.

Si on veut changer les valeurs approchées numériques qu'on a découvertes, en littérales, on trouvera que  $12 = \frac{2}{3}a$ , & encore  $12 = \frac{1}{3}b$ ; ainsi  $\frac{2}{3}a$  ou  $\frac{1}{3}b$ , sont des valeurs approchées un peu moindres que la première racine.

On trouvera de même que  $45 = \frac{2}{3}a$ , & encore  $45 = \frac{1}{3}ab$ ;

ainsi  $\frac{2}{7} a$  ou  $\frac{1}{14} ab$ , sont des valeurs approchées un peu plus grandes que la seconde racine.

Enfin on trouvera que  $57 = \frac{19}{10} a$ , & encore  $57 = \frac{12}{11} b$ ; ainsi  $\frac{19}{10} a$  ou  $\frac{12}{11} b$ , sont des valeurs approchées un peu moindres que la troisième racine.

Cet exemple suffit pour faire concevoir cette première méthode.

#### REMARQUE.

CETTE méthode peut servir à résoudre par le seul calcul de l'Arithmétique, tous les Problèmes déterminez de la Geometrie, qui peuvent être exprimez par des équations où il n'y a qu'une inconnue, quelques composées qu'elles puissent être, c'est-à-dire de quelque degré que puissent être ces équations; & cela avec autant d'exactitude qu'on résout les Problèmes de la Geometrie pratique, de l'Astronomie, & des autres parties des Mathématiques, en se servant des tables des Sinus, Tangentes & Secantes, ou de leurs Logarithmes.

Par ce moyen on éviteroit la difficulté, qui est souvent très-grande, de décrire les lignes courbes très-composées qui servent à la construction de ces Problèmes, & à déterminer les racines des équations qui les expriment. Car il est évident qu'il n'y a qu'à prendre à discretion une des lignes données du Problème, par exemple celle qui est représentée dans l'équation du Problème par la lettre connue qui s'y trouve le plus de fois, ou par celle qui a le plus de dimensions; la diviser par le moyen de l'échelle ou du compas de proportion, en tant de parties égales qu'on voudra, par exemple en 100, 1000, 10000, &c. plus le nombre en fera grand, & plus il y aura d'exactitude dans la résolution; & supposer cette lettre connue égale au nombre qui exprime ses parties égales; déterminer ensuite par le moyen de l'échelle ou du compas de proportion, combien chacune des autres lignes données du Problème, contient de ces mêmes parties égales de la première; & supposant les nombres de ces parties de chaque ligne donnée, égaux aux lettres qui représentent ces lignes dans l'équation, substituer tous ces nombres à la place de ces lettres connues dans l'équation du Problème. Elle sera changée par ces substitutions en une équation numérique qui exprime le Problème.



On en trouvera toutes les racines ou leurs valeurs approchées tant près qu'on voudra, par le quatrième Problème du sixième Livre, & ces racines ou leurs valeurs extrêmement approchées, contiendront le nombre des parties des lignes qu'on cherche, & le Problème sera résolu; car il n'y aura qu'à se servir de la même échelle qui a servi à diviser les lignes données du Problème en parties égales, pour déterminer les longueurs des lignes dont les racines ou leurs valeurs approchées marquent le nombre des parties.

On pourroit, si l'on vouloit, se servir dans la résolution de tous les Problèmes d'une même échelle, c'est-à-dire, d'une même ligne divisée en parties égales, comme en 100, ou en 1000, &c. car nommant cette ligne  $e$ , on pourroit par le moyen des proportions, l'introduire dans tous les coefficients & dans le dernier terme, sans changer leur valeur; par exemple, en faisant cette proportion pour notre exemple,  $e. a :: a. d$ , l'on auroit  $aa = de$ ; & mettant  $de$  à la place de  $aa$  dans  $x^3 - 3aax + aab = 0$ , l'on auroit  $x^3 - 3dex + bde = 0$ , qui n'en est différente que par l'expression.

On donnera une autre méthode générale pour résoudre ce Problème dans la sixième Section, où il ne faudra point échanger l'équation littérale en une équation numérique.

## S E C T I O N I I.

*De la résolution des équations littérales qui ont deux ou plusieurs inconnues; & de la manière de trouver la valeur approchée à l'infini, ou tant près qu'on voudra, de l'une des inconnues de ces équations.*

### A V E R T I S S E M E N T.

174. **L**ES Problèmes qui sont exprimez par des équations qui n'ont qu'une inconnue, s'appellent Problèmes déterminez, parcequ'ils n'ont qu'un nombre déterminé de résolutions; savoir, autant que l'exposant de la plus haute puissance de l'inconnue de l'équation qui exprime le Problème, contient d'unités. Ainsi les Problèmes déterminez, dont les équations sont du second degré, ont deux résolutions; ceux

dont les équations sont du troisième degré, ont trois résolutions; & ainsi des autres: car ils ont autant de résolutions que l'inconnue a de valeurs dans les équations qui les expriment.

Les Problèmes qui sont exprimez par des équations qui ont deux ou plusieurs inconnues, s'appellent indéterminées, parcequ'ils ont un nombre indéterminé de résolutions, chacune des inconnues pouvant avoir autant de valeurs que l'autre inconnue peut représenter de différentes grandeurs.

Ces Problèmes indéterminez sont très-ordinaires dans la Geometrie composée, & il est nécessaire de sçavoir résoudre les équations qui les expriment, c'est-à-dire, de pouvoir trouver la valeur de chacune des inconnues, laquelle valeur ne contienne que l'autre inconnue avec les grandeurs connues de l'équation: & comme cette valeur est d'ordinaire incommensurable, il est nécessaire de pouvoir trouver cette valeur par approximation.

Ces équations qui ont deux ou plusieurs inconnues, peuvent quelquefois se résoudre à la manière des équations qui n'ont qu'une inconnue; & il faut toujours tenter de les résoudre de cette manière, avant de les résoudre par approximation, c'est-à-dire, supposant que ces équations ont les deux inconnues  $x$  &  $y$  avec les grandeurs connues, qui sont les coefficients des termes, & qu'on veuille trouver la valeur de  $x$ , il faut ordonner l'équation par rapport à  $x$ , comme si  $x$  étoit la seule inconnue, & que  $y$  fût connue; & voir si l'équation lineaire de  $x$  plus ou moins un des diviseurs exacts du dernier terme, n'est point un diviseur exact de l'équation: si cela se trouvoit, l'on auroit une valeur exacte de  $x$ : si cela ne se trouve pas, il faut voir par les Problèmes du quatrième Livre, si l'équation proposée ne peut point se réduire en d'autres équations commensurables plus simples irréductibles, & trouver les valeurs approchées de  $x$  par la méthode qu'on va expliquer dans cette Section, ou celle de la cinquième Section suivante, dans ces équations plus simples. Mais si l'équation proposée est irréductible, il faut y appliquer immédiatement la méthode qu'on va expliquer, ou celle de la cinquième Section suivante.

## PROBLÈME II.

175. *TROUVER la valeur approchée de la racine  $x$  d'une équation littérale, qui a deux inconnues  $x$  &  $y$ , avec des grandeurs connues; & en continuer l'approximation à l'infini, ou tant qu'on voudra.*

## PREMIÈRE MÉTHODE.

1°. **I**L faut supposer la valeur de  $x$  que l'on cherche, représentée par une suite infinie de grandeurs, précédées chacune du signe  $+$ : Toutes ces grandeurs, qu'on appellera les termes de la suite, doivent contenir chacune deux choses; premièrement, les puissances de la seconde inconnue  $y$  ou de quelque une des grandeurs connues de l'équation proposée, de manière que les exposans de ces puissances soient en progression arithmétique, & aillent en augmentant; (cette grandeur sera celle qui distingue les termes de la suite, chaque terme étant la quantité où cette grandeur, qui distingue les termes, est élevée à une puissance dont l'exposant est différent de celui des autres termes.) Secondement, chaque terme de la suite doit contenir une lettre indéterminée pour coëfficient, outre la grandeur qui distingue les termes: Et comme l'on a besoin de beaucoup d'indéterminées, on se servira indifféremment des lettres de l'alphabet qui ne sont pas employées dans l'équation proposée.

On supposera donc, par exemple,  $x = ay^0 + by + cy^2 + dy^3 + ey^4 + fy^5 +$ , &c. Les lettres  $a, b, c, d$ , &c. sont des grandeurs indéterminées; il faut remarquer que  $ay^0$  n'est que  $a$  sans  $y$ ; de même  $a^0bb$  n'est que  $bb$  seule; car  $y^0$ , ou  $a^0$  est l'unité dans la progression  $y^0, y^1, y^2$ , &c. ou  $a^0, a^1, a^2$ , &c.

Il y a des rencontres où il faudra supposer  $x = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 +$ , &c. D'autres où il faudra supposer  $x = ay + by^3 + cy^5 +$ , &c. En d'autres on supposera  $x = ay^2 + by^4 + cy^6 +$ , &c. En d'autres,  $x = ay^{\frac{1}{2}} + by^{\frac{3}{2}} + cy^{\frac{5}{2}} +$ , &c. Les équations particulières qu'on aura à résoudre, serviront à déterminer les exposans de la grandeur qui distingue les termes, comme on l'enseignera dans la suite.

2°. Il faut élever cette valeur indéterminée de  $x$  à toutes les puissances auxquelles  $x$  est élevée dans l'équation proposée;

& substituer cette valeur de  $x$  & ses puissances à la place de  $x$  & des puissances de  $x$  dans la proposée, comme l'on a fait dans les transformations, observant de bien distinguer les termes dans ces substitutions. Après ces substitutions, l'équation proposée sera changée en une équation infinie, qui aura dans chacun de ses termes une des indéterminées particulières de la valeur indéterminée de  $x$  qu'on a supposée; on appellera cette nouvelle équation, l'équation changée.

3°. Il faut supposer chaque terme de l'équation changée, égal à zero, & l'on aura par cette supposition autant d'équations particulières, qu'on a supposé d'indéterminées dans la valeur de  $x$ . On déterminera de suite à l'ordinaire, par le moyen de ces équations particulières, les valeurs de toutes les indéterminées qu'on a supposées.

4°. Enfin on substituera ces valeurs des indéterminées à la place de ces indéterminées, dans la valeur indéterminée de  $x$  qu'on a supposée, & elle sera changée par ces substitutions en une suite qui est la véritable valeur approchée de  $x$  que l'on cherchoit. Plus on déterminera de termes de la suite supposée, & plus on approchera de la véritable valeur de  $x$ .

*Application de la méthode aux exemples.*

EXEMPLE I.

176. **P**OUR trouver la valeur approchée de  $x$  dans l'équation

$$x^3 + nyx - y^3 = 0; \text{ ou bien } -2n^3 + 2nx + x^3 = 0; \\ + nx - 2n^3 \quad - y^3 + nyx$$

1°. il faut supposer  $x = a + by + cyy + dy^3 + ey^4 + fy^5 + gy^6$  &c. où  $a, b, c, d$ , &c. sont des grandeurs indéterminées; l'on suppose la première grandeur indéterminée  $a$  sans  $y$ , à cause de  $-2n^3$  qui est dans l'équation proposée sans l'inconnue  $y$ , & qu'on ne pourroit pas employer dans la résolution sans cette supposition.

2°. Il faut élever cette valeur indéterminée de  $x$  à la troisième puissance, & l'on aura

$$x^3 = + a^3 + 3aaby + 3abbyy + b^3y^3 + 3bbcy^4 \\ + 3aatyy + 6abcy^3 + 3accy^4 \quad \&c. \\ + 3aady^3 + 6abdy^4 \\ + 3aacy^4$$

Il faut substituer ensuite les valeurs de  $x$  & de  $x'$  dans la proposée, à la place de  $x$ ,  $x'$ , comme on le voit ici :

$$0 = \begin{cases} -2n' = -2n' \\ -y' = -y' \\ +nux = +nna + nby + nncy + ndy' + ney' & \&c. \\ +nyx = +nay + nbyy + ncy' + ndy' & \&c. \\ +x' = +a' + 3aaby + 3abyy + b'y' + 3bbcy' & \&c. \\ & + 3aacy + 6abcy' + 3accy' \\ & + 3aady' + 6abdy' \\ & + 3aocy' \end{cases}$$

& l'équation proposée sera changée en l'équation infinie qu'on voit ici, dans laquelle il n'y a d'inconnue que  $y$ . On a mis les seuls cinq premiers termes, cela suffisant pour faire concevoir la méthode ; on nommera ici & dans toute la suite de ce Livre, le premier terme celui où la grandeur qui distingue les termes, ne se trouve point ; ou bien, si elle se trouve dans tous les termes, celui où elle est au moindre degré ; le second terme, celui où elle est au degré immédiatement plus élevé qu'au premier terme ; & ainsi de suite.

3°. Il faut supposer chaque terme de l'équation changée, égal à zero, ce qui donnera autant d'équations particulières, qu'on a supposé d'indéterminées.

La 1<sup>re</sup>,  $a' + nna - 2n' = 0$  ; La 2<sup>e</sup>,  $3aab + nnb = -na$  ; La 3<sup>e</sup>,  $3aac + nnc = -3abb - nb$  ; La 4<sup>e</sup>,  $+3aad + nnd = -6abc - b' - nc + 1$  ; La 5<sup>e</sup>,  $nne + 3aac = -3bbc - 3acc - nd - 6abd$ .

La 1<sup>re</sup> a pour diviseur exact  $a - n = 0$  ; & la divisant par  $a - n = 0$ , on trouve le quotient  $aa + na + 2nn = 0$ , dont les deux racines sont imaginaires ; ainsi  $a$  n'a qu'une valeur réelle qui est  $+n$  ; on a donc  $a = +n$ . Par la 2<sup>e</sup> on trouve  $b = -\frac{1}{4}$  ; par la 3<sup>e</sup> on trouve  $c = +\frac{1}{64n}$  ; par la 4<sup>e</sup> on trouve  $d = +\frac{131}{512nn}$  ; par la 5<sup>e</sup> on trouve  $e = +\frac{109}{16384n}$ .

4°. Il faut substituer ces valeurs de  $a, b, c$ , &c. à leur place dans  $x = a + by + cyy + dy' + ey' + \&c.$  & l'on aura  $x = +n - \frac{1}{4}y + \frac{1}{64n}yy + \frac{131}{512nn}y' + \frac{109}{16384n}y''$ , &c. C'est la valeur de  $x$  que l'on cherchoit, qu'on peut augmenter à l'infini.

*Le même premier exemple d'une autre manière.*

177. SI dans la proposée —  $2n^3 + nnx + x^3 = 0$ , la grandeur  $y$   
—  $y^3 + nyx$

surpassoit la grandeur  $n$ , par la nature du Problème exprimé par cette équation, il faudroit prendre la grandeur  $n$ , qu'on suppose à présent moindre que  $y$ , pour distinguer les termes, afin que dans les termes de la suite, les puissances de  $n$  se trouvassent dans le numérateur, & les puissances de  $y$  dans le dénominateur, & que la suite allât en diminuant pour approcher de plus en plus de la racine qu'on cherche. Pour appliquer la méthode à ce cas, il faut regarder  $n$  comme l'on faisoit dans le premier cas  $y$ , & regarder  $y$  comme si c'étoit une grandeur connue; & supposer,

1°.  $x = a + bn + cn^2 + dn^3 + en^4 + \&c.$   $a, b, c, d, \&c.$  sont des grandeurs indéterminées, & l'on ne met point  $n$  dans le premier terme  $a$  de la suite, parcequ'autrement il n'y auroit que la seule grandeur  $y^3$ , qui ne contient point la grandeur  $n$ , dans le premier terme de l'équation changée; & l'on ne pourroit pas faire une équation particulière de ce premier terme de l'équation changée, par laquelle on pût déterminer une des grandeurs indéterminées qu'on a supposées.

2°. Il faut élever cette valeur indéterminée  $x$  à la troisième puissance, & l'on trouvera

$$\begin{aligned} x^3 = & a^3 + 3a^2bn + 3ab^2n^2 + b^3n^3 + 3abbcn^2 + \&c. \\ & + 3aacn^2 + 6abcn^3 + 6abd^2n^4 \\ & + 3aadn^3 + 3accn^4 \\ & + 3aacn^4 \end{aligned}$$

Il faut substituer les valeurs de  $x$  & de  $x^3$  à leur place dans la proposée comme on le voit ici, & l'on aura l'équation changée qui suit,

$$0 = \begin{cases} -y^3 = -y^3 \\ -2n^3 = -2n^3 \\ +nyx = +byn + byn^2 + cyn^3 + dyn^4 + \&c. \\ +nnx = +an^2 + bn^3 + cn^4 + \&c. \\ +x^3 = +a^3 + 3a^2bn + 3ab^2n^2 + b^3n^3 + 3abbcn^2 + \&c. \\ \quad + 3aacn^2 + 6abcn^3 + 6abd^2n^4 \\ \quad + 3aadn^3 + 3accn^4 \\ \quad + 3aacn^4 \end{cases}$$

3°. Il

3°. Il faut supposer chaque terme de cette équation changée égal à zero, & l'on aura par cette supposition toutes les équations particulieres dont on a besoin pour déterminer les valeurs des indéterminées.

Par la 1<sup>re</sup>  $a' - y' = 0$ , on trouvera  $a = y$ ; par la 2<sup>e</sup>  $3aabn + ayn = 0$ , on aura, en substituant la valeur de  $a = y$  à la place de  $a$ ,  $b = -\frac{1}{3}$ ; par la 3<sup>e</sup>  $3aac + 3abb + a + by = 0$ , on trouvera, en substituant les valeurs de  $a$  & de  $b$ , déjà découvertes, à leur place,  $c = -\frac{1}{3}$ ; en substituant dans la 4<sup>e</sup>  $3aad + 6abc + b' + b + cy - 2 = 0$ , les valeurs de  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , on aura  $d = +\frac{11}{15}$ ; on trouvera de même, en substituant les valeurs de  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , dans la 5<sup>e</sup>  $3aae + 3acc + 6abd + 3bbc + c + dy = 0$ ,  $e = +\frac{64}{1415}$ .

4°. Il faut substituer ces valeurs de  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$ , dans  $x = a + bn + cn^2 + dn^3 + en^4 +$ , &c. & l'on aura  $x = y - \frac{1}{3}n - \frac{1n^2}{15} + \frac{11n^3}{15} + \frac{64n^4}{1415} +$ , &c. C'est la valeur approchée de  $x$  dans la proposée, quand  $n$  est moindre que  $y$ .

Il est évident qu'on peut trouver tant de termes qu'on voudra de cette valeur, & l'augmenter à l'infini.

*Démonstration de la méthode.*

178. LA grandeur qui étant substituée dans une équation à la place de l'inconnue  $x$ , rend tous les termes de l'équation égaux à zero; ou, ce qui revient au même, qui fait que tous les termes se détruisent, est une racine de l'équation; c'est-à-dire, cette grandeur est la valeur de l'inconnue  $x$ . \* Or il est évident que la suite que l'on trouve par la méthode pour la valeur de l'inconnue  $x$ , étant conçue infinie, c'est-à-dire, contenant tous ses termes à l'infini, il est, dis-je, évident que cette suite infinie étant conçue substituée à la place de  $x$  dans l'équation, tous les termes de l'équation seront égaux à zero; puisqu'il n'est que par cette supposition qu'on trouve la valeur déterminée de chaque terme de cette suite. Par conséquent, la suite infinie qu'on trouve par cette méthode, est la valeur de l'inconnue  $x$  de l'équation. *Ce qu'il falloit démontrer.*

R E M A R Q U E S.

179. IL est évident par cette démonstration, que plus on prendra de termes dans la suite que fait trouver la méthode

pour la valeur de  $x$ , & plus cette valeur sera approchée; c'est à-dire, moins elle différera de la moindre valeur de  $x$ , que l'on ne peut pas découvrir entière, étant infinie. D'où l'on voit que les termes de cette suite doivent aller en diminuant, & que plus ils iront en diminuant, & moins il faudra de termes pour la valeur approchée qu'on cherche, tous ceux qu'on néglige ne faisant pas une grandeur sensible.

Or plus la grandeur qui distingue les termes de la suite sera petite, & plus les termes iront en diminuant; car cette grandeur se trouvant dans le numérateur de chaque terme, & les autres quantitez plus grandes qu'elles, dans le dénominateur, tous les termes, excepté les premiers, seront des fractions qui iront en diminuant, parceque les puissances de ces grandeurs qui vont en augmentant, font que ces grandeurs deviennent plus petites, étant des fractions.

C'est pour cela qu'on a marqué qu'il falloit prendre pour la grandeur qui distingue les termes la seconde inconnue  $y$  de l'équation proposée, quand elle est plus petite que les grandeurs connues de cette équation; & que quand elle est plus grande, il falloit prendre parmi les grandeurs connues de la proposée celle qui est la plus petite, pour la grandeur qui doit distinguer les termes de la suite qu'on cherche.

## I I.

180. On peut même préparer l'équation proposée de façon qu'on y puisse prendre une grandeur très petite par rapport aux autres, pour distinguer les termes de la suite qu'on cherche. Cette préparation peut se faire de deux manières: 1<sup>o</sup>. sur les grandeurs connues de la proposée; 2<sup>o</sup>. sur la seconde inconnue.

La préparation se fait sur les grandeurs connues par le moyen des proportions, observant de faire en sorte que la valeur des coefficients connus demeure toujours la même dans ces changemens, & qu'il n'y ait que changement d'expression, & non pas changement de valeur. Par exemple on pourra supposer  $pq = nn$ , en prenant la grandeur  $p$  tant petite qu'on voudra, & faisant  $p. n :: n. q$ , ce qui donnera  $pq = nn$ ; & mettant cette valeur de  $nn$  dans la proposée, elle sera changée en  $-2npq + pqx + x^3 = 0$ , qui ne diffère  

$$-y^3 + nyx$$
de la proposée que par l'expression; & l'on pourra prendre



la grandeur  $y$  pour distinguer les termes de la suite qui sera la valeur de  $x$ . Ceci suffit pour indiquer les moyens de faire ces sortes de préparations sur les grandeurs connues de la proposée, qui peuvent se faire de plusieurs façons différentes; parmi lesquelles on choisira les plus commodes pour le calcul, & pour faire en sorte que les termes de la suite qui est la valeur de  $x$ , aillent en diminuant le plus qu'il sera possible.

La préparation sur la seconde inconnue  $y$ , se fait par le moyen des transformations; par exemple, on peut supposer dans la proposée du premier exemple  $\frac{y}{z} = z$ , ou telle autre transformation de  $y$  qu'on jugera la plus propre pour rendre  $y$  moindre que les grandeurs connues; & substituer la valeur de  $y$  prise dans l'équation  $\frac{y}{z} = z$ , ou telle autre qu'on jugera plus propre, dans la proposée à la place de  $y$ ; ensuite on prendra l'inconnue nouvelle  $z$  pour distinguer les termes de la suite qui est la valeur de  $x$ ; & quand on aura trouvé cette suite, on substituera dans tous les termes à la place de l'inconnue  $z$ , la valeur de  $z$  prise dans l'équation qui a servi à faire la transformation. On peut aussi diminuer les dimensions de  $y$ , par exemple s'il y avoit  $\frac{y^2}{x}$  au lieu de  $nyx$ , on pourroit supposer  $y^2 = nnx$ , &c. Par le moyen de ces préparations, on peut trouver plusieurs différentes suites pour la valeur de  $x$ , & choisir celle qui est la plus commode pour la résolution du Problème; comme aussi celle dont les termes vont le plus en diminuant, & dont par conséquent il faut moins de termes pour avoir une valeur très-approchant de la véritable.

## I I I.

181. Quand l'équation qui fait trouver le premier terme de la suite est composée, & contient plusieurs racines positives & réelles, on peut trouver autant de valeurs de  $x$ , que cette équation contient de racines positives; & l'on peut chercher celle de ces valeurs de  $x$  qu'on voudra, ou qu'on jugera la plus propre à résoudre le Problème; ou bien on pourra les chercher toutes, & l'on aura le même nombre de résolutions du Problème. Si cette équation composée qui n'a qu'une inconnue, n'avoit aucune racine commensurable, on trouveroit les valeurs approchées de ses racines incommensurables par le premier Problème, \* ou par le Problème \* 175.

de la dernière Section de ce Livre, & ces valeurs approchées seroient prises pour les premiers termes des suites qu'on cherche.

Comme cette méthode est de grand usage dans la Géométrie composée, on va l'appliquer à beaucoup d'exemples, & quand on l'aura ainsi rendue familière, on donnera la méthode de distinguer les exposans des puissances de la grandeur qui doit distinguer les termes de la suite, dans le premier & le second terme, les autres en étant une suite, puisqu'ils doivent être en progression arithmétique.

## I V.

182. Quoiqu'on ait dit que quand la seconde inconnue  $y$  peut être plus grande qu'une des grandeurs connues de l'équation proposée, il falloit prendre la grandeur connue la plus petite pour distinguer les termes de la suite qui doit être la valeur approchée de  $x$ , cela n'empêche pas qu'on ne puisse dire que dans ce cas là même on peut prendre la seconde inconnue  $y$  pour distinguer les termes de la suite qu'on cherche : mais comme dans ce cas la seconde inconnue  $y$  doit être au dénominateur, ou, ce qui est la même chose, les exposans des puissances de  $y$  dans les termes de la suite, doivent être négatifs, & que d'ordinaire on est moins accoutumé au calcul de ces puissances, dont l'exposant est négatif, on a crû qu'il seroit plus commode de ne faire faire attention au Lecteur qu'à la grandeur qui distingue les termes dont les puissances ont des exposans positifs. Cependant pour faire voir que l'un revient à l'autre, on va résoudre le même exemple en prenant la seconde inconnue  $y$  pour distinguer les termes de la suite qu'on cherche, qui doit être la valeur de  $x$ .

*Troisième maniere de résoudre le premier Exemple.*

183. **P**OUR trouver la valeur approchée de  $x$  dans l'équation  $x^3 + nx - y^3 = 0$ , lorsque  $y$  peut être plus grande que  $n$ ,  
 $+ nnx - n^3$   
 en se servant pourtant de  $y$  & des puissances de  $y$  pour distinguer les termes de la suite qu'on cherche.

1°. Il faut supposer  $x = ay + by^2 + cy^{-2} + dy^{-3} + ey^{-4} +$ , &c. les grandeurs  $a, b, c$ , &c. sont indéterminées.

20. Il faut élever cette valeur de  $x$  à la troisième puissance, & substituer les valeurs de  $x$  & de  $x^3$ , dans la proposée, à la place de  $x$  & de  $x^3$ , & l'on aura l'équation changée qui suit:

$$\begin{aligned} x^3 &= a^3y^3 + 3a^2byy + 3ab^2y + b^3y^0 + 3b^2cy^{-1} + \&c. \\ &\quad + 3a^2cy + 6abcy^0 + 6abdy^{-1} \\ &\quad + 3a^2dy^0 + 3a^2cy^{-1} \\ &\quad + 3a^2ey^{-1} \\ + nyx &= + nxyy + nby + ncy^0 + ndy^{-1} + \&c. \\ + nnx &= + nnay + nnby^0 + nnxy^{-1} + \&c. \\ - y^3 &= -y^3 \\ - 2n^3 &= -2n^3y^0 \end{aligned}$$

30. Il faut supposer chaque terme de cette équation changée égal à zero, & l'on trouvera par les équations particulières que donne cette supposition,  $a = 1$ ,  $b = -\frac{1}{3}n$ ,  $c = -\frac{1}{3}nn$ ,  $d = +\frac{11}{81}n^3$ ,  $e = +\frac{64}{141}n^5$ . On peut dégager autant d'autres termes qu'on voudra, & continuer l'approximation à l'infini.

40. Il faut substituer ces valeurs de  $a, b, c, d, e$ , dans  $x = ay + by^0 + cy^{-1} + dy^{-2} + ey^{-3} + \&c.$  & l'on aura  $x = y - \frac{1}{3}ny - \frac{1}{3}nny^{-1} + \frac{11}{81}n^3y^{-2} + \frac{64}{141}n^5y^{-3} + \&c.$  c'est la valeur de  $x$  que l'on cherchoit.

Il faut entendre la même chose dans les cas semblables; où l'on se servira dans la suite de cette troisième manière.

E X E M P L E I I.

184. T R O U V E R par cette méthode la suite infinie qui exprime la racine quarrée de la grandeur  $rr - xx$ , c'est-à-dire, trouver la suite égale à  $\sqrt{rr - xx} = rr - xx^{\frac{1}{2}}$ .

Il faut supposer  $x = rr - xx^{\frac{1}{2}}$ , par conséquent  $xx = rr - xx$ , &  $xx + xx - rr = 0$ .

La question se réduit à trouver la suite infinie qui exprime la valeur de l'inconnue  $x$  dans cette équation, par les puissances de  $x$ . Pour la trouver,

10. Il faut supposer  $x = a + bxx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^{10} + \&c.$   $a, b, c, d, \&c.$  sont des grandeurs indéterminées.

20. Quarrant chaque membre on aura

$$\begin{aligned} xx &= aa + 2abxx + b^2x^2 + 2adx^3 + \&c. \\ &\quad + 2axx^4 + 2bax^5 \end{aligned}$$

Substituant cette valeur de  $xx$  dans l'équation  $xx + xx = rr$   $= 0$ , on aura l'équation changée suivante.

$$0 = \begin{cases} xx = aa + 2abxx + b^2x^2 + 2adx^3 \\ \quad \quad \quad + 2acx^4 + 2bcx^5 \&c. \\ + xx = \quad \quad + xx \\ - rr = -rr \end{cases}$$

Il faut supposer chaque terme de cette équation changée égal à zero, ce qui donnera autant d'équations particulieres qu'on en a besoin pour déterminer les coefficients indéterminez  $a, b, c, \&c.$

3°. Par la premiere  $aa = rr$ , on aura  $a = r$ ; par la seconde  $2ab = -1$ , en substituant la valeur de  $a$  à sa place dans  $2ab$ , on trouvera  $b = -\frac{1}{2r}$ . En substituant les valeurs de  $a$  & de  $b$  dans la troisieme  $2ac = -b^2$ , on trouvera  $c = \frac{1}{8r^3}$ . En substituant les valeurs de  $a, b, c$ , dans la quatrième  $2ad = -2bc$ , on trouvera  $d = \frac{1}{16r^5}$ .

4°. Il faut substituer ces valeurs de  $a, b, c, d$ , à la place de  $a, b, c, d$ , dans  $xx = a + bxx + cx^2 + dx^3 \&c.$  & l'on aura  $xx = \sqrt{rr - xx} = rr - xx^{\frac{1}{2}} = r - \frac{1}{2r}xx - \frac{1}{8r^3}x^3 - \frac{1}{16r^5}x^5 \&c.$  C'est la suite que l'on cherchoit qui exprime la racine quarrée de  $rr - xx$ ; on peut en trouver autant de termes qu'on voudra.

On trouvera de la même maniere la racine 3<sup>e</sup>, 4<sup>e</sup>, &c. de la somme ou de la difference de deux grandeurs.

Mais il faut remarquer que si l'on cherche la racine quarrée, ou 3<sup>e</sup>, ou 4<sup>e</sup>, &c. de  $rr + xx$ , il faut prendre celle des deux grandeurs  $r$  ou  $x$  qui est la plus petite, pour en faire la grandeur qui doit distinguer les termes de la suite qu'on cherche, qui est la valeur de  $x$ , c'est-à-dire, la racine de la grandeur complexe proposée.

### EXEMPLE III.

185. **T**ROUVER la racine quarrée d'une suite infinie  $a + by + cyy + dy^3 + ey^4 + fy^5, \&c.$  c'est-à-dire, trouver une suite infinie qui soit la valeur de  $\sqrt{a + by + cyy + dy^3 + ey^4} \&c.$

$$= a + by + cyy + dy^3 + ey^4 \&c.^{\frac{1}{2}}$$

Il faut supposer  $x = a + by + cyy + dy^3 + ey^4 \&c.^{\frac{1}{2}}$   
Par consequent  $xx = a + by + cyy + dy^3 + ey^4 \&c.$   
&  $0 = -xx + a + by + cyy + dy^3 + ey^4 \&c.$

La question se réduit à trouver la suite infinie qui exprime la valeur de  $x$  dans cette équation, dont les termes soient distingués par les puissances de  $y$ . Pour la trouver,

1°. Il faut supposer  $x = g + hy + iyy + ky^3 + ly^4 + py^5$ , &c. les grandeurs  $g, h, i$ , &c. sont indéterminées.

2°. En quarrant chaque membre, on aura

$$xx = gg + 2ghy + hbyy + 2gky^3 + 2gly^4 + 2giyy + 2hiy^3 + 2hky^4 + iiy^4 \text{ \&c.}$$

Substituant cette valeur de  $xx$  à la place de  $xx$  dans l'équation proposée  $0 = -xx + a + by + cyy$  &c. on aura l'équation changée qui suit.

$$0 = \begin{cases} -xx = -gg - 2ghy - 2giyy - 2gky^3 - 2gly^4 - 2hbyy - 2hiy^3 - 2hky^4 - iiy^4 \text{ \&c;} \\ a + by + cyy \text{ \&c.} = +a + by + cyy + dy^3 + ey^4 \text{ \&c.} \end{cases}$$

3°. Il faut supposer chaque terme de cette équation changée égal à zero; ce qui donnera les équations particulières dont on a besoin pour déterminer les coefficients indéterminés  $g, h, i$ , &c.

Par la première  $gg = a$ , on aura  $g = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ . En substituant dans la seconde  $2gh = b$ , la valeur de  $g$ , on aura

$$h = \frac{b}{2a^{\frac{1}{2}}}$$

En substituant dans la troisième  $2gi = c - hb$ , les valeurs de  $g$  & de  $h$ , on aura  $i = -\frac{bb}{8a^{\frac{1}{2}}} + \frac{c}{2a^{\frac{1}{2}}}$ .

En substituant dans la quatrième  $2gk = -2hi + d$ , les valeurs de  $g, h, i$ , on aura  $k = \frac{b^3}{16a^{\frac{1}{2}}} - \frac{bc}{4a^{\frac{1}{2}}} + \frac{d}{2a^{\frac{1}{2}}}$ .

On trouvera de même les valeurs des autres coefficients; ceci suffit pour faire concevoir la méthode.

4°. Il faut substituer ces valeurs de  $g, h, i, k$ , à leur place dans l'équation  $x = g + hy + iyy + ky^3$  &c. & l'on aura

$$x = a^{\frac{1}{2}} + \frac{b}{2a^{\frac{1}{2}}}y - \frac{bb}{8a^{\frac{1}{2}}}yy + \frac{b^3}{16a^{\frac{1}{2}}}y^3 + \frac{c}{2a^{\frac{1}{2}}}yy - \frac{bc}{4a^{\frac{1}{2}}}y^3 \text{ \&c.} + \frac{d}{2a^{\frac{1}{2}}}y^3$$

C'est la valeur de  $x$  que l'on cherchoit, c'est-à-dire ; cette suite est égale à  $\sqrt{ay + by + cyy + dy^3}$ , &c.

On trouvera de la même manière la racine 3<sup>e</sup>, 4<sup>e</sup>, 5<sup>e</sup>, &c. de la même suite.

#### EXEMPLE IV.

186. **T**ROUVER la racine quarrée de la suite infinie  $ay + byy + cy^3 + dy^4 + ey^5$  &c. c'est-à-dire, trouver la suite infinie qui est la valeur de  $\sqrt{ay + byy + cy^3 + dy^4 + ey^5}$  &c.  
 $= ay + byy + cy^3 + dy^4 + ey^5$  &c.  $^{\frac{1}{2}}$

Il faut supposer  $x = ay + byy + cy^3 + dy^4$  &c.  $^{\frac{1}{2}}$  Ainsi quarrant chaque membre, on aura l'équation  $xx = ay + byy + cy^3 + dy^4 + ey^5$  &c. &  $0 = -xx + ay + byy + cy^3 + dy^4$  &c.

La question se réduit à trouver la valeur de  $x$  dans cette équation, qui soit exprimée par une suite infinie dont les termes n'ayent que les puissances de  $y$ . Pour la trouver,

1<sup>o</sup>. Il faut supposer  $x = gy + byy + iy^3 + ly^4 + py^5$  &c. les coefficients  $g, h, i$ , &c. sont indéterminez.

2<sup>o</sup>. En quarrant chaque membre, on aura

$$xx = ggyy + 2ghyy^3 + 2giy^5 + 2gly^4 + 2gpy^6 \\ + hhy^3 + 2hiy^5 + 2hly^6 \quad \&c. \\ + 2iiy^6$$

On peut mettre un des  $y$  de chaque terme parmi les coefficients, afin que les puissances  $y, yy, y^3, y^4$ , &c. servent à distinguer les termes ; & l'on aura

$$xx = ggyy + 2gyhyy + 2gyiy^3 + 2gly^4 + 2gpy^6 \\ + yhhyy^3 + 2yhiy^5 + 2yhly^6 \quad \&c. \\ + yiiy^6$$

Il faut substituer cette valeur de  $xx$  à la place de  $xx$  dans l'équation proposée  $0 = -xx + ay + byy + cy^3$  &c. & l'on aura l'équation qui suit.

$$0 = \left\{ \begin{array}{l} -xx = -ggyy - 2gyhyy - 2gyiy^3 - 2gly^4 - 2gpy^6 \\ \quad - yhhyy^3 - 2yhiy^5 - 2yhly^6 \quad \&c. \\ \quad - yiiy^6 \\ + ay + byy + cy^3 \quad \&c. = + ay + byy + cy^3 + dy^4 + ey^5 \quad \&c. \end{array} \right.$$

3<sup>o</sup>. Il faut supposer chaque terme égal à zero, ce qui donnera les équations particulières dont on a besoin pour déterminer les coefficients indéterminez  $g, h, i$ , &c.

Par

Par la première  $gyg = a$ , on aura  $g \times y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$ , &  $g = a^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}}$ ; Et  $gy = a^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}$ . En substituant cette valeur de  $gy$  dans la 2<sup>e</sup>  $2gyb = b$ , on trouvera  $b = + \frac{1b}{2a^{\frac{1}{2}}} y^{-\frac{1}{2}}$ .

En substituant les valeurs de  $gy$  & de  $b$  dans la 3<sup>e</sup>  $2gyi = a - yhb$ , on trouvera  $i = - \frac{bb}{8a^{\frac{1}{2}}} y^{-\frac{1}{2}} + \frac{c}{2a^{\frac{1}{2}}} y^{-\frac{1}{2}}$ .

Substituant les valeurs de  $gy$ , de  $b$  & de  $i$  dans la 4<sup>e</sup>  $2gyl = - 2yhi + d$ , on trouvera  $l = + \frac{b^2}{16a^{\frac{1}{2}}} y^{-\frac{1}{2}} - \frac{bc}{4a^{\frac{1}{2}}} y^{-\frac{1}{2}} + \frac{d}{2a^{\frac{1}{2}}} y^{-\frac{1}{2}}$ . Substituant les valeurs de  $gy$ ,  $b$ ,  $i$ ,  $l$ , dans

la cinquième  $2gyp = - 2yhl - yii + e$ , on trouvera  $p = - \frac{5b^2}{128a^{\frac{1}{2}}} y^{-\frac{1}{2}} + \frac{3bbc}{16a^{\frac{1}{2}}} y^{-\frac{1}{2}} - \frac{bd}{4a^{\frac{1}{2}}} y^{-\frac{1}{2}} + \frac{cd}{8a^{\frac{1}{2}}} y^{-\frac{1}{2}} + \frac{e}{2a^{\frac{1}{2}}} y^{-\frac{1}{2}}$ .

4<sup>o</sup>. Il faut substituer ces valeurs de  $gy$ ,  $b$ ,  $i$ ,  $l$ ,  $p$ , dans l'équation  $x = gy + byy + iy^2$  &c. &c. l'on aura  $x =$

$$a^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} + \frac{b}{2 \times a^{\frac{1}{2}}} y^{\frac{1}{2}} - \frac{bb}{8 \times a^{\frac{1}{2}}} y^{\frac{1}{2}} + \frac{b^2}{16 \times a^{\frac{1}{2}}} y^{\frac{1}{2}} - \frac{5b^2}{128 \times a^{\frac{1}{2}}} y^{\frac{1}{2}} \&c.$$

$$+ \frac{c}{2 \times a^{\frac{1}{2}}} y^{\frac{1}{2}} - \frac{bc}{4 \times a^{\frac{1}{2}}} y^{\frac{1}{2}} + \frac{3bbc}{16 \times a^{\frac{1}{2}}} y^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \frac{d}{2 \times a^{\frac{1}{2}}} y^{\frac{1}{2}} - \frac{bd}{4 \times a^{\frac{1}{2}}} y^{\frac{1}{2}}$$

$$- \frac{cd}{8 \times a^{\frac{1}{2}}} y^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \frac{e}{2 \times a^{\frac{1}{2}}} y^{\frac{1}{2}}$$

C'est la même quarrée de la suite  $ay + byy + cy^2$  &c. que l'on cherchoit.

On trouvera de la même manière les racines  $3^o$ ,  $4^o$ ,  $5^o$ ,  $6^o$ , &c. de la même suite.

### AVERTISSEMENT.

ON peut trouver une formule générale, par le moyen de laquelle on aura tout d'un coup, par la simple substitution, les racines qu'on voudra de la somme ou de la différence de deux grandeurs, les racines qu'on voudra de la somme de trois, de quatre, de cinq, de six grandeurs, &c. & enfin les racines qu'on voudra d'une suite infinie de grandeurs. On pourra aussi par le moyen de la même formule, élever la somme de deux, trois, quatre grandeurs, &c. & une suite infinie de grandeurs à une puissance quelconque, ce qui abrégera de beaucoup le calcul de cette méthode, dans la résolution des équations auxquelles on pourra l'appliquer.

On fera ici une digression, où l'on mettra tous les principes qui servent à trouver & à démontrer cette formule générale, à cause de sa grande utilité, sans rien supposer que le seul calcul de l'Algebre.

## SECTION III.

*Qui contiennent les principes qui servent à démontrer les suites des differens ordres, & les usages de ces suites pour trouver une formule générale pour la formation des puissances, & pour l'extraction des racines quelconques.*

### DÉFINITION I.

187. L'ON a nommé dans la Section précédente *une suite*, la somme de tous les termes qui vont à l'infini, qui est la valeur approchée de la racine d'une équation, & une suite en general est la somme d'un nombre de grandeurs jointes ensemble par les signes + ou —, ou par tous les deux, lequel nombre de grandeurs va à l'infini. Il y a de ces suites dont tous les termes ont quelque rapport les uns aux autres : il y en a d'autres où cela ne se rencontre pas.

Les suites que l'on va expliquer ici, sont plusieurs suites de la première sorte, & qui de plus sont dépendantes les



des des autres; la premiere est supposee avoir une certaine propriete qu'on expliquera; la seconde est formee par l'addition faite par ordre des termes de la premiere; la troisieme, par l'addition faite par ordre des termes de la seconde; la quatrieme, par l'addition faite par ordre des termes de la troisieme; & ainsi de suite à l'infini.

Comme ces suites contiennent les proprietes generales des suites des nombres, qu'on appelle de *differeus ordres*, sçavoir du premier ordre, du second ordre, du troisieme ordre, &c. & qu'on fera l'application des proprietes de ces suites generales aux suites des nombres de differens ordres, on peut aussi les nommer *les suites des differens ordres*.

*Les suites generales des differens ordres.*

1 <sup>re</sup> .	2 <sup>e</sup> .	3 <sup>e</sup> .	4 <sup>e</sup> .	5 <sup>e</sup> .	6 <sup>e</sup> .	7 <sup>e</sup> .
a	g	m	w	z		
b	b	p	x			
c	i	q	y			
d	k	r	z			
f	l	s	ζ			

*Demandes ou suppositions sur ces suites.*

L.

188. LES grandeurs representees en general par les lettres de chaque colonne, sont ce qu'on appelle une suite; par exemple a, b, c, d, f, sont les grandeurs de la premiere suite; g, b, i, k, l, sont les grandeurs de la seconde suite; & ainsi des autres: on peut concevoir que chaque colonne va à l'infini.

La propriete de la premiere suite est que la somme d'autant de termes qu'on voudra prendre dans cette suite depuis le premier compris, est le produit du nombre des termes de cette somme, par le terme qui suit immediatement le

dernier terme de cette même somme, comme l'unité est à une grandeur donnée  $e$ , qu'on appellera l'exposant de cette suite; par exemple,  $a + b + c + d = 4f : 1. e$ ; d'où il suit que  $a + b + c + d = \frac{4f}{e}$ .

Ainsi la propriété de cette première suite peut aussi s'exprimer de cette manière : La somme d'autant de termes qu'on voudra depuis le premier  $a$  compris, est égale au produit du terme  $f$  qui suit immédiatement le dernier terme  $d$  de cette somme, par le nombre des termes  $4$  de la même somme, divisé par la grandeur déterminée  $e$ , qui est l'exposant de la première suite  $a + b + c + d = \frac{4f}{e}$ , de même  $a + b + c = \frac{3f}{e}$ ,  $a + b = \frac{2f}{e}$ ,  $a = \frac{f}{e}$ .

## I L

189. Dans chaque autre suite, c'est-à-dire dans la 2<sup>e</sup>, la 3<sup>e</sup>, la 4<sup>e</sup>, &c. le premier terme est toujours égal au premier terme de la suite qui la précède immédiatement; le second terme est égal à la somme des deux premiers termes de la suite qui la précède immédiatement; le troisième terme est égal à la somme des trois premiers termes de la suite qui la précède; & ainsi de suite.

Dans la seconde suite  $g = a$ ,  $h = a + b$ ,  $i = a + b + c$ ,  $k = a + b + c + d$  &c.

Dans la troisième  $m = g$ ,  $p = g + h$ ,  $q = g + h + i$  &c. il en est de même des autres suites suivantes, dont il faut concevoir que le nombre en va à l'infini.

*Première proposition sur les suites, qui en contient la propriété.*

190. Dans chaque suite la somme d'autant de termes qu'on voudra, depuis le premier compris, est égale au produit du nombre des termes de cette somme, par le terme qui suit le dernier terme de la même somme, divisé par une grandeur donnée qu'on appellera l'exposant de cette suite, lequel exposant est toujours l'exposant  $e$  de la première suite, augmenté de l'unité dans la seconde suite, augmenté de deux unités dans la troisième, de trois unités dans la quatrième, & ainsi de suite.

Soit la somme de tant de termes qu'on voudra de chaque suite  $= s$ .



Mettant à présent dans l'égalité  $\frac{r}{e} \times f + a + c + b + e$   
 $-\frac{1d}{e} - \frac{1c}{e} - \frac{1b}{e} - \frac{1a}{e} = k + i + b + g + o$ ,  $\frac{r}{e} \times i$  à la  
 place de  $\frac{r}{e} \times f + a + c + b + e$ , &  $-\frac{1d}{e} - \frac{1c}{e} - \frac{1b}{e} - \frac{1a}{e}$  à la place  
 de  $-\frac{1d}{e} - \frac{1c}{e} - \frac{1b}{e} - \frac{1a}{e}$ , on aura  $\frac{r}{e} \times i = k + i + b + g + o$ , multipliant le tout par  $e$ , & transposant,  
 on aura  $ri = e \times k + i + b + g + r \times k + i + b + g$ ,  
 divisant chaque membre par  $e + 1$ , on aura  $\frac{r}{e+1} \times i = k$   
 $+ i + b + g$ . Ce qu'il falloit démontrer.

*Démonstration pour la troisième suite.*

IL faut démontrer que  $s = m + p + q + r = r \times \frac{r}{e+1}$   
 Par la démonstr. précéd.  $k + i + b + g = \frac{r}{e+1} \times i = r$  par la 1<sup>re</sup> sup.

$$i + b + g = \frac{r-1}{e+1} \times k = q$$

$$b + g = \frac{r-1}{e+1} \times i = p$$

$$+ g = \frac{r-1}{e+1} \times b = m$$

il est évident que  $o = \frac{r-1}{e+1} \times g = o$ .

Donc  $\frac{r}{e+1} \times i + k + i + b + g = \frac{1d}{e+1} - \frac{1c}{e+1} - \frac{1b}{e+1} - \frac{1a}{e+1}$   
 $= r + q + p + m$ .

Mais,  $1^o$ ,  $\frac{r}{e+1} \times i + k + i + b + g = \frac{r}{e+1}$ , puisque  $e = k$   
 $+ k + i + b + g$  par la seconde supposition.

$2^o$ ,  $-\frac{1d}{e+1} - \frac{1c}{e+1} - \frac{1b}{e+1} - \frac{1a}{e+1} = -k - i - b - g = -r$  par la 1<sup>re</sup> sup.

$$-i - b - g = -q$$

$$-b - g = -p$$

$$-g = -m$$

$$e+1 \quad e+1$$

Donc en mettant  $\frac{r}{e+1}$  à la place de  $\frac{r}{e+1} \times i + k + i + b + g$ ,  
 &  $-\frac{1d}{e+1} - \frac{1c}{e+1} - \frac{1b}{e+1} - \frac{1a}{e+1}$  à la place de  $-\frac{1d}{e+1} - \frac{1c}{e+1} - \frac{1b}{e+1} - \frac{1a}{e+1}$  dans l'égalité

$$\frac{r}{e+1} \times i + k + i + b + g = \frac{1d}{e+1} - \frac{1c}{e+1} - \frac{1b}{e+1} - \frac{1a}{e+1} = r + q + p + m,$$

l'on aura  $\frac{r}{e+1} - \frac{1d}{e+1} - \frac{1c}{e+1} - \frac{1b}{e+1} - \frac{1a}{e+1} = r + q + p + m$  ; multipliant

le tout par  $e + 1$ , & transposant, on aura  $ri = e + 1 \times$

$r + q + p + m + 1 \times r + q + p + m$  ; divisant chaque

membre par  $e + 1 + 1 = e + 2$ , on trouvera  $r \times \frac{r}{e+1} = r$

$+ q + p + m$ . Ce qu'il falloit démontrer.

Il est évident que la même démonstration peut s'appli-  
 quer par ordre à la suite 4<sup>te</sup>, à la 5<sup>te</sup>, 6<sup>te</sup>, &c.

## C O R O L L A I R E I.

191. **O**N nommera  $E$  l'exposant de chaque suite, c'est-à-dire, on supposera que  $E$  représente  $e$  pour la première suite,  $e+1$  pour la seconde,  $e+2$  pour la troisième, &c. on appellera  $n$  le nombre des termes,  $D$  le dernier terme,  $\eta$  le terme qui suit le dernier terme,  $s$  la somme des termes.

$s = \eta \times \frac{1}{E}$  sera la formule qui servira à trouver la somme des termes de chaque suite. Il n'y aura qu'à substituer à la place de  $\eta$ , le terme qui suit le dernier terme, à la place de  $n$ , le nombre des termes, & à la place de  $E$ , l'exposant de la suite, & l'on aura la somme des termes de la suite.

Pour avoir une seconde formule par le moyen du dernier terme  $D$  de chaque suite, on remarquera que le nombre des termes qui précèdent le dernier est  $n-1$ , par conséquent la somme des termes moins le dernier, sera  $s - D = D \times \frac{1}{E}$ . Ajoutant  $+ D$  à chaque membre, on aura  $s = D \times \frac{n-1+E}{E}$ . Ainsi  $s = D \times \frac{n-1+E}{E}$  sera la formule qui servira à trouver la somme des termes de chaque suite, lorsqu'on connoîtra le nombre des termes, le dernier terme, & l'exposant de la suite. Il n'y aura qu'à les substituer à la place des lettres qui les représentent dans cette formule.

## C O R O L L A I R E II.

192. **E**N supposant que le dernier terme  $f$  de la première suite est donné, que le nombre des termes de chacune des suites est le même qui est aussi donné, & représenté par  $n$ , & que l'exposant de la première suite est  $e$ , qui est aussi donné; on peut trouver par le moyen de la formule  $s = D \times \frac{n-1+E}{E}$ , les sommes de chaque suite les unes après les autres, c'est-à-dire la valeur de chaque rang perpendiculaire, & en même temps la valeur du dernier rang parallèle, ou la somme égale à  $f+1+s+\xi$ , &c. La même méthode servira à trouver tel autre rang parallèle que l'on voudra.

1°. Pour avoir la somme des termes de la première suite, il faut substituer dans la formule  $s = D \times \frac{n-1+E}{E}$ ,  $f$  à la place de  $D$ ; l'exposant de la première suite  $e$ , à la place de  $E$ ; & l'on aura pour la somme de la première suite  $s = f \times \frac{n-1+e}{e} = ?$  par la seconde supposition.

2°. Pour la seconde suite, il faut substituer la somme de la première suite  $f \times \frac{n-1+E}{E}$ , qui est égale au dernier terme  $l$  de la seconde suite par la seconde supposition, à la place de  $D$  dans la formule  $s = D \times \frac{n-1+E}{E}$ , & l'exposant  $e + 1$  de la seconde suite, à la place de  $E$ ; & l'on aura pour la somme de la seconde suite  $s = f \times \frac{n-1+E}{E} \times \frac{n+E}{E+1} = t$  par la seconde supposition.

3°. Pour la troisième suite, il faut substituer dans la formule  $s = D \times \frac{n-1+E}{E}$ , le dernier terme de la troisième suite,  $t = f \times \frac{n-1+E}{E} \times \frac{n+E}{E+1}$ , à la place de  $D$ ; & l'exposant  $e + 2$  de la troisième suite, à la place de  $E$ ; & l'on aura pour la somme de la 3<sup>e</sup> suite  $s = f \times \frac{n-1+E}{E} \times \frac{n+E}{E+1} \times \frac{n+1+E}{E+2} = \zeta$ .

D'où il est évident qu'en continuant à l'infini la suite  $f \times \frac{n-1+E}{E} \times \frac{n+E}{E+1} \times \frac{n+1+E}{E+2} \times \frac{n+2+E}{E+3} \times \frac{n+3+E}{E+4}$  &c. les produits de ses termes pris de suite, donneront tout à la fois & les sommes de chaque suite, & les valeurs des termes du dernier rang parallèle  $f, l, t, \zeta$ , &c.

Comme le nombre des termes est représenté en général par  $n$ , en substituant au lieu de  $n$  tel nombre de termes qu'on voudra, & à la place de  $f$  le dernier terme de la première suite qui répond à ce nombre, l'on aura par le moyen de cette suite les sommes de tant de termes qu'on voudra de chaque suite, & les valeurs des termes de tel rang parallèle qu'on voudra.

*Seconde disposition des suites.*

S U I T E S.

1 <sup>re</sup> .	2 <sup>e</sup> .	3 <sup>e</sup> .	4 <sup>e</sup> .	5 <sup>e</sup> .	6 <sup>e</sup> .
$a$	$g$	$o$	$o$	$o$	$o$
$b$	$b$	$m$	$o$	$o$	$o$
$c$	$i$	$p$	$f$	$o$	$o$
$d$	$k$	$q$	$r$	$x$	$o$
$f$	$y$	$r$	$v$	$y$	$z$

*Troisième*

*Troisième supposition.*

193. **L**Es mêmes suites peuvent être disposées comme on les voit ici. Le premier terme de la troisième suite est à côté du second terme de la seconde; le second terme de la troisième suite est à côté du troisième terme de la seconde, &c. le premier terme de la quatrième suite est à côté du second terme de la troisième; le second terme de la quatrième suite est à côté du troisième terme de la troisième suite, &c. & ainsi des suites 5<sup>e</sup>, 6<sup>e</sup>, &c.

Le nombre des termes de la première & de la seconde suite est égal; dans la troisième il est moindre d'une unité; dans la quatrième, il est moindre de deux unités; dans la cinquième, de trois unités; & ainsi de suite.

Nommant  $n$  le nombre des termes de la première & de la seconde suite,  $n - 1$  est le nombre des termes de la troisième;  $n - 2$  est le nombre des termes de la quatrième;  $n - 3$  de la cinquième, &c.

On nommera, comme ci-dessus, le dernier terme de chaque suite  $D$ ; le terme qui suit le dernier  $A$ ; l'exposant de chaque suite  $E$ ; & le dernier terme de la première suite  $f$ , qu'on suppose donné, avec son exposant  $e$ .

*Seconde proposition sur les suites, qui enseigne à trouver les valeurs des termes  $f, l, r, v, y, z$ , &c. du dernier rang parallèle, ou de tel autre rang parallèle qu'on voudra.*

194. **O**N se servira de la formule  $s = D \times \frac{n-1+E}{E}$  pour trouver la valeur du dernier terme de la seconde suite, & de la formule  $s = A \times \frac{n}{E}$  pour trouver les derniers termes de la 3<sup>e</sup>, 4<sup>e</sup>, 5<sup>e</sup>, suites, &c.

1<sup>o</sup>. Pour la seconde suite, le nombre des termes est  $n$ ; le dernier terme  $l$  qu'on cherche, est égal à la somme des termes de la première suite. On aura la somme des termes de la première suite, en substituant dans  $s = D \times \frac{n-1+E}{E}$ ,  $f$  à la place de  $D$ , &  $e$  à la place de  $E$ ; ainsi  $l = f \times \frac{n-1+e}{e}$ .

2<sup>o</sup>. Pour la troisième suite, le nombre des termes est  $n - 1$ ; le dernier terme  $r$  est égal à la somme des termes de la seconde suite, moins le dernier terme qui en est exclu. Ainsi il faut trouver la somme des termes de la 2<sup>e</sup> suite, le nombre des termes étant  $n - 1$ , le terme qui suit le dernier étant  $l = f \times \frac{n-1+e}{e}$ , & l'exposant de la 2<sup>e</sup> suite étant  $e + n$ .

Il est évident qu'il ne faut pour cela que substituer dans la formule  $s = n! \times \frac{n}{2}$ ,  $f \times \frac{n-1}{2}$ , à la place de  $n$ ;  $n-1$  à la place de  $n$ , &  $e+1$  à la place de  $E$ ; & l'on aura  $r = f \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-1}{2}$ .

3°. Dans la quatrième suite, le nombre des termes est  $n-2$ ; le dernier terme est égal à la somme des termes de la troisième suite, moins le dernier terme  $r$  qui en est exclu, & qui est égal à  $f \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-1}{2}$ .

Pour trouver le dernier terme  $v$  égal à la somme  $m+p+q$ , il est évident qu'il ne faut que substituer dans  $s = n! \times \frac{n}{2}$ ,  $f \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-1}{2}$  à la place de  $n$ ;  $n-2$  à la place de  $n$ ; & l'exposant  $e+2$  de la troisième suite, à la place de  $E$ ; & l'on aura  $v = f \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-1}{2}$ .

D'où il est évident qu'en continuant à l'infini la suite  $f \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-1}{2}$ , &c. les produits de ses termes pris de suite, donneront par ordre les uns après les autres, les valeurs des termes du dernier rang parallèle de la seconde disposition des suites  $f, l, r, v, y, z$ , &c.

Mais  $n$  représentant en general tel nombre de termes qu'on voudra, en substituant dans cette suite le nombre qu'on voudra à la place de  $n$ , & le dernier terme de la première suite qui répond à ce nombre de termes, à la place de  $f$ , l'on aura par cette suite les valeurs des termes de tel rang parallèle qu'on voudra.

*Application de ce qu'on vient de démontrer des suites en general, aux suites des nombres des differens ordres.*

#### NOMBRES DES DIFFERENS ORDRES.

Unité ou 1 <sup>re</sup> suite.	1 <sup>er</sup> ordre, 2 <sup>e</sup> suite.	2 <sup>e</sup> ordre, 3 <sup>e</sup> suite.	3 <sup>e</sup> ordre, 4 <sup>e</sup> suite.	4 <sup>e</sup> ordre, 5 <sup>e</sup> suite.	5 <sup>e</sup> ordre, 6 <sup>e</sup> suite.	6 <sup>e</sup> ordre, 7 <sup>e</sup> suite.
1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7
1	3	6	10	15	21	28
1	4	10	20	35	56	84
1	5	15	35	70	126	210



*Quatrième supposition.*

195. **L**A première colonne contient les unitéz, ainsi chaque terme n'est que l'unité, & la somme des termes est égale au nombre des termes; par exemple, la somme de cinq unitéz est égale au nombre des termes 5. Et de plus, la somme d'autant de termes, c'est-à-dire, d'autant d'unitéz qu'on voudra; par exemple 4, qui est la somme de quatre termes, est au produit du nombre des termes de cette somme par le terme qui suit le dernier qui est 1, lequel produit est 4, comme l'unité est à l'unité, c'est-à-dire, à une grandeur donnée; ainsi 1 est l'exposant de la suite des unitéz. Ou bien, ce qui est la même chose, la somme d'autant de termes qu'on voudra; par exemple, la somme 4 de quatre termes est égale au produit du nombre des termes de cette somme, lequel nombre est 4, par le terme 1 qui suit le dernier, divisé par l'exposant 1 de la suite des unitéz, car  $4 = \frac{4 \times 1}{1}$ .

Ainsi nommant  $n$  le nombre des termes, & leur somme, l'on aura  $s. n \times 1 :: 1. 1$ ; ou bien  $s = \frac{n}{1}$ .

Les nombres du premier ordre sont formez par l'addition faite de suite des unitéz, & ce sont les nombres naturels; le premier 1 est égal au premier 1 de la suite des unitéz; le second 2 est égal à la somme des deux premiers termes de la suite des unitéz  $2 = 1 + 1$ ; le troisième 3 est égal à la suite des trois premiers termes de la suite des unitéz  $3 = 1 + 1 + 1$ , & ainsi de suite.

Les nombres du second ordre sont formez de la même manière par l'addition faite de suite des nombres du premier ordre.

Les nombres du troisième ordre sont formez par l'addition faite de suite des nombres du second ordre, & ainsi des autres ordres.

## C O R O L L A I R E I.

196. **I**L est évident que les propriétés qu'on a démontrées des suites en general, conviennent à ces suites des nombres des differens ordres. Ainsi, 1°. l'exposant des unitéz étant 1, l'exposant du premier ordre est  $1 + 1 = 2$ ; celui du second est  $2 + 1 = 3$ ; celui du troisième est  $3 + 1 = 4$ ; & ainsi des autres.

2°. En nommant le nombre des termes de chaque suite  $n$ ;

Ecc ij.

leur somme  $s$ , le dernier terme  $D$ , celui qui suit le dernier terme  $\mathcal{A}$ , l'exposant de chaque suite  $E$ , l'on aura ces deux formules pour trouver la somme des termes dans chaque suite,  $s = \mathcal{A} \times \frac{n}{E}$ ,  $s = D \times \frac{n-1+E}{E}$ .

En substituant dans laquelle on voudra de ces deux formules le dernier terme 1 de la première suite, ou le terme 1 qui suit le dernier, à la place de  $\mathcal{A}$  ou de  $D$ , & l'exposant 1 à la place de  $E$ , l'on aura pour la somme de la suite des unités  $s = 1 \times \frac{n}{1} = s$ , qui est le dernier terme de la seconde par la quatrième supposition.

En substituant dans la seconde formule  $s = D \times \frac{n-1+E}{E}$ , le dernier terme du premier ordre, marqué en general par  $1 \times \frac{n}{1}$ , à la place de  $D$ , & l'exposant 2 du premier ordre à la place de  $E$ , on aura pour la somme des termes du premier ordre  $s = 1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}$  égale, par la quatrième supposition, au dernier terme 15 du second ordre.

En substituant dans la même formule  $s = D \times \frac{n-1+E}{E}$ , le dernier terme  $1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}$  du second ordre qu'on vient de trouver à la place de  $D$ , & l'exposant 3 du second ordre à la place de  $E$ , on aura pour la somme des termes du second ordre  $s = 1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}$  égale au dernier terme 35 du troisième ordre par la quatrième supposition.

En substituant de même dans  $s = D \times \frac{n-1+E}{E}$ , le dernier terme  $1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}$  du troisième ordre qu'on vient de trouver, à la place de  $D$ , & l'exposant 4 du troisième ordre à la place de  $E$ , on aura pour la somme du troisième ordre  $s = 1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} \times \frac{n+3}{4}$  égale, par la quatrième supposition, au dernier terme 70 du quatrième ordre.

D'où il est évident qu'en continuant à l'infini la suite  $1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} \times \frac{n+3}{4} \times \frac{n+4}{5} \times \frac{n+5}{6}$ , &c. les produits des grandeurs qui la composent, pris de suite depuis la première 1, donneront en même temps par ordre les sommes des suites, & les termes du dernier rang parallèle.

Et comme  $n$  représente en general le nombre de termes qu'on voudra, en substituant dans cette suite le nombre de termes qu'on voudra à la place de  $n$ , l'on aura les valeurs des sommes de tant de termes qu'on voudra de chaque suite, & les valeurs des termes de quel rang parallèle on voudra.

Unité ou 1 <sup>re</sup> suite.	1. ordre, 2 <sup>e</sup> suite.	2 <sup>e</sup> ordre, 3 <sup>e</sup> suite.	3 <sup>e</sup> ordre, 4 <sup>e</sup> suite.	4 <sup>e</sup> ordre, 5 <sup>e</sup> suite.	5 <sup>e</sup> ordre, 6 <sup>e</sup> suite.
1	1	0	0	0	0
1	2	1	0	0	0
1	3	3	1	0	0
1	4	6	4	1	0
1	5	10	10	5	1

197. Cette disposition est la même que la seconde disposition des suites generales; ainsi la troisième supposition & la seconde proposition, doivent être appliquées à cette seconde disposition.

### COROLLAIRE II.

198. PAR conséquent on peut trouver par le moyen des formules  $s = n \times \frac{n}{E}$ , &  $s = D \times \frac{n-1+E}{E}$ , les valeurs des termes du dernier rang parallele, ou de tel autre rang parallele qu'on voudra.

1<sup>o</sup>. Le terme de chaque rang de la suite des unitez étant toujours 1, pour avoir le dernier terme de la seconde suite ou du premier ordre qui est toujours égal à la somme des termes de la première suite ou des unitez, il faut substituer dans  $s = D \times \frac{n-1+E}{E}$ , 1 à la place de  $D$ , l'exposant de la première suite  $n$  à la place de  $E$ ; & l'on aura pour la somme des unitez, ou, ce qui est la même chose, pour la valeur du dernier terme du premier ordre,  $s = 1 \times \frac{n}{1}$ .

2<sup>o</sup>. Dans le second ordre ou dans la troisième suite, le nombre des termes est moindre d'une unité que celui de la suite précédente, ainsi c'est  $n - 1$ . Le dernier terme de la troisième suite est égal à la somme des termes de la seconde moins le dernier terme de la seconde qui est exclu de cette somme: on vient de trouver que le dernier terme de la seconde est  $1 \times \frac{n}{1}$ . Ainsi pour avoir le dernier terme de la troisième suite; il faut trouver la somme de la seconde suite

Ecc iij

dont on connoît le nombre des termes  $n-1$ , le terme  $1 \times \frac{n}{1}$  qui suit le dernier terme, & l'exposant qui est 2. Il n'y a qu'à substituer dans la formule  $s = \sigma \times \frac{n}{E}$ ,  $1 \times \frac{n}{1}$  à la place de  $\sigma$ ,  $n-1$  à la place de  $n$ , & 2 à la place de  $E$ ; & l'on aura pour la valeur du dernier terme de la troisième suite  $1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}$ .

3°. Dans le troisième ordre on trouvera, par un semblable raisonnement, que le dernier terme du troisième ordre est égal à la somme du second ordre moins son dernier terme qui est  $1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}$ ; que le nombre des termes est  $n-2$ ; & que l'exposant du troisième ordre est 3. Ainsi en substituant dans  $s = \sigma \times \frac{n}{E}$ ,  $1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}$  à la place de  $\sigma$ ,  $n-2$  à la place de  $n$ , & 3 à la place de  $E$ , on trouvera que le dernier terme de la quatrième suite ou du troisième ordre est  $1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}$ .

*Formule generale, qu'il faut bien remarquer pour la suite:*

199. D'OU il est évident qu'en continuant à l'infini la suite  $1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} \times \frac{n-4}{5} \times \frac{n-5}{6} \times \frac{n-6}{7}$ , &c. les produits de toutes les grandeurs qui la composent pris de suite depuis la première 1, donneront par ordre tous les termes du rang parallèle, par exemple du dernier 1, 5, 10, 10, 5, 1, en substituant le nombre des termes 5 à la place de  $n$ .

Et comme le nombre des termes marqué en general par  $n$ , représente tel nombre des termes qu'on voudra, il est évident qu'en mettant à la place de  $n$  tel nombre qu'on voudra, on aura de suite les valeurs des termes de tel rang parallèle des suites qu'on voudra; & que cette suite est une formule generale pour les trouver tous.

#### AVERTISSEMENT.

ON peut concevoir d'autres dispositions des suites generales des differens ordres, & des suites des nombres de differens ordres, que celle qu'on a mise la seconde; & même on peut concevoir d'autres suites qui naîtroient de ces suites par la multiplication faite par ordre de chaque terme d'une suite par lui-même, ou par le terme qui le précède ou qui le suit immédiatement dans la même suite, ou qui s'en pour-

soient former de beaucoup d'autres manières, qui peuvent avoir plusieurs usages : mais comme l'on n'a besoin ici que de ce qu'on a démontré de ces suites dans leur première & dans leur seconde disposition, il est inutile de prolonger cette digression de ces autres suites.

200. Application de la formule générale  $1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} \times \frac{n-4}{5} \times \frac{n-5}{6}$ , &c. à la formation des puissances de la somme ou de la différence de deux grandeurs représentées par  $a + b$ , ou  $a - b$ .

Table de la formation ordinaire des puissances de la somme ou de la différence de deux grandeurs représentées par  $a + b$ , ou  $a - b$ .

$1a$	$+ 1b$				
$1aa$	$+ 2ab$	$+ 1bb$	2 <sup>e</sup> puissance.		
$1a^3$	$+ 3aab$	$+ 3abb$	$+ 1b^3$	3 <sup>e</sup> puissance.	
$1a^4$	$+ 4a^3b$	$+ 6aabb$	$+ 4ab^3$	$+ 1b^4$	4 <sup>e</sup> puissance.
$1a^5$	$+ 5a^4b$	$+ 10a^3bb$	$+ 10aabb^2$	$+ 5ab^4$	$+ 1b^5$ 5 <sup>e</sup> puissance.

Il n'y a qu'à mettre pour les puissances de  $a - b$ , le signe — devant tous les termes pairs dans lesquels les dimensions de  $b$  sont en nombre impair, c'est-à-dire devant les seconds, les quatrièmes, les sixièmes termes, &c.

#### REMARQUE.

201. SI l'on se rend familière la formation ordinaire des puissances de deux grandeurs  $a + b$ , ou  $a - b$ , on verra clairement, 1<sup>o</sup>. que les puissances de  $a$  sont seules sans  $b$  dans le premier terme ; que la puissance de  $a$  diminue par ordre dans chaque terme qui suit le premier, d'un degré ; & que  $b$  est toujours linéaire dans le second terme, & augmente par ordre dans chaque terme suivant, d'un degré.

Ainsi supposant que l'exposant de chaque puissance à laquelle on peut élever  $a + b$ , ou  $a - b$ , est représenté en général par  $n$ , les produits des lettres  $a$  &  $b$  dans chaque terme seront par ordre  $a^n$ ,  $a^{n-1}b$ ,  $a^{n-2}bb$ ,  $a^{n-3}b^3$ ,  $a^{n-4}b^4$ , &c.

2°. On verra clairement que les nombres qui sont les coefficients des termes de chaque puissance, par exemple, 1, 2, 1, de la seconde; 1, 3, 3, 1, de la troisième; 1, 4, 6, 4, 1, de la quatrième; 1, 5, 10, 10, 5, 1, de la cinquième, &c. sont exactement les termes de chaque rang perallege de la seconde disposition des suites des nombres des differens ordres, & que l'exposant du degré de chaque puissance, par exemple, l'exposant 2 de la seconde, l'exposant 3 de la troisième, &c. est exactement le nombre des termes qui désigne le rang perallege qu'il faut prendre pour avoir les coefficients de la seconde puissance, de la troisième, de la quatrième, &c.

## C O R O L L A I R E.

201. PAR conséquent  $n$  représentant ce nombre des termes dans la formule  $1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}$ , &c. qui sert à trouver les termes de chaque rang perallege,  $n$  représente aussi le degré de la puissance, puisque le degré de la puissance est égal au nombre des termes.

Ainsi pour élever  $a + b$  à quelque puissance que ce puisse être, représentée en general par  $n$ , le coefficient du premier terme de la puissance  $\overline{a+b}^n$  sera égal à 1, le second à  $1 \times \frac{n}{1}$ , le troisième à  $1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}$ , le quatrième,  $1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}$ , le cinquième,  $1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4}$ , & ainsi de suite: ce qui donne la formule generale suivante.

*Formule generale pour élever la somme ou la difference de deux grandeurs  $a + b$ , ou  $a - b$  à une puissance quelconque.*

$$203. \overline{a+b}^n = 1a^n + 1 \times \frac{n}{1} a^{n-1}b + 1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} a^{n-2}bb + 1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} a^{n-3}b^3 + 1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} a^{n-4}b^4 + 1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} \times \frac{n-4}{5} a^{n-5}b^5; \text{ \& ainsi à l'infini.}$$

Il n'y a qu'à mettre le signe — devant tous les termes pairs, le second, le quatrième, le sixième, &c. & l'on aura la formule de  $\overline{a-b}^n$ .

On peut négliger l'unité par où commence chaque coefficient, l'unité n'apportant aucun changement dans les produits.

On élèvera par le moyen de cette formule generale, la somme ou la difference de deux grandeurs à telle puissance qu'on voudra, par exemple, à la seconde puissance dont l'exposant

L'exposant est 2, à la troisième dont l'exposant est 3, &c. en substituant dans la formule l'exposant de cette puissance à la place de  $n$ , & la première grandeur à la place de  $a$ , & la seconde à la place de  $b$ ; & l'on aura la puissance que l'on cherche.

204. Quoique la formule soit infinie, elle donne pourtant la puissance finie de la somme ou de la différence de deux grandeurs; parceque tous les termes infinis de la formule qui suivent ceux qui ont servi à trouver la puissance que l'on cherchoit, deviennent égaux à zero, chacun contenant parmi ses coefficients une grandeur égale à zero. Par exemple, quand on élève par la formule,  $a + b$  à la troisième puissance, après avoir trouvé par les quatre premiers termes de la formule, la puissance de  $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$ , le cinquième terme & les autres suivans, contiennent tous parmi leurs coefficients la grandeur  $n - 3 = 0$ , qui rend tous ces termes égaux à zero, puisqu'une grandeur étant multipliée par zero, le produit est zero.

## C O R O L L A I R E.

205. SI l'on se rend familière la formation des puissances de trois grandeurs  $a + b + c$ ; de quatre grandeurs  $a + b + c + d$ ; de cinq grandeurs,  $a + b + c + d + e$ , & ainsi à l'infini, on verra clairement que dans chaque puissance, par exemple dans la quatrième, la quatrième puissance des deux premiers termes, qui est  $a^4 + 4a^3b + 6aabb + 4ab^3 + b^4$ , peut servir de formule particulière pour trouver tous les termes de la quatrième puissance de  $a + b + c$ , de  $a + b + c + d$ , de  $a + b + c + d + e$ , &c.

Car après avoir trouvé la quatrième puissance des deux premiers termes  $a + b$ , il n'y a qu'à supposer que les deux premiers termes  $a + b$  sont représentés par  $a$ , & le troisième  $c$  par  $b$ ; & supposant que  $a^4$  dans la formule particulière  $a^4 + 4a^3b + 6aabb + 4ab^3 + b^4$ , représente la quatrième puissance de  $a + b$  déjà trouvée, le second terme  $4a^3b$  marquera qu'il faut prendre quatre fois la troisième puissance de  $a + b$  représentée par  $a^3$ , & la multiplier par  $b$  représentée par  $b$ ; le troisième  $6aabb$  marquera qu'il faut prendre six fois la seconde puissance de  $a + b$  représentée

par  $aa$ , & la multiplier par la seconde puissance de  $c$  représentée par  $bb$ ; & ainsi de suite.

Après avoir ainsi trouvé la quatrième puissance de  $a + b + c$ , il faut supposer  $a + b + c$  représentée par  $a$ , & la 4<sup>e</sup> grandeur  $d$  représentée par  $b$ ; & que la quatrième puissance de  $a + b + c$  est représentée dans la formule particulière par  $a^4$ , le second terme  $4a^3b$  marquera qu'il faut prendre quatre fois la troisième puissance de  $a + b + c$  représentée par  $a^3$ , & la multiplier par  $d$  représentée par  $b$ . Le troisième terme  $6a^2bb$  marquera qu'il faut prendre six fois la seconde puissance de  $a + b + c$  représentée par  $aa$ , & la multiplier par la seconde puissance de  $d$  représentée par  $bb$ ; & ainsi à l'infini.

Il en est de même de toutes les autres puissances.

Or comme chaque puissance particulière de deux grandeurs  $a + b$  sert de formule particulière pour trouver la même puissance de trois grandeurs, de quatre, de cinq, de six, & ainsi à l'infini, de même la formule générale  $a^n + \frac{n}{1} a^{n-1}b + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} a^{n-2}b^2$ , &c. de toutes les puissances de deux grandeurs  $a + b$ , sert à trouver la formule générale de toutes les puissances de tant de grandeurs qu'on voudra, & d'une suite infinie de grandeurs. Et comme il suffit de se rendre bien familières les formations particulières des puissances de deux grandeurs, pour trouver par ces puissances de deux grandeurs les mêmes puissances de trois, de quatre, & d'une suite infinie de grandeurs, il suffit de même de se rendre bien familière la formation générale de toutes les puissances de deux grandeurs, pour trouver soi-même la formule générale des puissances de trois, de quatre, de cinq grandeurs, & d'une suite infinie de grandeurs. Ainsi il suffit de mettre ici cette formule générale comme un Corollaire de la formule générale des puissances de deux grandeurs, & il est inutile d'ajouter un long discours pour faire concevoir la formation de cette formule générale.

(Voyez la Table, dont voici le lieu. Art. 206.)

Les formules générales de la Table servent à élever une suite donnée de grandeurs à telle puissance qu'on voudra, en substituant dans les formules l'exposant de cette puissance à la place de  $n$ ; la première grandeur de la suite donnée à



rée,

Or l'exposant est représenté par la lettre  $n$ ,  
 ndeurs.

quelconque.

$$\overline{a} + \frac{1}{2} \times \frac{n-1}{2} a^{n-1} b^2 + \&c.$$

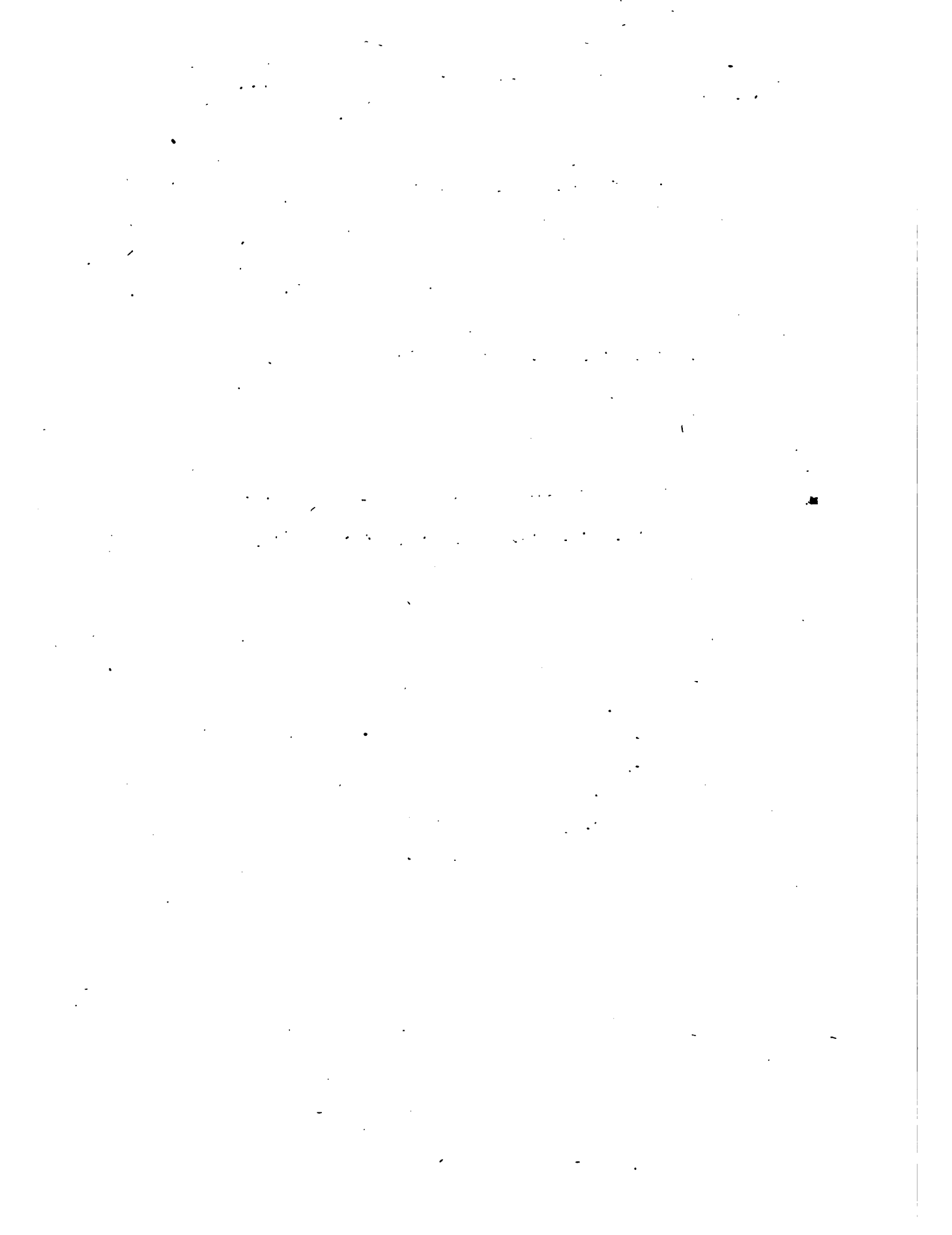
aire la racine quelconque.

$$\left. \begin{aligned} \overline{a+b} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{2} \times \frac{n-3}{2} a^{n-4} b^3 \\ + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{2} a^{n-3} b b c \\ + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} a^{n-2} c c \\ + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} a^{n-2} b d \\ + \frac{n}{1} a^{n-1} e \end{aligned} \right\} \times y^4 + \&c.$$

extraire la racine quelconque.

$$\left. \begin{aligned} \overline{ay} + \frac{n-1}{2} a^{n-1} b^2 \right\} \times y^{n+3} + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{2} \times \frac{n-3}{2} a^{n-4} b^3 \\ + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{2} a^{n-3} b b c \\ + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} a^{n-2} c c \\ + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} a^{n-2} b d \\ + \frac{n}{1} a^{n-1} e \end{aligned} \right\} \times y^{n+4}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{2} \times \frac{n-3}{2} \times \frac{n-4}{2} a^{n-7} b^7 \\ \times \frac{n-2}{2} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{2} \times \frac{n-3}{2} a^{n-6} b^6 c \\ \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{2} \times \frac{n-3}{2} \times \frac{n-4}{2} a^{n-5} b^5 c c \\ + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{2} \times \frac{n-3}{2} a^{n-4} b^4 c^3 \\ \frac{1}{2} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{2} \times \frac{n-3}{2} \times \frac{n-4}{2} a^{n-5} b^4 d \\ + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{2} a^{n-3} b d d \\ + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{2} \times \frac{n-3}{2} a^{n-4} b b c d \\ + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{2} a^{n-3} c c d \\ + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{2} \times \frac{n-3}{2} a^{n-4} b^3 e \\ + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{2} a^{n-3} b c e \\ + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} a^{n-2} d e \\ + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{2} a^{n-3} b b f \\ + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} a^{n-2} c f \\ + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} a^{n-2} b g \\ + \frac{n}{1} a^{n-1} b \end{aligned} \right\} \times y^{n+7} + \&c.$$



la place de  $a$ ; la seconde à la place de  $b$ , &c. l'inconnue donnée à la place de l'inconnue  $y$ , &c.

## A V E R T I S S E M E N T.

**C**ES formules generales peuvent servir à élever deux grandeurs, ou une suite infinie de grandeurs, non seulement à une puissance quelconque, dont l'exposant est un nombre entier positif, comme on l'a démontré jusqu'ici, mais encore à une puissance quelconque, dont l'exposant est un nombre entier négatif, & à une puissance quelconque, dont l'exposant est un nombre rompu, soit positif, soit négatif. On va donner une démonstration particulière pour le cas où l'exposant est un nombre entier négatif, & ensuite on le démontrera par la première méthode du second Problème, pour les cas où l'exposant de la puissance est un nombre rompu, positif ou négatif; & on mettra ces derniers cas pour servir de 5<sup>e</sup>, 6<sup>e</sup> & de 7<sup>e</sup> exemples du Problème.

207. Il faut remarquer, comme on l'enseigne dans l'Algebre, que  $\frac{1}{a}$  se marque ainsi  $a^{-1}$ ;  $\frac{1}{a+b}$  se marque ainsi  $\overline{a+b}^{-1}$ ;

$\frac{a+b}{a+c}$  se marque ainsi  $\overline{a+b}^1 \times \overline{a+c}^{-1}$ ; & en general

$\frac{1}{a+b}$  se marque ainsi  $\overline{a+b}^{-n}$ .

D'où l'on voit qu'un exposant négatif marque que la puissance de la grandeur dont il est l'exposant, est dans le dénominateur d'une fraction.

Il faut aussi remarquer que les incommensurables se marquent comme les puissances, & leurs exposans sont des nombres rompus. Par exemple  $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ ;  $\sqrt[3]{aa} = a^{\frac{2}{3}}$ ;  $\sqrt[n]{ay} = a^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{n}}$ ;  $a \sqrt[n]{ay} = a^{\frac{1}{n} + 1} y^{\frac{1}{n}}$ ;  $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ ;  $\frac{1}{\sqrt[n]{a}} = a^{-\frac{1}{n}}$ ;  $\frac{a^m}{\sqrt[n]{a}} = a^{m - \frac{1}{n}}$ ;  $a^m \sqrt[n]{a} = a^{m + \frac{1}{n}}$ ; & ainsi des autres.

*Troisième proposition, qui contient les principes ou Problèmes qui servent à démontrer que les formules generales qui précèdent s'étendent aux puissances de deux grandeurs, ou d'une suite infinie de grandeurs, dont l'exposant est un nombre entier négatif.*

208. **P**OUR trouver la suite infinie, qui est la valeur de  $\frac{1}{a+b}$ .  
Efff ij.

$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a+b}^{-1}$ , de  $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a+b}^{-1}$ , de  $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a+b}^{-1}$ , &c. il faut faire les opérations suivantes.

1°. Il faut partager  $a+b = aa + 2ab + bb$  en deux grandeurs, dont la première est  $aa+ab$ , la seconde  $ab+bb$ .

Il faut de même partager  $a+b = a^3 + 3aab + 3abb + b^3$  en  $a^3 + 2aab + abb$ , &  $aab + 2abb + b^3$ .

Et de même  $a+b = a^4 + 4a^3b + 6aabb + 4ab^3 + b^4$  en  $a^4 + 3a^3b + 3aabb + ab^3$ , &  $a^3b + 3aabb + 3ab^3 + b^4$ , & ainsi des autres puissances suivantes.

Pour faire ce partage, il faut que la seconde partie ou grandeur étant le numérateur d'une fraction, & la première le dénominateur, cette fraction soit égale à  $\frac{1}{2}$ ; ce qui est possible dans toutes les puissances de  $a+b$  ou de  $a-b$ .

Il faut ensuite diviser l'unité par  $aa + 2ab + bb$  dans la seconde puissance, par  $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$  dans la troisième, & ainsi des autres, en prenant pour première partie du diviseur la première grandeur, & pour la seconde partie du diviseur la seconde grandeur qu'on a déterminées ci-dessus.

Cette division donnera des quotiens qui auront des termes à l'infini, & tous ces termes seront des fractions.

2°. Il faut faire sur chacune de ces fractions ce qu'on a fait dans la première opération, c'est-à-dire, diviser le numérateur par le dénominateur, prenant le seul premier terme du dénominateur pour première partie du diviseur, & tous les autres termes du dénominateur pour la seconde partie du diviseur.

Tous les quotiens qu'on trouvera à l'infini de ces secondes divisions, contiendront des termes qui étant ordonnez de suite les uns sous les autres, donneront des suites dont on trouvera les sommes par le moyen des suites qu'on a démontrées ci-dessus.

3°. En trouvant les sommes de chaque colonne de ces suites, par les méthodes des suites précédentes, on aura la suite infinie qui exprime la puissance que l'on cherche.

Ceci s'éclaircira par les opérations suivantes.

Pour la seconde puissance.

POUR trouver la suite égale à  $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a+b} = \frac{1}{a+b}$ , 1°. il faut partager le dénominateur ou diviseur  $aa + 2ab + bb$ , en deux parties, dont la première est  $aa + ab$ , la seconde  $ab + bb$ , de manière que  $\frac{ab+bb}{aa+ab} = \frac{b}{a}$ . Il faut diviser 1 par  $aa + ab$ , &  $ab + bb$  pour la seconde.

Grandeur à diviser.  $\left\{ \begin{array}{l} aa + ab, + ab + bb, \text{ diviseur.} \\ \hline \text{quotient.} \\ \frac{1}{aa+ab} - \frac{b}{a^2+aab} + \frac{bb}{a^3+a^2b} - \frac{b^3}{a^4+a^3b} + \frac{b^4}{a^5+a^4b} \text{ \&c.} \end{array} \right.$

1<sup>er</sup> reste, —  $2 \frac{b}{a}$   
 2<sup>e</sup> reste, +  $2 \frac{bb}{aa}$   
 3<sup>e</sup> reste, —  $2 \frac{b^3}{a^3}$   
 4<sup>e</sup> reste, +  $2 \frac{b^4}{a^4}$

$2$  Signifie que la grandeur que cette marque précède, est effacée.

En divisant 1 par  $aa + ab$ , on trouvera le quotient  $\frac{1}{aa + ab}$ , ensuite il faut multiplier ce quotient par la seconde partie du diviseur, & l'on aura  $\frac{ab+bb}{aa+ab} = \frac{b}{a}$ , & comme il faut soustraire ce produit de la grandeur à diviser, il faut écrire le premier reste  $\frac{b}{a}$  au nombre à diviser avec le signe —.

Il faut ensuite diviser ce reste —  $\frac{b}{a}$  par la première partie du diviseur  $aa + ab$ , & l'on aura le quotient —  $\frac{b}{a^2+aab}$ , c'est le second terme du quotient.

Il faut multiplier par ce quotient la seconde partie du diviseur  $ab + bb$ , & l'on aura —  $\frac{ab+bb}{a^2+aab} = -\frac{bb}{a^3}$ , qu'il faut ôter de la grandeur à diviser, & l'on aura le 2<sup>e</sup> reste +  $\frac{bb}{aa}$ .

En continuant la division, on trouvera un quotient qui aura une infinité de termes, qui sont ceux que l'on voit ici marquez au quotient.

2°. Il faut prendre par ordre chaque terme du quotient, & trouver par la division du numérateur par le dénominateur, la suite infinie qui en est le quotient, c'est-à-dire, qui est la valeur de la fraction qui forme ce terme. On appellera cela réduire chaque terme en la suite infinie qui en est

la valeur. On trouvera, en faisant ces divisions, que le  
 1<sup>er</sup> terme  $\frac{1}{a^2 + ab}$  se réduit en  $\frac{1}{a^2} - \frac{b}{a^3} + \frac{bb}{a^4} - \frac{b^3}{a^5} + \frac{b^4}{a^6} - \frac{b^5}{a^7} \&c.$   
 le 2<sup>e</sup>  $-\frac{b}{a^3 + aab}$  en  $-\frac{b}{a^3} + \frac{bb}{a^4} - \frac{b^3}{a^5} + \frac{b^4}{a^6} - \frac{b^5}{a^7} \&c.$   
 le 3<sup>e</sup>  $+\frac{bb}{a^4 + a^2b}$  en  $+\frac{bb}{a^4} - \frac{b^3}{a^5} + \frac{b^4}{a^6} - \frac{b^5}{a^7} \&c.$   
 le 4<sup>e</sup>  $-\frac{b^3}{a^5 + a^3b}$  en  $-\frac{b^3}{a^5} + \frac{b^4}{a^6} - \frac{b^5}{a^7} \&c.$   
 le 5<sup>e</sup>  $+\frac{b^4}{a^6 + a^4b}$  en  $+\frac{b^4}{a^6} - \frac{b^5}{a^7} \&c.$   
 le 6<sup>e</sup>  $-\frac{b^5}{a^7 + a^5b}$  en  $-\frac{b^5}{a^7} \&c.$

Ce qu'on peut continuer à l'infini.

En prenant la somme de chaque rang perpendiculaire,  
 on aura  $\frac{1}{a+b} = \overline{a+b}^{-1} = \frac{1}{a^2} - \frac{1b}{a^3} + \frac{1bb}{a^4} - \frac{1b^3}{a^5}$   
 $+ \frac{1b^4}{a^6} - \frac{1b^5}{a^7} \&c.$  ou, ce qui est la même chose,  $1a^{-2}$   
 $- 2a^{-3}b + 3a^{-4}bb - 4a^{-5}b^3 + 5a^{-6}b^4 - 6a^{-7}b^5 \&c.$

*Pour la troisième puissance.*

**P**O U R trouver la suite qui est égale à  $\frac{1}{a+b} = \overline{a+b}^{-1}$   
 $= \frac{1}{a^3 + 3aab + 3abb + b^3}$ , 1<sup>o</sup>. après avoir partagé  $a^3 + 3aab$   
 $+ 3abb + b^3$  en deux parties  $a^3 + 2aab + abb$ ,  $+aab + 2abb$   
 $+ b^3$ , qui sont telles que  $\frac{aab + 2abb + b^3}{a^3 + 2aab + abb} = \frac{b}{a}$ , il faut diviser  
 l'unité par le diviseur  $a^3 + 2aab + abb$ ,  $+aab + 2abb + b^3$ ,  
 en prenant la première de ces deux parties pour la première  
 partie du diviseur, & la seconde partie pour la seconde par-  
 tie du diviseur, & l'on trouvera que le quotient est la suite  
 $\frac{1}{a^3 + 2aab + abb} = \frac{1}{a^3 + 2a^2b + aab} + \frac{1b}{a^3 + 2a^2b + aab} - \frac{1b^2}{a^3 + 2a^2b + aab}$   
 $+ \frac{1b^3}{a^3 + 2a^2b + aab} - \frac{1b^4}{a^3 + 2a^2b + aab} - \frac{1b^5}{a^3 + 2a^2b + aab} \&c.$

2<sup>o</sup>. On réduira par ordre chacun des termes de cette suite,  
 en la suite infinie qui lui est égale, ce qui se fait en divisant  
 le numérateur de chacun par son dénominateur, en prenant  
 la puissance de  $a$  seule, comme  $a^3$  dans le premier terme,  
 $a^3$  dans le second, &c. pour la première partie du diviseur,

# LIVRE VII.

& le reste du dénominateur pour la seconde partie du divi-  
seur ; & l'on trouvera que

$$\begin{array}{lcl} \frac{1}{a^3 + 3aab + abb} \text{ se réduit en } & \frac{1}{a^3} - \frac{3b}{a^4} + \frac{3bb}{a^5} - \frac{4b^3}{a^6} + \frac{7b^4}{a^7} - \frac{6b^5}{a^8} + \frac{7b^6}{a^9} & \&c. \\ - \frac{b}{a^3 + 3a^2b + aab} \text{ en } & - \frac{b}{a^3} + \frac{3bb}{a^4} - \frac{3b^3}{a^5} + \frac{4b^4}{a^6} - \frac{7b^5}{a^7} + \frac{6b^6}{a^8} & \&c. \\ + \frac{bb}{a^3 + 3a^2b + aab} \text{ en } & + \frac{bb}{a^3} - \frac{3b^3}{a^4} + \frac{3b^4}{a^5} - \frac{4b^5}{a^6} + \frac{7b^6}{a^7} & \&c. \\ - \frac{b^3}{a^3 + 3a^2b + aab} \text{ en } & - \frac{b^3}{a^3} + \frac{3b^4}{a^4} - \frac{3b^5}{a^5} + \frac{4b^6}{a^6} & \&c. \\ + \frac{b^4}{a^3 + 3a^2b + aab} \text{ en } & + \frac{b^4}{a^3} - \frac{3b^5}{a^4} + \frac{3b^6}{a^5} & \&c. \\ - \frac{b^5}{a^3 + 3a^2b + aab} \text{ en } & - \frac{b^5}{a^3} + \frac{3b^6}{a^4} & \&c. \\ + \frac{b^6}{a^3 + 3a^2b + aab} \text{ en } & + \frac{b^6}{a^3} & \&c. \end{array}$$

On peut continuer cette suite à l'infini.

En prenant les sommes de chaque rang perpendiculaire,  
on aura  $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{bb}{a^3} - \frac{10b^3}{a^4}$   
 $+ \frac{15b^4}{a^5} - \frac{21b^5}{a^6} + \frac{28b^6}{a^7} \&c.$  ou, ce qui est la même chose,  
 $1a^{-1} - 3a^{-2}b + 6a^{-3}bb - 10a^{-4}b^3 + 15a^{-5}b^4 - 21a^{-6}b^5$   
 $+ 28a^{-7}b^6 \&c.$

Pour la quatrième puissance.

ON réduira de même  $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{bb}{a^3} - \frac{10b^3}{a^4} + \frac{15b^4}{a^5} - \frac{21b^5}{a^6} + \frac{28b^6}{a^7} - \frac{35b^7}{a^8} + \frac{35b^8}{a^9} - \frac{28b^9}{a^{10}} + \frac{21b^{10}}{a^{11}} - \frac{15b^{11}}{a^{12}} + \frac{10b^{12}}{a^{13}} - \frac{6b^{13}}{a^{14}} + \frac{3b^{14}}{a^{15}} - \frac{b^{15}}{a^{16}} \&c.$

1°. en la suite  $\frac{1}{a^3 + 3a^2b + 3aab + ab^3} = \frac{1}{a^3} - \frac{3b}{a^4} + \frac{3bb}{a^5} - \frac{10b^3}{a^6} + \frac{15b^4}{a^7} - \frac{21b^5}{a^8} + \frac{28b^6}{a^9} - \frac{35b^7}{a^{10}} + \frac{35b^8}{a^{11}} - \frac{28b^9}{a^{12}} + \frac{21b^{10}}{a^{13}} - \frac{15b^{11}}{a^{14}} + \frac{10b^{12}}{a^{15}} - \frac{6b^{13}}{a^{16}} + \frac{3b^{14}}{a^{17}} - \frac{b^{15}}{a^{18}} \&c.$

2°. On réduira ensuite.

$$\begin{array}{lcl} \frac{1}{a^3 + 3a^2b + 3aab + ab^3} \text{ en } & \frac{1}{a^3} - \frac{3b}{a^4} + \frac{3bb}{a^5} - \frac{10b^3}{a^6} + \frac{15b^4}{a^7} - \frac{21b^5}{a^8} & \&c. \\ - \frac{b}{a^3 + 3a^2b + 3aab + ab^3} \text{ en } & - \frac{b}{a^3} + \frac{3bb}{a^4} - \frac{3b^3}{a^5} + \frac{4b^4}{a^6} - \frac{7b^5}{a^7} + \frac{6b^6}{a^8} & \&c. \\ + \frac{bb}{a^3 + 3a^2b + 3aab + ab^3} \text{ en } & + \frac{bb}{a^3} - \frac{3b^3}{a^4} + \frac{3b^4}{a^5} - \frac{4b^5}{a^6} + \frac{7b^6}{a^7} - \frac{6b^7}{a^8} & \&c. \\ - \frac{b^3}{a^3 + 3a^2b + 3aab + ab^3} \text{ en } & - \frac{b^3}{a^3} + \frac{3b^4}{a^4} - \frac{3b^5}{a^5} + \frac{4b^6}{a^6} - \frac{7b^7}{a^7} + \frac{6b^8}{a^8} & \&c. \\ + \frac{b^4}{a^3 + 3a^2b + 3aab + ab^3} \text{ en } & + \frac{b^4}{a^3} - \frac{3b^5}{a^4} + \frac{3b^6}{a^5} - \frac{4b^7}{a^6} + \frac{7b^8}{a^7} - \frac{6b^9}{a^8} & \&c. \\ - \frac{b^5}{a^3 + 3a^2b + 3aab + ab^3} \text{ en } & - \frac{b^5}{a^3} + \frac{3b^6}{a^4} - \frac{3b^7}{a^5} + \frac{4b^8}{a^6} - \frac{7b^9}{a^7} + \frac{6b^{10}}{a^8} & \&c. \end{array}$$

On peut continuer cette suite à l'infini.

En prenant les sommes de chaque rang perpendiculaire,

$$\text{on aura } \frac{1}{a+b} = \frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \frac{b^5}{a^6} \&c. = 1a^{-1} - 1a^{-2}b + 10a^{-3}b^2 - 10a^{-4}b^3 + 35a^{-5}b^4 - 56a^{-6}b^5 \&c.$$

$$\text{On trouvera de même que } \frac{1}{a+b^2} = \frac{1}{a+b^2} = \frac{1}{a} - \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^4}{a^4} - \frac{b^6}{a^6} + \frac{b^8}{a^8} - \frac{b^{10}}{a^{10}} \&c. \text{ ou, ce qui est la même chose, } 1a^{-1} - 5a^{-3}b^2 + 15a^{-5}b^4 - 35a^{-7}b^6 + 70a^{-9}b^8 - 126a^{-11}b^{10} \&c.$$

$$\frac{1}{a+b^3} = \frac{1}{a+b^3} = \frac{1}{a} - \frac{b^3}{a^2} + \frac{3b^6}{a^5} - \frac{5b^9}{a^8} + \frac{12b^{12}}{a^{11}} - \frac{25b^{15}}{a^{14}} \&c. \text{ ou, ce qui est la même chose, } 1a^{-1} - 6a^{-4}b^3 + 21a^{-7}b^6 - 56a^{-10}b^9 + 126a^{-13}b^{12} - 252a^{-16}b^{15} \&c.$$

On peut continuer ces opérations sur la septième puissance, la huitième, &c.

### REMARQUES.

#### I.

209. APRES s'être rendu ces opérations très-familieres, on verra clairement que le premier terme de la suite contient, dans la seconde puissance, seulement  $a^{-2}$ ; dans la troisième  $a^{-3}$ ; dans la quatrième,  $a^{-4}$ , &c. & que dans les termes suivans la puissance de  $a$ , dont l'exposant est toujours négatif, augmente par ordre d'un degré dans chaque terme suivant; que  $b$  est linéaire dans le second terme de la suite, & que les puissances de  $b$ , dont l'exposant est toujours positif, augmentent par ordre d'un degré dans chaque terme suivant.

Ainsi les puissances de  $a+b^{-n}$  peuvent être marquées en general par  $a^{-n}$ ,  $a^{-n-1}b$ ,  $a^{-n-2}b^2$ , &c.

#### II.

210. Que les coefficients de chaque terme sont par ordre les termes du second rang parallele\* de la premiere disposition des suites 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c. dans la seconde puissance; ceux du troisième rang parallele; 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, dans la troisième; ceux du quatrième rang parallele, 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, &c. dans la quatrième; ceux du cinquième rang



seconde puissance, marque qu'il faut prendre pour les coefficients de la seconde puissance, les termes du second rang parallele; l'exposant 3 de la troisième, marque qu'il faut prendre de suite pour les coefficients de la troisième puissance, les termes du troisième rang parallele; & ainsi de suite.

Ainsi supposant que  $n$  represente en general le degré de chaque puissance, l'on a démontré dans la premiere disposition des suites, \* que  $1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} \times \frac{n+3}{4} \times \dots$  est une \* 195: formule qui fait trouver par ordre les termes de chaque rang parallele; sçavoir, 1 est le premier terme de chaque rang parallele,  $1 \times \frac{n}{1}$  est le second terme,  $1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}$  est le troisième terme, & ainsi de suite; l'on peut négliger dans chaque terme l'unité, qui n'apporte aucun changement dans les produits.

Par consequent la suite  $1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} \times \frac{n+3}{4} \times \dots$  fera trouver les coefficients des termes des suites égales à  $\overline{a+b}^{-2}$ ,  $\overline{a+b}^{-3}$ ,  $\overline{a+b}^{-4}$ , &c. 1 est le coefficient du premier terme;  $\frac{n}{1}$  représente le coefficient du second terme;  $\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}$  représente le coefficient du 3<sup>e</sup> terme;  $\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}$  représente le coefficient du 4<sup>e</sup> terme;  $\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} \times \frac{n+3}{4}$  représente celui du 5<sup>e</sup> terme; & ainsi de suite. Il n'y aura, pour trouver ces coefficients, qu'à mettre 2 à la place de  $n$  pour la seconde puissance, 3 à la place de  $n$  pour la troisième, & ainsi de suite, & rendre négatifs les coefficients des termes pairs, c'est-à-dire du second, du quatrième, du sixième, &c. suivant ce qui est démontré dans les operations précédentes. \*

\* 208.

### I I I.

211. Quand il y a  $\overline{a+b}^{-2}$ ,  $\overline{a+b}^{-3}$ , &c. les coefficients des termes pairs, c'est-à-dire du second, du quatrième, du sixième, &c. sont négatifs, & ils seroient positifs s'il y avoit  $\overline{a-b}^{-2}$ ,  $\overline{a-b}^{-3}$ ,  $\overline{a-b}^{-4}$ , &c.

### I V.

212. La suite de chaque puissance est toujours infinie, quand l'exposant est négatif.

Tome I.

Ggg

## COROLLAIRE,

Où l'on démontre qu'en mettant  $-n$  au lieu de  $+n$  dans la formule générale des puissances de  $a + b^n = 1a^n + \frac{n}{1} a^{n-1}b + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} a^{n-2}bb + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} a^{n-3}b^3$  &c. la même formule devient la formule générale des puissances de  $a + b^{-n}$ , dont l'exposant est négatif.

213. EN mettant dans la formule générale  $1a^n + \frac{n}{1} a^{n-1}b + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} a^{n-2}bb$  &c.  $-n$  à la place de  $+n$ , il est évident, 1<sup>o</sup>. qu'on trouvera les mêmes puissances de  $a$  & de  $b$ , qui

\* 209. conviennent à  $a + b^{-n}$  par la première remarque. \*

20. Que les coefficients seront les mêmes que ceux de  $a + b^{-n}$  de la seconde & troisième remarques, \* car l'unité fera le coefficient du premier terme,  $-\frac{n}{1}$  le coefficient du second terme qui doit être négatif par la troisième remarque.

\* 211. que ; \*  $-\frac{n}{1} \times -\frac{n-1}{2}$ , est le même que le troisième coefficient  $\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}$ , puisque les deux grandeurs négatives  $-\frac{n}{1} \times -\frac{n-1}{2}$ , donnent le même produit positif que les deux positives  $\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}$ . Il est évident que l'on trouvera de même que les coefficients de la formule générale seront, après avoir mis  $-n$  à la place de  $+n$ , les coefficients marqués dans la seconde & la troisième remarque.

Par conséquent l'on a démontré qu'en mettant dans la formule générale  $a + b^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1}b + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} a^{n-2}bb$  &c.  $-n$  à la place de  $+n$ , elle fera la formule générale pour trouver toutes les puissances de  $a + b^{-n}$ , lorsque leur exposant est négatif.

214. Et comme la formule générale pour élever une suite de grandeurs à une puissance quelconque, est une suite nécessaire de la formule générale pour élever deux grandeurs à une puissance quelconque ; \* il est évident qu'en mettant aussi  $-n$  à la place de  $+n$  dans la formule générale des puissances d'une suite, l'on aura la formule générale des puissances de la même suite, lorsque les exposants de ces puissances sont des nombres entiers négatifs.

Si l'on veut démontrer ce second cas par les opérations

de la proposition \* qui précède ce Corollaire, il n'y a qu'à \* 108.  
continuer les divisions dans la seconde puissance par le divi-  
seur entier  $aa + 2ab + bb + 2ac + 2bc + cc + 2ad + 2bd$   
 $+ 2cd + dd$ , &c. après avoir déjà trouvé les quotiens qui  
conviennent à la première partie du diviseur  $aa + 2ab + bb$ ,  
& continuer de semblables divisions dans la troisième puis-  
sance, la quatrième, &c.

## A V E R T I S S E M E N T.

**A**FIN que les formules pour élever deux grandeurs ou  
une suite de grandeurs à une puissance quelconque, soient  
generales en toutes manieres, il reste à démontrer qu'elles  
conviennent aussi à toutes les puissances de deux grandeurs  
ou d'une suite de grandeurs, dont les exposans sont des fra-  
ctions ou des nombres rompus positifs ou négatifs; ou, ce  
qui est la même chose, qu'elles servent aussi à trouver les  
racines quelconques de deux grandeurs, & d'une suite infi-  
nie de grandeurs. On démontrera ces derniers cas par la pre-  
miere méthode du second Problème, & on les prendra pour  
des exemples de ce Problème.

## S E C T I O N I V.

*Où l'on continue les exemples de la première méthode du  
second Problème : On enseigne à appliquer la même  
méthode aux équations qui contiennent des différen-  
ces ; & l'on explique le retour des suites.*

## E X E M P L E V. DU SECOND PROBLÈME.

215. **T**ROUVER la suite infinie qui exprime la racine  $n$  de  $a+b$ ,  
c'est à-dire, trouver la suite infinie qui est égale à  $\sqrt[n]{a+b}$   
 $= a + b^{\frac{1}{n}}$ .

**I**L faut supposer  $x = \sqrt[n]{a+b} = a + b^{\frac{1}{n}}$ .

En élevant chaque membre de cette équation à la puis-  
sance  $n$ , on aura  $x^n = a+b$ ; & transposant,  $x^n - a - b = 0$ .

La question se réduit à trouver la suite infinie qui est la va-  
leur de  $x$  dans cette équation  $x^n - a - b = 0$ . Pour la trouver,

Ggg ij

1°. Il faut supposer  $x = c + db + ebb + fb^2 + gb^3 + hb^4$  &c. les grandeurs  $c, d, e, f, g, \&c.$  sont indéterminées.

2°. Il faut élever chaque membre à la puissance  $n$  par la formule générale, \* & substituer la valeur de  $x^n$  à la place de  $x^n$  dans l'équation  $x^n - a - b = 0$ , & l'on aura l'équation changée suivante.

$$0 = \begin{cases} x^n = c^n + \frac{n}{1} c^{n-1} db + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} c^{n-2} ddbb + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} c^{n-3} d^3 b^3 + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} c^{n-4} d^4 b^4 \\ \quad + \frac{n}{1} c^{n-1} ebb + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} c^{n-2} deb^2 + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} c^{n-3} ddeb^2 \\ \quad + \frac{n}{1} c^{n-1} fb^3 + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} c^{n-2} eeb^2 \\ \quad + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} c^{n-2} dfb^2 \\ \quad + \frac{n}{1} c^{n-1} gb^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a = -a \\ -1b = -1b \end{cases}$$

3°. Il faut supposer chaque terme de cette équation changée égale à zero, ce qui donnera les équations particulières dont on a besoin pour déterminer les grandeurs indéterminées  $c, d, e, f, g, \&c.$

Par la première  $c^n - a = 0$ , on trouvera  $c = a^{\frac{1}{n}}$ .

En substituant la valeur de  $c$  dans la seconde  $\frac{n}{1} c^{n-1} d = 0$ , on trouvera  $d = \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}}$ .

Substituant les valeurs de  $c$  & de  $d$  dans la 3<sup>e</sup>  $+\frac{n}{1} c^{n-1} e$   $+\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} c^{n-2} dd = 0$ , on trouvera  $e = \frac{1}{n} \times \frac{1-n}{2n} a^{\frac{1-2n}{n}}$ .

Substituant les valeurs de  $c, d, e$ , dans la 4<sup>e</sup>  $\frac{n}{1} c^{n-1} f + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} c^{n-2} de + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} c^{n-3} d^2$ , on trouvera  $f = \frac{1}{n} \times \frac{1-n}{2n} \times \frac{1-2n}{3n} a^{\frac{1-3n}{n}}$ .

Substituant les valeurs de  $c, d, e, f$ , dans la 5<sup>e</sup>  $\frac{n}{1} c^{n-1} g + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} c^{n-2} df + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} c^{n-2} ee + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} c^{n-3} dde + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} c^{n-4} d^2 = 0$ , on trouvera  $g = \frac{1}{n} \times \frac{1-n}{2n} \times \frac{1-2n}{3n} \times \frac{1-3n}{4n} a^{\frac{1-4n}{n}}$ .

4°. Il faut substituer ces valeurs de  $c, d, e, f, g$ , dans  $x = c + db + ebb + fb^2 + gb^3$  &c. & l'on aura  $x = a^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} b + \frac{1}{n} \times \frac{1-n}{2n} a^{\frac{1-2n}{n}} bb + \frac{1}{n} \times \frac{1-n}{2n} \times \frac{1-2n}{3n} a^{\frac{1-3n}{n}} b^3 + \frac{1}{n} \times \frac{1-n}{2n} \times \frac{1-2n}{3n} \times \frac{1-3n}{4n} a^{\frac{1-4n}{n}} b^4$  &c.

C'est la valeur de  $x$  que l'on cherchoit, c'est-à-dire, c'est la suite infinie égale à  $\frac{1}{a+b^n}$ . Ce qui étoit proposé.

R E M A R Q U E S.

I.

216. SI l'on substitue  $\frac{1}{n}$  à la place de  $n$  dans la formule generale  $\frac{1}{a+b^n} = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} a^{n-2} b b + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} a^{n-3} b^3$  &c. on trouvera exactement la suite qu'on a trouvée dans le cinquième exemple; par conséquent la formule generale convient à toutes puissances de deux grandeurs, qui ont pour exposant une fraction dont le numérateur est l'unité, & le dénominateur tel nombre qu'on voudra.

I I.

217. On trouvera de la même manière la suite infinie qui est la valeur de  $\sqrt[n]{a+b} = \overline{a+b}^{\frac{1}{n}}$ , en supposant  $x = \overline{a+b}^{\frac{1}{n}}$ ,

ce qui donnera  $x^n = \overline{a+b}^{\frac{1}{n}}$ .

On supposera  $x = c + db + ebb + fb^3$  &c. les grandeurs  $c, d, e, f$ , sont indéterminées, & l'on prendra la valeur de  $x^n$  par cette équation.

On réduira aussi  $\overline{a+b}^{\frac{1}{n}}$  en la suite infinie qui lui est égale.

On substituera les valeurs de  $x^n$ ,  $\overline{a+b}^{\frac{1}{n}}$  dans l'équation  $x^n = \overline{a+b}^{\frac{1}{n}}$ , ce qui donnera l'équation changée.

On en supposera chaque terme égal à zero; & par les équations particulières que donnera cette supposition, on déterminera  $c, d, e, f$ , &c.

On substituera les valeurs déterminées de  $c, d, e, f$ , &c. dans l'équation  $x = \overline{a+b}^{\frac{1}{n}} = c + db + ebb + fb^3$  &c. & l'on aura la suite infinie égale à  $\overline{a+b}^{\frac{1}{n}}$ , qu'on trouvera être exactement la formule generale  $\frac{1}{a+b^n} = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b$  &c. après avoir substitué dans la formule generale  $\frac{1}{n}$  à la place de  $n$ .

I I I.

218. On trouvera de la même manière, en cherchant les sui-

tes qui sont les valeurs de  $\frac{1}{\sqrt[n]{a+b}} = \overline{a+b}^{-\frac{1}{n}}$ , & de  $\frac{1}{\sqrt[n]{a+b}} = \overline{a+b}^{-\frac{m}{n}}$ , que ces suites sont exactement la formule generale de  $\overline{a+b}^n$ , en substituant dans cette formule  $-\frac{1}{n}$  à la place de  $n$  dans le premier cas, &  $-\frac{m}{n}$  à la place de  $n$  dans le second cas.

## I V.

219. Il faut aussi remarquer qu'en élevant par le moyen de la formule generale, deux grandeurs représentées en general par  $a+b$ , à une puissance quelconque, dont l'exposant est marqué en general par  $n$ , on peut commencer par la seconde  $b$ , comme s'il y avoit  $\overline{b+a}^n$ , de maniere que  $b$  fût la premiere, &  $a$  la seconde; & il faut choisir celle des deux manieres qui donnera la suite dont les termes seront les plus commodes pour la résolution que l'on cherche.

## V.

220. La même formule generale peut servir à trouver les racines quelconques approchées à l'infini, ou autant près qu'on voudra, des puissances numeriques imparfaites; il n'y aura qu'à partager la puissance numerique imparfaite en deux parties, dont la premiere soit la plus grande puissance numerique parfaite contenue dans la puissance numerique imparfaite proposée, & la seconde partie soit le nombre qui restera, après avoir ôté de la puissance imparfaite proposée la plus grande puissance parfaite qui y est contenue. Il faut ensuite supposer que  $\sqrt[n]{a+b}$ , ou  $\overline{a+b}^{\frac{1}{n}}$  représente la puissance numerique imparfaite proposée, que  $a$  représente la premiere partie, &  $b$  la seconde partie; & que  $\frac{1}{n}$  représente l'exposant de la racine qu'on veut extraire. Il faudra enfin substituer dans la formule generale à la place de  $a$ ,  $b$ ,  $n$ , les grandeurs numeriques qu'elles représentent; & après les substitutions, l'on aura la racine approchée que l'on cherchoit. Ainsi pour trouver la racine troisieme de 12, on supposera  $\overline{a+b}^{\frac{1}{3}} = \overline{8+4}^{\frac{1}{3}}$ , & on substituera les grandeurs numeriques à la place des litterales dans la formule generale.

E X E M P L E V I.

221. TROUVER la suite infinie qui est la valeur de  $a + by + cyy$

$$+ dy^3 + ey^4 + fy^5 \&c. \frac{1}{n}$$

IL faut supposer  $x = a + by + cyy + dy^3 + ey^4 + fy^5 \&c. \frac{1}{n}$

Par conséquent  $x^n = a + by + cyy + dy^3 + ey^4 + fy^5 \&c.$

En transposant  $0 = -x^n + a + by + cyy + dy^3 \&c.$

La question se réduit à trouver la valeur de  $x$  dans cette équation. Pour la trouver,

1°. Il faut supposer  $x = g + by + iyy + ky^3 + ly^4 + py^5 \&c.$  les grandeurs  $g, b, i, k, \&c.$  sont indéterminées.

2°. Il faut prendre la valeur de  $x^n$  par cette équation en se servant de la formule generale, \* & substituer cette valeur. \* 106. de  $x^n$  à la place de  $-x^n$  dans l'équation  $0 = -x^n + a + by + cyy \&c. \& l'on$  aura l'équation changée suivante.

$$0 = \left\{ \begin{array}{l} -x^n = -g^n - \frac{n}{1} g^{n-1} by - \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} g^{n-2} bhyy - \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} g^{n-3} b^2 y^3 - \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} g^{n-4} b^3 y^4 \\ \quad - \frac{n}{1} g^{n-1} iyy - \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} g^{n-2} hiy^2 - \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} g^{n-3} hbiy^3 \\ \quad - \frac{n}{1} g^{n-1} ky^3 - \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} g^{n-2} iiy^4 \\ \quad - \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} g^{n-2} hky^4 \\ \quad - \frac{n}{1} g^{n-1} ly^4 \\ + a + by + cyy \&c. = + a \quad + by \quad + cyy \quad + dy^3 \quad + ey^4 \end{array} \right.$$

3°. Il faut supposer chaque terme de cette équation changée égal à zero, ce qui donnera les équations particulières dont on a besoin pour déterminer les grandeurs  $g, b, i, k, \&c.$

Par la premiere  $g^n = a$ , on trouvera  $g = a^{\frac{1}{n}}$ .

En substituant cette valeur de  $a$  dans la seconde  $\frac{n}{1} g^{n-1} b = b$ , on trouvera  $b = \frac{n}{1} a^{\frac{1-n}{n}} b$ .

En substituant les valeurs de  $g, b$ , dans la 3e  $\frac{n}{1} g^{n-1} i = -\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} g^{n-2} bb + c$ , on trouvera  $i = +\frac{1}{n} \times \frac{1-n}{2} a^{\frac{1-2n}{n}} bb + \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} c$ .

En substituant les valeurs de  $g, b, i$ , dans la 4e  $\frac{n}{1} g^{n-1} k = -\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} g^{n-3} b^3 - \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} g^{n-2} hi + d$ , on trouvera  $k = +\frac{1}{n} \times \frac{1-n}{2} \times \frac{1-2n}{3} a^{\frac{1-3n}{n}} b^3 + \frac{1}{n} \times \frac{1-n}{2} a^{\frac{1-2n}{n}} bc + \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} d$ .

On trouvera de la même manière les valeurs de  $l$ , de  $p$ , &c.

4°. Il faut substituer les valeurs de  $g, h, i, k$ , &c. dans  $x = g$

$$+ hy + iyy + ky^2 \text{ \&c. \& l'on aura } x = a + by + cyy + dy^3 \text{ \&c. }^{\frac{1}{n}}$$

$$= a^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} by + \frac{1}{n} \times \frac{1-n}{n} a^{\frac{1-2n}{n}} bbyy + \frac{1}{n} \times \frac{1-n}{n} \times \frac{1-2n}{n} a^{\frac{1-3n}{n}} b^2y^2$$

$$+ \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} cyy + \frac{1}{n} \times \frac{1-n}{n} a^{\frac{1-2n}{n}} bcy^2$$

$$+ \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} dy^3$$

*Ce qui étoit proposé.*

### EXEMPLE VII.

222. TROUVER la suite infinie qui est la valeur de  $ay + byy + cy^3 + dy^4 + ey^5 \text{ \&c. }^{\frac{1}{n}}$

IL faut supposer  $x = ay + byy + cy^3 + dy^4 + ey^5 \text{ \&c. }^{\frac{1}{n}}$

Par conséquent  $x^n = ay + byy + cy^3 + dy^4 + ey^5 \text{ \&c.}$

Et transposant  $0 = -x^n + ay + byy + cy^3 + dy^4 + ey^5 \text{ \&c.}$

La question se réduit à trouver la valeur de  $x$  dans cette équation. Pour la trouver,

1°. Il faut supposer  $x = gy + hyy + iy^3 + ky^4 + ly^5 \text{ \&c.}$  les grandeurs  $g, h, i$ , &c. sont indéterminées.

2°. Il faut prendre la valeur de  $x^n$  par cette équation en se servant de la formule générale, \* & la substituer à la place de  $-x^n$  dans l'équation  $0 = -x^n + ay + byy \text{ \&c.}$  & l'on aura l'équation changée qui suit.

$$0 = \begin{cases} -x^n = -g^n y^n - \frac{n}{1} g^{n-1} y^{n-1} hyy - \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{1} g^{n-2} y^{n-2} hby^3 - \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{1} \times \frac{n-2}{1} g^{n-3} y^{n-3} h^2 y^4 \\ \quad - \frac{n}{1} g^{n-1} y^{n-1} iy^3 - \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{1} g^{n-2} y^{n-2} h^2 iy^5 \text{ \&c.} \\ \quad - \frac{n}{1} g^{n-1} y^{n-1} ky^4 \\ + ay + byy + cy^3 \text{ \&c.} = + ay + byy + cy^3 + dy^4 \text{ \&c.} \end{cases}$$

Pour donner à cette équation changée la forme qui lui convient, afin que les puissances de  $y$ , prises de suite  $y, yy, y^3, y^4$ , &c. en distinguent les termes, il faut faire en sorte que  $y^n$  se trouve dans chaque coefficient, en considérant qu'on prend pour coefficients toutes les grandeurs qui précèdent dans chacun de ces produits les puissances  $y, yy, y^3, y^4, y^5$ , &c. de l'inconnue  $y$ , qui doivent distinguer les termes de



de l'équation ; & il faut qu'en faisant ce changement, chaque produit ait toujours la même valeur, & que cela ne la change point.

En faisant ce changement comme on le voit dans l'équation suivante, on aura exactement la même équation changée, qui ne diffère de la précédente que dans la seule expression, & les termes de l'équation seront distinguez par les puissances  $y, yy, y^3, y^4, y^5, &c.$

$$0 = \left\{ \begin{aligned} & -x^n = -y^{n-1} g^n y - \frac{n}{1} g^{n-1} y^{n-1} h y y - \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{1} g^{n-2} y^{n-1} h b y^3 - \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{1} \times \frac{n-2}{1} g^{n-3} y^{n-1} h^2 y^4 \\ & - \frac{n}{1} g^{n-1} y^{n-1} i y^5 - \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{1} g^{n-2} y^{n-1} h i y^6 \&c. \\ & - \frac{n}{1} g^{n-1} y^{n-1} k y^7 \\ & + ay + byy + cy^3 \&c. = + ay + byy + cy^3 + dy^4 \&c. \end{aligned} \right.$$

3°. Il faut supposer chaque terme de cette équation changée égal à zero, ce qui donnera les équations particulieres dont on a besoin pour déterminer les grandeurs indéterminées  $g, h, i, k, &c.$

Par la premiere de ces équations  $y^{n-1} g^n = a$ , on trouvera  $g = a^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1-n}{n}}$ , &  $gy = a^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{n}}$ .

En substituant la valeur de  $g$  ou de  $gy$  dans la seconde  $\frac{n}{1} g^{n-1} y^{n-1} h = b$ , on trouvera  $h = \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} b y^{\frac{1-n}{n}}$ .

En substituant les valeurs de  $g, h$ , dans la 3<sup>e</sup>  $\frac{n}{1} g^{n-1} y^{n-1} h b y^3 = \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{1} g^{n-2} y^{n-1} h b y^3 + c$ , on trouvera  $i = + \frac{1}{n} \times \frac{1-n}{n} a^{\frac{1-2n}{n}} b b y^{\frac{1-n}{n}} + \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} c y^{\frac{1-n}{n}}$ .

En substituant les valeurs de  $g, h, i$ , dans la 4<sup>e</sup>  $\frac{n}{1} g^{n-1} y^{n-1} k = - \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{1} \times \frac{n-2}{1} g^{n-3} y^{n-1} h^2 - \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{1} g^{n-2} y^{n-1} h i + d$ , on trouvera  $k = + \frac{1}{n} \times \frac{1-n}{n} \times \frac{1-2n}{n} a^{\frac{1-3n}{n}} b^2 y^{\frac{1-n}{n}} + \frac{1}{n} \times \frac{1-n}{n} a^{\frac{1-2n}{n}} b c y^{\frac{1-n}{n}} + \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} d y^{\frac{1-n}{n}}$ .

4°. Il faut substituer ces valeurs de  $g, h, i, k$ , dans  $x = gy + byy + byy + cy^3 + dy^4 \&c.$  & l'on aura  $x = ay + byy + cy^3 + dy^4 \&c.$

$$= a^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} b y^{\frac{1+n}{n}} + \frac{1}{n} \times \frac{1-n}{n} a^{\frac{1-2n}{n}} b b y^{\frac{1+2n}{n}} + \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} c y^{\frac{1+3n}{n}}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n} \times \frac{1-n}{2n} \times \frac{1-3n}{4n} a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{1}{2}} y^{\frac{n}{2}} + \frac{1}{n} \times \frac{1-n}{2n} \times \frac{1-3n}{4n} \times \frac{1-5n}{6n} a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{1}{2}} y^{\frac{n}{2}} \\
& + \frac{1}{n} \times \frac{1-n}{2n} a^{\frac{1-3n}{n}} b c y^{\frac{1+3n}{n}} + \frac{1}{n} \times \frac{1-n}{2n} \times \frac{1-3n}{4n} a^{\frac{1-3n}{n}} b b c y^{\frac{1+4n}{n}} \\
& + \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} d y^{\frac{1+2n}{n}} + \frac{1}{n} \times \frac{1-n}{2n} a^{\frac{1-3n}{n}} c c y^{\frac{1+4n}{n}} \\
& + \frac{1}{n} \times \frac{1-n}{2n} a^{\frac{1-3n}{n}} b d y^{\frac{1+4n}{n}} + \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} e y^{\frac{1+4n}{n}}
\end{aligned}$$

C'est la suite qui est la valeur de  $ay + byy + cy^3 + dy^4$  &c.  
Ce qui étoit proposé.

## R E M A R Q U E S.

### I.

213. IL faut faire sur le sixième & le septième exemple les mêmes remarques que l'on a faites sur le cinquième exemple, & l'on verra clairement que la première méthode du second Problème étant démontrée, les formules générales pour élever deux grandeurs & une suite infinie de grandeurs à une puissance quelconque, sont aussi démontrées pour tous les cas; c'est-à-dire, on verra clairement qu'on a démontré qu'elles servent à élever deux grandeurs & une suite infinie de grandeurs à une puissance quelconque, quelque nombre qu'en puisse être l'exposant, soit entier, soit rompu, soit positif, soit négatif; & qu'il est aussi facile d'élever par cette formule deux grandeurs ou une suite infinie de grandeurs à une puissance fort élevée, qu'il est aisé par la méthode ordinaire de les élever au quarré ou à la troisième puissance; & qu'il est aussi facile d'en extraire la racine quelconque, que d'en extraire la racine quarrée; puisqu'il n'y a qu'à substituer dans ces formules générales le nombre entier ou rompu, positif ou négatif, qui est l'exposant de la puissance qu'on veut trouver, à la place de  $n$  qui le représente, & les grandeurs dont on cherche la puissance ou la racine, à la place des grandeurs  $a, b, c$ , &c. des formules générales.

On verra aussi que quand l'exposant de la puissance à laquelle on veut élever plusieurs grandeurs, est un nombre entier positif, l'on trouve une suite finie; mais qu'elle est infinie dans les trois autres cas, c'est-à-dire, quand l'exposant de

la puissance est un nombre entier négatif, & quand il est un nombre rompu positif ou négatif.

II.

On verra l'usage de ces formules generales qui servent à élever deux ou plusieurs grandeurs, ou une suite de grandeurs à une puissance quelconque, dans les exemples suivans, & l'on doit avertir ici qu'elles sont d'une extrême utilité pour trouver des formules generales qui servent à découvrir la résolution des Problèmes les plus composés.

EXEMPLE VIII.

224. POUR trouver la valeur de  $x$  dans l'équation  $x' - \frac{5y^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{y^{\frac{1}{2}}}{n}x^{\frac{3}{2}} - 7nnyyxx + ppy^{\frac{1}{2}} = 0$ .

1°. Il faut supposer  $x = ay^{\frac{1}{2}} + by^{\frac{1}{2}} + cy^{\frac{1}{2}} + dy^{\frac{1}{2}} + \dots$  &c.  $a, b, c$ , &c. sont des grandeurs indéterminées.

2°. Il faut substituer dans la proposée les valeurs de  $x$ , prises de cette équation indéterminée, & l'on aura l'équation changée qui suit.

$$\begin{aligned} x' &= +a'y' & +6a'by' & +15a'bb'y' & \&c. \\ -\frac{5y^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}}x^{\frac{1}{2}} &= & -\frac{5a'}{n^{\frac{1}{2}}}y' & -\frac{25a'}{n^{\frac{1}{2}}}by' & \&c. \\ +\frac{y^{\frac{1}{2}}}{n}x^{\frac{3}{2}} &= & & +\frac{a'}{n}y' & \&c. \\ -7nnyyxx &= & -7nnaay' & -14nnaby' & -7nnbb'y' & \&c. \\ +ppy' &= & & +ppy' & \\ +6n'y' &= & +6n'y' & & \end{aligned}$$

3°. Il faut supposer chaque terme de cette équation changée égal à zero, ce qui donnera les équations dont on a besoin pour trouver les valeurs des indéterminées  $a, b, c$ , &c.

Par la premiere  $a' - 7nnaa + 6n' = 0$ , on trouvera que la plus petite valeur positive de  $a$  est  $n^{\frac{1}{2}}$ , car  $aa - n = 0$ , est un diviseur exact de  $a' - 7nnaa + 6n' = 0$ .

En substituant la valeur de  $a$  dans la 2°  $14nnab - 6a'b = -\frac{5a'}{n^{\frac{1}{2}}} + pp$ , on trouvera  $b = -\frac{5}{8n^{\frac{1}{2}}} + \frac{pp}{8n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}}$ .

Hhh ij

En substituant les valeurs de  $a, b$ , dans la 3<sup>e</sup> L<sup>ie</sup>  $annac. - 62^{\frac{1}{2}}x$   
 $= + \frac{a^2}{n} - \frac{25a^2}{n^2}b + 15a^2bb - 7nbb$ , on trouvera  $c = \frac{158}{64n^{\frac{1}{2}}}$   
 $- \frac{35}{64n^{\frac{1}{2}}}pp + \frac{p^2}{64n^{\frac{1}{2}}}$

4<sup>o</sup>. On substituera ces valeurs de  $a, b, c$ , dans  $x = ay^{\frac{1}{2}} + by^1 + \frac{1}{2} + cy^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}$  &c. & l'on aura  $x = n^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{8n^{\frac{1}{2}}}y^{\frac{1}{2}} + \frac{pp}{8n^{\frac{1}{2}}}y^{\frac{1}{2}} + \frac{158}{64n^{\frac{1}{2}}}y^{\frac{1}{2}} - \frac{35pp}{64n^{\frac{1}{2}}}y^{\frac{1}{2}} + \frac{p^2}{64n^{\frac{1}{2}}}y^{\frac{1}{2}}$  &c.

On peut continuer l'approximation autant qu'on voudra.

*Application de la premiere methode du second Problème à la résolution des équations qui contiennent des differences.*

#### AVERTISSEMENT.

225. LE second Problème sert aussi à la résolution des équations qui contiennent des differences, & l'on peut, par la premiere methode de ce Problème qu'on a expliquée, & par la seconde qu'on expliquera dans la suite, trouver la valeur approchée à l'infini de laquelle on voudra des inconnues de l'équation, exprimée par une suite qui n'aura que les puissances de l'autre inconnue, ou des autres inconnues, s'il y en a plusieurs, avec des grandeurs toutes connues. Et comme cela donne la résolution de plusieurs beaux Problèmes de Geometrie, on va faire l'application de la premiere methode à plusieurs équations qui contiennent des differences. On suppose seulement qu'on sçait le calcul des grandeurs differentielles, qui est expliqué dans la premiere Section de l'Analyse des Infinimens Petits; & si on veut l'appliquer aux équations qui contiennent des secondes differences ou des troisièmes differences, &c. il faut sçavoir le calcul de ces differences secondes, troisièmes, &c. qui est expliqué dans l'Article 65 du même ouvrage.

*Préparation des équations qui ont des differences, afin d'y appliquer la methode du second Problème.*

226. SUPPOSANT que les équations differentielles auxquelles on veut appliquer la methode du second Problème, ont les

que les puissances de  $y$  avec les grandeurs connues des équations; il faut toujours, avant d'appliquer la méthode, faire en sorte par la multiplication, la division, &c. que la différence  $dy$  de la seconde inconnue, soit dans le dénominateur, & ne soit point dans le numérateur. Par exemple, si l'on propose de trouver la valeur de  $x$  dans l'équation  $dx + ydx - 1dy = 0$ , il faut diviser tous les termes par  $dy$ , & l'on aura l'équation préparée  $\frac{dx}{dy} + \frac{ydx}{dy} - 1 = 0$ . De même si l'on propose de résoudre l'équation  $dx^2 = \frac{22dx^2}{1-y} + dy$ , il faut multiplier tous les termes par  $1 - xy$ , & ensuite les diviser par  $dy$ , & l'on aura l'équation préparée  $1 - \frac{dx^2}{dy} + \frac{22dx^2}{dy} = 0$ .

Si l'on propose l'équation  $dx \times \frac{qr + r - q \times \sqrt{rr - xx}}{1 \times \sqrt{rr - xx}} = \frac{1}{2} dy$ , il faut multiplier chaque membre par  $1 \times \sqrt{rr - xx}$ , & ensuite les diviser par  $dy$ , & l'on aura l'équation préparée

$$\frac{dx}{dy} \times qr + r - q \times \sqrt{rr - xx} = \frac{1}{2} \sqrt{rr - xx} = 0.$$

Il en est de même des autres équations différentielles.

### EXEMPLE IX.

217. **P**OUR trouver la valeur de  $x$  dans l'équation différentielle  $\frac{dx}{dy} + \frac{2dx}{dy} - 1 = 0$ ,

1°. Il faut supposer  $x = ay + byy + cy^3 + cy^4 + fy^5$  &c. d'où l'on déduira en prenant les différences de chaque membre,  $\frac{dx}{dy} = + a + 2by + 3cy^2 + 4cy^3 + 5fy^4$  &c.

2°. Il faut substituer la valeur de  $\frac{dx}{dy}$  dans la proposée, & elle sera changée en l'équation qu'on voit ici.

$$0 = \begin{cases} + \frac{dx}{dy} = + a + 2by + 3cy^2 + 4cy^3 + 5fy^4 & \&c. \\ + \frac{2dx}{dy} = + ay + 2byy + 3cy^3 + 4cy^4 & \&c. \\ - 1 = - 1 \end{cases}$$

3°. Il faut supposer chaque terme de cette équation changée égal à zero, ce qui donnera autant d'équations particulières qu'on a supposé de coefficients indéterminez, lesquelles serviront à en trouver les valeurs.

Par la première  $+ a - 1 = 0$ , on trouvera  $a = 1$ .  
Par la seconde  $+ 2by + ay = 0$ , on trouvera  $b = -\frac{1}{2}$ .

Hhh ij.

# 490. ANALYSE DÉMONTRÉE.

Par la troisième  $+ 3cy + 2by = 0$ , on trouvera  $b = + \frac{1}{2}$ .

Par la quatrième  $+ 4cy + 3cy = 0$ , on trouvera  $c = - \frac{1}{4}$ .

Par la cinquième  $+ 5fy + 4cy = 0$ , on trouvera  $f = + \frac{1}{5}$ .

4°. En substituant ces valeurs de  $a, b, c, e, f$ , à leur place dans  $x = ay + byy + cy + cy + fy$ , on aura  $x = 1y - \frac{1}{2}yy + \frac{1}{4}y - \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}y$  &c.

C'est la valeur approchée de  $x$  que l'on cherchoit.

## E X E M P L E X.

228. P O U R trouver la valeur de  $x$ , dans l'équation  $xx - rr + \frac{r^2x^2}{25} = 0$ .

1°. Il faut supposer  $x = ay + by + cy + cy + fy$  &c. les coefficients  $a, b, c$ , &c. sont indéterminez. On ne peut pas supposer  $x = ay + byy + cy + cy + fy$  &c. parceque dans cette supposition, on ne pourroit pas trouver toutes les équations particulières, propres à déterminer les valeurs de tous les coefficients indéterminez.

En prenant la différence de chaque terme de  $x = ay + by + cy$  &c. on aura  $\frac{dx}{dy} = a + 3byy + 5cy + 7cy + 9fy$  &c. quarrant chaque membre de cette équation, on aura

$$\frac{dx^2}{dy^2} = aa + 6abyy + 9bby^2 + 14acy + 25ccy^2 \text{ \&c.}$$

$$+ 10acy + 30bcy + 18afy^2$$

$$+ 42bey^2$$

quarrant aussi chaque terme de l'équation supposée  $x = ay + by + cy$  &c. on aura

$$xx = + aayy + 2aby + bby^2 + 2acy \text{ \&c.}$$

$$+ 2acy + 2bcy$$

2°. Il faut substituer ces valeurs de  $\frac{dx^2}{dy^2}$ , & de  $xx$  à leur place dans la proposée, & elle sera changée par cette substitution en l'équation infinie qu'on voit ici.

$$0 = \left\{ \begin{array}{l} + xx = + aayy + 2aby + bby^2 + 2acy \text{ \&c.} \\ - rr = - rr \\ + \frac{r^2x^2}{25} = + aarr + 6abrryy + 9bbrry^2 + 14aerry + 25ccrry^2 \text{ \&c.} \\ \quad + 10acrry + 30bcrry + 18afrry^2 \\ \quad + 42berryy \end{array} \right.$$

3°. Il faut supposer chaque terme de cette équation changée égal à zero, ce qui donnera autant d'équations particulières pour déterminer les coefficients indéterminez, qu'on a supposé de ces coefficients indéterminez,

$x = +1$ . Par la seconde on trouve  $y = -\frac{1}{67}$  : par la troisième,  $c = +\frac{1}{107}$  : par la quatrième,  $a = -\frac{1}{1049}$  : par la cinquième  $f = \frac{1}{168807}$ .

4°. Il faut substituer ces valeurs de  $a, b, c$ , &c. dans l'équation supposée  $x = ay + by^2 + cy^3$  &c. & l'on aura  $x = y - \frac{y^2}{67} + \frac{y^3}{107} - \frac{y^4}{1049} + \frac{y^5}{168807}$ . C'est la valeur approchée de  $x$  que l'on cherchoit.

### EXEMPLE XI.

229. **P**OUR trouver la valeur approchée de  $x$  dans l'équation :

$$1 - \frac{4x^2}{25} + \frac{22x^4}{25^2} = 0,$$

1°. On supposera  $x = ay + by^2 + cy^3 + cy^4 + fy^5$  &c. d'où l'on déduira  $\frac{4x^2}{25} = +a + 3byy + 5cy^2 + 7ey^3 + 9fy^4$  &c. en quarrant chaque membre on aura

$$\frac{4x^2}{25} = +aa + 6abyy + 9bby^2 + 14aey^3 + 25acy^4 + 10acy^4 + 30bcy^5 + 18afy^5 + 42bey^5$$

2°. On substituera cette valeur de  $\frac{4x^2}{25}$  dans la proposée, & l'on aura

$$0 = \begin{cases} +1 = +1 \\ -\frac{4x^2}{25} = -aa - 6abyy - 9bby^2 - 14aey^3 - 25acy^4 - 10acy^4 - 30bcy^5 - 18afy^5 - 42bey^5 \\ +\frac{22x^4}{25^2} = +aayy + 6aby^2 + 9bby^3 + 14aey^4 + 10acy^4 + 30bcy^5 \end{cases}$$

3°. On supposera chaque terme de cette équation changée égal à zero.

Par ces équations particulières on trouvera  $a = +1$ ,

$$b = +\frac{1}{2}, c = +\frac{1}{40}, e = +\frac{1}{120}, f = +\frac{1}{120}.$$

4°. On substituera ces valeurs de  $a, b, c$ , &c. à leur place dans  $x = ay + by^2$  &c. & l'on trouvera  $x = y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{40}y^3 + \frac{1}{120}y^4 + \frac{1}{120}y^5$  &c. C'est la valeur approchée de  $x$  que l'on cherchoit.

### EXEMPLE XII.

230. **S**OIT proposé de trouver la valeur de  $\frac{x}{y} = x$  par le moyen de l'équation  $+pyy - rrx - \frac{m^2x}{a^2} + pxx = 0$ .

# ANALYSE DEMONSTRÉE.

1°. Il faut supposer  $x = ayy + by' + cy' \&c.$  d'où l'on déduira  $\frac{dx}{dy} = + 2ay + 4by' + 6cy' \&c.$  &  $xx = + 4ay' + 2aby' + 4by'^2 \&c.$

2°. On substituera ces valeurs de  $x$ ,  $\frac{dx}{dy}$ ,  $xx$  à leur place dans la proposée, & l'on aura.

$$0 = \begin{cases} + pyy = + pyy \\ - rrx = - aryy - brry' - crry' \&c. \\ - \frac{r^2 dx}{dy} = - 2aryy - 4brry' - 6crry' \&c. \\ + pxx = + aapy' + 2abpy' \&c. \end{cases}$$

3°. Il faut supposer chaque terme de l'équation changée égal à zero.

On trouvera par ces équations particulières  $a = + \frac{p}{r}$ ,  $b = + \frac{p}{r \times 9r}$ ,  $c = + \frac{p}{3 \times 1 \times 7 \times 9r}$ .

4°. Il faut substituer ces valeurs de  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , &c. dans l'équation supposée  $x = ayy + by' + cy' \&c.$  & l'on trouvera  $x = + \frac{p}{r} yy + \frac{p}{r \times 9r} y' + \frac{p}{3 \times 1 \times 7 \times 9r} y' \&c.$  d'où l'on déduira  $\frac{dx}{dy} = x = \frac{p}{r} y + \frac{p}{3r} yy - \frac{p}{r \times 9r} y' - \frac{p}{3 \times 1 \times 7 \times 9r} y' \&c.$  *Ce qui étoit proposé.*

Si l'on veut supposer, pour abréger,  $\frac{p}{r} = n$ , on trouvera  $\frac{dx}{dy} = x = n - \frac{p}{3r} - \frac{p^2}{r \times 9r} - \frac{p^3}{3 \times 1 \times 7 \times 9r} \&c.$

## EXEMPLE XIII.

231. **P**OUR trouver la valeur approchée de  $x$  dans l'équation

$$\frac{dx}{dy} \times qr + r - q \times \sqrt{rr - xx} - \sqrt{rr - xx} = 0,$$

1°. Il faut supposer  $x = ay + by' + cy' + ey' \&c.$  d'où l'on déduira  $\frac{dx}{dy} = + a + 3by' + 5cy' + 7ey' \&c.$

$$+ xx = + aay + 2aby' + 4by'^2 \&c. \quad + x' = + a'y' + 4a'by' \&c. \quad + x'' = + a''y' \&c.$$

Il faut aussi réduire  $\sqrt{rr - xx} = rr - xx^{\frac{1}{2}}$  en la suite qui exprime cette grandeur, par le moyen de la formule générale, \* où il ne faut que substituer  $\frac{1}{2}$  à la place de  $n$ ,  $rx$  à la place de  $a$ , &  $-xx$  à la place de  $b$ ; & l'on aura  $\sqrt{rr - xx}$

$$= rr - xx^{\frac{1}{2}} = r - \frac{xx}{2r} - \frac{x^2}{2 \times 4r} - \frac{x^3}{2 \times 4 \times 6r} \&c.$$

Il faut concevoir cette valeur de  $\sqrt{rr - xx}$  à la place de



$xx, x', x'', \&c.$  à leur place dans la proposée, & l'on aura

$$+\frac{4x}{25} \times qr = + aqr + 3bqrry + 5cqrry^2 + 7eqrry^3 \&c.$$

$$+\frac{4x}{25} \times \sqrt{rr} - xx = + ar + 3brry + 5crry^2 + 7erry^3$$

$$- \frac{a^2}{25} yy - \frac{2aab}{25} y^2 - \frac{abb^2}{25} y^3 \&c.$$

$$- \frac{3aab}{25} y^2 - \frac{6abb^2}{25} y^3 \&c.$$

$$- \frac{a^3}{2 \times 45} y^3 - \frac{7aac}{25} y^4$$

$$- \frac{4a^2b}{2 \times 45} y^4$$

$$- \frac{3a^2b^2}{2 \times 45} y^4$$

$$- \frac{a^2c}{2 \times 45} y^4$$

$$+\frac{4x}{25} \times -q\sqrt{rr} - xx = - arq - 3bqrry - 5cqrry^2 - 7eqrry^3$$

$$+ \frac{a^2q}{25} yy + \frac{2aabq}{25} y^2 + \frac{abb^2q}{25} y^3$$

$$+ \frac{3aabq}{25} y^2 + \frac{6abb^2q}{25} y^3 \&c.$$

$$+ \frac{a^3q}{2 \times 45} y^3 + \frac{7aacq}{25} y^4$$

$$+ \frac{4a^2bq}{2 \times 45} y^4$$

$$+ \frac{3a^2bq^2}{2 \times 45} y^4$$

$$+ \frac{a^2q}{2 \times 45} y^4$$

$$- \sqrt{rr} - xx = - r + \frac{aa}{25} yy + \frac{2ab}{25} y^2 + \frac{bb^2}{25} y^3$$

$$+ \frac{a^3}{2 \times 45} y^3 + \frac{2ac}{25} y^4 \&c.$$

$$+ \frac{4a^2b}{2 \times 45} y^4$$

$$+ \frac{a^2}{2 \times 45} y^4$$

2°. Il faut supposer chaque terme de cette équation changé égal à zero.

3°. On trouvera par ces équations particulières  $a = + \frac{2}{5}$ ,

$$b = - \frac{q}{6115}, c = + \frac{1099 - 591}{12075}, e = - \frac{2808^2 + 504491 - 225915}{504075^2}, \&c.$$

4°. Il faut substituer ces valeurs de  $a, b, c, \&c.$  dans l'équation supposée  $x = ay + by^2 + cy^3 \&c.$  & l'on trouvera

$$x = \frac{2}{5} - \frac{qy^3}{6115} + \frac{1099 - 591}{12075} y^2 - \frac{2808^2 + 504491 - 225915}{504075^2} y^3 \&c.$$

C'est la valeur de  $x$  que l'on cherchoit.

## EXEMPLE XIV.

232. **P**OUR trouver la valeur de  $x$  dans l'équation  $xx - \frac{xyx}{y} - nx + ny = 0$ , 1°. il faut supposer  $x = a + by + cy^2 + cy^3 + \&c.$  les grandeurs  $a, b, c, e$ , sont indéterminées.

2°. Il faut prendre par cette équation supposée la valeur de  $\frac{dx}{dy}$ , & l'on trouvera  $\frac{dx}{dy} = b + 2cy + 3cyy + \&c.$

Il faut substituer la valeur de  $xx$  & celle de  $\frac{dx}{dy}$ , dans la proposée, & l'on aura l'équation changée suivante,

$$\begin{aligned} xx &= aa + 2aby + bbyy + 2bcy^3 + \&c. \\ &\quad + 2acyy + 2acy^3 \\ - \frac{xyx}{y} &= -by^2 - 2cy^3 - \&c. \\ + ny &= + ny \\ - nx &= - nx \end{aligned}$$

3°. Il faut supposer chaque terme de cette équation égal à zero, & l'on trouvera par les équations particulières que donnera cette supposition,  $a = n$ ;  $b = -\frac{1}{2}$ ;  $c = -\frac{1}{16n}$ ;  $e = -\frac{1}{16nn}$ .

4°. Il faut substituer ces valeurs des indéterminées à leur place dans  $x = a + by + cy^2 + \&c.$  & l'on aura  $x = n - \frac{1}{2}y - \frac{1}{16n}y^2 - \frac{1}{16nn}y^3 + \&c.$  C'est la valeur de  $x$  que l'on cherchoit.

*Seconde maniere de résoudre le même exemple.*

**S**I  $n$  étoit moindre que  $y$ , il faudroit prendre une suite où les puissances de  $y$  se trouvaient dans les dénominateurs des termes, c'est-à-dire, il faudroit que les exposans des puissances de  $y$  fussent négatifs, de la maniere suivante.

1°. Il faut supposer  $x = ay + by^0 + cy^{-1} + cy^{-2} + \&c.$

2°. Il faut prendre la valeur de  $\frac{dx}{dy}$  par le moyen de cette équation, & l'on trouvera  $\frac{dx}{dy} = a - cy^{-2} - 2cy^{-3} + \&c.$

Il faut substituer les valeurs de  $xx$  & de  $\frac{dx}{dy}$  dans la proposée, & l'on aura l'équation changée suivante,

$$\begin{aligned} xx &= aayy + 2aby + bb + 2bcy^{-1} + \&c. \\ &\quad + 2ac + 2acy^{-1} \\ - \frac{xyx}{y} &= -ayy + c - 2cy^{-1} \\ + ny &= + ny \\ - nx &= - nx \end{aligned}$$

3°. Il faut supposer chaque terme de cette équation égal

4°. Il faut substituer ces valeurs dans  $x = ay + by^2 + cy^3 + \&c.$  & l'on trouvera  $x = y - \frac{1}{2}n + \frac{1}{4}nny^{-1} + \frac{1}{16}n^2y^{-3} \&c.$  C'est la valeur de  $x$  que l'on cherchoit.

# EXEMPLE XV. OÙ IL Y A TROIS INCONNUES.

## AVERTISSEMENT.

233. **I**L y a des Problèmes de Géométrie où l'on est obligé d'employer trois inconnues  $x, y, z$ , avec leurs différences, dans l'équation qui en exprime toutes les conditions : Et il faut remarquer que cette équation qui exprime toutes les conditions du Problème, a été formée par les équations particulières qui ont été réduites à cette seule équation qui les contient toutes ; & que par conséquent s'il y a trois inconnues, ou un plus grand nombre, il doit y avoir des équations particulières qui expriment à part le rapport des unes aux autres : ces équations particulières doivent être données ou connues dans les exemples où il s'agit de trouver la valeur de l'une des trois inconnues par une suite qui ne contienne que les deux autres avec les grandeurs connues de l'équation.

Pour trouver, par exemple, la valeur de  $x$  dans l'équation  $x dx - x dy - n dy = 0$ , ou divisant par  $dy$ , dans l'équation  $\frac{x dx}{dy} - x - n = 0$ , où l'on suppose que dans le Problème qui a donné cette équation, l'on a l'équation particulière  $x dz - z dy - y dy = 0$ , ou  $dx = 1 dy + \frac{y^2}{z^2}$ , ou  $\frac{dz}{z} = 1 + \frac{y}{z}$ , qui exprime le rapport de  $z$  à  $y$  : pour trouver, dis-je, la valeur de  $x$  dans  $\frac{x dx}{dy} - x - n = 0$ , 1°. il faut supposer  $x = ax^{-1}y + bx^{-2}y^2 + cx^{-3}y^3 + ex^{-4}y^4 + \&c.$   $a, b, c, e$ , sont des grandeurs indéterminées.

2°. Il faut prendre la valeur de  $dx$  dans cette équation supposée ; & l'on trouvera d'abord  $dx = ax^{-1}dy - ax^{-2}y dz + 2bx^{-2}y dy - 2bx^{-3}y^2 dz + 3cx^{-3}y^2 dy - 3cx^{-4}y^3 dz + 4ex^{-4}y^4 dy - \&c.$  Il faut substituer au lieu de  $dz$  sa valeur  $1 dy + \frac{y}{z}$ , & diviser le tout par  $dy$ , & l'on aura.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dy} &= ax^{-1} + 2bx^{-2}y + 3cx^{-3}y^2 + 4ex^{-4}y^3 \&c. \\ &- ax^{-2}y - ax^{-3}y^2 - 2bx^{-3}y^2 \\ &- 2bx^{-4}y^3 - 3cx^{-4}y^4 \end{aligned}$$

lii ij:

Il faut substituer les valeurs de  $\frac{dx}{dy}$  & de  $x$  dans la proposée, & l'on aura l'équation changée.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dy} &= a + 2bx^{-1}y + 3cx^{-2}y^2 + 4ex^{-3}y^3 \&c. \\ &\quad - ax^{-1}y - ax^{-2}y^2 - 2bx^{-3}y^3 \\ &\quad \quad - 2bx^{-2}y^2 - 3cx^{-3}y^3 \\ -x &= -ax^{-1}y - bx^{-2}y^2 - cx^{-3}y^3 \\ -n &= -n\end{aligned}$$

3°. Il faut supposer chaque terme de cette équation égal à zero, ce qui fera trouver  $a = n$ ,  $b = n$ ,  $c = \frac{4n}{3}$ ,  $e = \frac{11}{12}n = \frac{11}{6}n$ .

4°. Il faut substituer ces valeurs de  $a, b, c, \&c.$  dans l'équation supposée, & l'on aura  $x = nx^{-1}y + nx^{-2}y^2 + \frac{4}{3}nx^{-3}y^3 + \frac{11}{6}nx^{-4}y^4 \&c.$  C'est la valeur de  $x$  que l'on cherchoit.

*Corollaires qui suivent de la premiere méthode  
du second Problème.*

C O R O L L A I R E I.

*Qui contient ce qu'on appelle le retour des suites, ou la maniere de trouver la suite inverse d'une suite donnée.*

234. LORSQU'ON a la valeur de  $x$  exprimée par une suite des puissances de  $y$ , avec des coefficients connus dans tous les termes, par exemple,  $x = ay + byy + cy^3 + ey^4 + fy^5 \&c.$  ou bien  $x = ay + by^3 + cy^5 + ey^7 + fy^9 \&c.$  ou bien  $x = ayy + by^4 + cy^6 \&c.$  ou de quelque autre maniere que ce puisse être; on peut, par la même méthode trouver la valeur de  $y$  par une suite des seules puissances de  $x$ , dont les coefficients connus n'auront que les grandeurs connues  $a, b, c, e, \&c.$  de la suite supposée connue. C'est ce qu'on appelle *le retour des suites*.

On suppose, par exemple,  $x = ay + byy + cy^3 + ey^4 + fy^5 \&c.$  les coefficients  $a, b, c, e, f, \&c.$  sont supposez représenter des grandeurs connues pour trouver la puissance de  $y$ , l'équation proposée sera  $0 = -x + ay + byy + cy^3 + ey^4 + fy^5 \&c.$

1°. On supposera  $y = lx + mxx + nx^3 + px^4 + qx^5 + rx^6 \&c.$  les coefficients  $l, m, n, \&c.$  sont supposez indéterminez.

$$+ 2lmx^4 + 2lpn^5 + 2mnx^5 + 2lqx^6 + 2mpx^6$$

$$y' = l^3 x^3 + 3llmx^4 + 3lmnx^5 + 3llpx^6 \text{ \&c.} \\ + 3llnx^5 + 6lmnx^6 + m^3 x^6$$

$$y' = l^3 x^3 + 4l^3 mx^5 + 6llmnx^6 \text{ \&c.} \\ + 4l^3 nx^6$$

$$y' = l^3 x^3 + 5l^3 mx^6 \text{ \&c.}$$

$$y' = l^3 x^3 \text{ \&c.}$$

On substituera ces valeurs de  $y$ ,  $yy$ , &c. à la place de  $y$ ,  $yy$ , &c. dans la proposée, & l'on aura

$$-x = -x$$

$$+ ay = + alx + amxx + anx^3 + apx^5 + aqx^5 + arx^6$$

$$+ byy = + blxx + 2blmx^3 + bmmx^4 + 2blpx^5 + bnnx^6 \\ + 2blnx^5 + 2bmnx^5 + 2blqx^6 + 2bmpx^6$$

$$+ cy^3 = + cl^3 x^3 + 3cllmx^4 + 3clmmx^5 + 3clpx^6 \\ + 3cllnx^5 + 6clmnx^6 + cm^3 x^6$$

$$+ cy^5 = + el^5 x^5 + 4el^3 mx^5 + 6ellmmx^6 \\ + 4el^3 nx^6$$

$$+ fy^5 = + fl^5 x^5 + 5fl^3 mx^6$$

$$+ gy^6 = + gl^6 x^6$$

3°. On supposera chaque terme de l'équation changée égal à zero, & l'on trouvera par ces équations particulières

$$l = + \frac{1}{a}, \quad m = - \frac{b}{a^2}, \quad n = \frac{2bb - ac}{a^3}, \quad p = \frac{5abc - 5b^3 - aac}{a^4},$$

$$q = \frac{14b^4 + 6aabe - 21abbc + 3aacc - a^2f}{a^5}, \quad r = - \frac{42b^5 + 84ab^3c}{a^6} \\ - \frac{28aabcc - 28aabbce + 7a^2ce + 7a^2bf - a^2g}{a^{11}}.$$

4°. On substituera ces valeurs des coefficients indéterminés  $l$ ,  $m$ ,  $n$ , &c. à leur place dans  $y = lx + mxx + nx^3$  &c.

$$\text{ \& l'on trouvera } y = \frac{x}{a} - \frac{bx}{a^2} + \frac{2bb - ac}{a^3} x^3 + \frac{5abc - 5b^3 - aac}{a^4} x^5 \\ + \frac{14b^4 + 6aabe - 21abbc + 3aacc - a^2f}{a^5} x^5$$

$$42x^5 + 34x^4c - 28x^3c^2 - 28x^2cb + 7a^3c^3 + 7a^2bf - a^4x^4 \&c.$$

C'est la valeur de  $y$  que l'on cherchoit.

## R E M A R Q U E S.

## I.

235. ON peut de la même manière trouver la valeur de  $y$  dans les équations  $x = ay + by' + cy' \&c.$   $x = ayy + by' + cy' \&c.$  & dans les autres où les exposans des puissances de  $y$  sont en progression arithmétique.

Quand on aura les valeurs de  $y$  dans tous ces cas differens, ces valeurs serviront de formules pour trouver tout d'un coup la résolution des Problèmes qui sont les inverses de ceux qui sont exprimez par les équations où l'on a trouvé la valeur de  $x$  par une suite qui contenoit les puissances de  $y$ , dans les exemples précédens, & dans tous les autres semblables.

237. Pour en faire voir ici une application, on se servira du neuvième exemple, \* qui sert dans la Geometrie à trouver le logarithme hyperbolique, représenté en general par  $x$ , de tout nombre donné représenté en general par  $1 + y$ .

L'on a trouvé le logarithme  $x = 1y - \frac{1}{2}yy + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5 \&c.$

Pour trouver le nombre  $1 + y$ , qu'on suppose à présent inconnu, par une suite qui contienne les puissances du logarithme connu  $x$ , il ne faut que supposer  $1 = a$ ,  $-\frac{1}{2} = b$ ,  $+\frac{1}{3} = c$ ,  $-\frac{1}{4} = d$ ,  $+\frac{1}{5} = f$ , &c. & substituer ces valeurs de  $a, b, c$ , &c. dans la formule  $y = \frac{x}{a} - \frac{bx}{a^2} + \frac{cx^2}{a^3} - \frac{dx^3}{a^4} + \frac{fx^4}{a^5} \&c.$  & l'on trouvera  $y = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}xx + \frac{1}{6}x^3 \&c.$

Ajoutant l'unité à chaque membre, on aura  $1 + y = 1 + \frac{x}{1} + \frac{1}{2}xx + \frac{1}{6}x^3 \&c.$  où  $x$  étant supposée connue,  $y$  l'est aussi. Ce qui étoit proposé.

## I I.

236. Sans supputer de nouvelles formules pour le retour des suites dans les cas où les exposans des puissances des  $y$ , ne sont pas dans la progression naturelle 1, 2, 3, &c. mais suivant la progression 2, 4, 6, &c. ou 1, 3, 5, 7, &c. ou une autre quelconque dont les termes sont des nombres entiers; on peut se servir dans ces cas de la formule seule du 1<sup>er</sup> Corol.

laire ; par exemple, la valeur de  $y = \frac{x}{2} - \frac{bx}{2} + \frac{11b^2 - c}{2} x^2$  &c. peut servir de formule pour trouver tout d'un coup la valeur de  $y$  par les puissances de  $x$ , dans les équations infinies où les puissances de  $y$  seroient  $y, y^3, y^5, y^7, \&c.$  en supposant, 1°. tous les termes de la formule où se trouvent les puissances pairs de  $x$ , comme  $xx, x^4, x^6, \&c.$  égaux à zero, & retranchez de la formule ; & en supposant, 2°. égaux à zero tous les coefficients  $b, c, g, \&c.$  des puissances paires de  $y$ , comme  $yy, y^4, y^6, \&c.$  de l'équation supposée  $x = ay + byy + cy^3 + cy^5 + fy^7 + gy^9 \&c.$

Pour trouver, par exemple, la valeur de  $y$  dans l'équation  $x = y + \frac{1}{2}y^3 + \frac{1}{40}y^5 + \frac{1}{112}y^7 + \frac{1}{192}y^9 \&c.$  par le moyen de la formule précédente, on supposera 1°. les termes  $-\frac{bx}{2} + \frac{11b^2 - c}{2} x^2$ , & les autres où les puissances de  $x$  sont pairs, égaux à zero, & retranchez de la formule.

On supposera, 2°. afin que l'équation proposée  $x = y + \frac{1}{2}y^3 \&c.$  soit représentée par  $x = ay + byy + cy^3 + cy^5 + fy^7 + gy^9 \&c.$   $a = 1, b = 0, c = \frac{1}{2}, e = 0, f = \frac{1}{40}, g = 0, h = \frac{1}{112}, \&c.$

3°. On substituera dans les termes de la formule où les puissances de  $x$  sont impaires, les valeurs précédentes de  $a, b, c, \&c.$  & l'on aura  $y = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \&c.$  C'est la valeur de  $y$  que l'on cherchoit.

On peut de même se servir de la valeur de  $y = \frac{x}{2} - \frac{bx}{2} + \frac{11b^2 - c}{2} x^2 \&c.$  pour le retour des suites dans les autres cas.

I I I.

237. Si  $x$  n'étoit pas lineaire dans la suite directe  $x = ay + byy + cy^3 + \&c.$  mais qu'il y eût par exemple  $x^3 = ay + byy + cy^3 + \&c.$  ou en general  $x^n = ay + byy + cy^3 + \&c.$  il faudroit dans ce cas commencer par élever chaque membre à la puissance  $\frac{1}{n}$  ou  $\frac{1}{n}$ , ce qui rendroit  $x$  lineaire dans le premier membre, & ensuite on trouveroit la valeur de  $y$  exprimée par une suite où il n'y auroit que les puissances de  $x$  avec les coefficients de l'équation proposée, comme dans le premier Corollaire.

C O R O L L A I R E I I.

238. S O I T une équation dont chaque membre contienne une suite infinie, comme  $ax + bxx + cx^3 + dx^5 + ex^7 + fx^9 \&c.$

$= ly + myy + ny^2 + py^3 + qy^4 + ry^5$  &c. dont tous les coefficients sont supposez représenter des grandeurs connues, & dont chaque membre ne contient qu'une inconnue, c'est-à-dire, que l'inconnue d'un membre ne se trouve point dans l'autre membre : On peut, par la même méthode, trouver la valeur de l'une des deux inconnues, par exemple de  $x$ , exprimée par une suite infinie qui ne contiendra que les puissances de  $y$ , avec des coefficients connus. Cette équation peut se marquer ainsi par transposition,  $ax + bxx + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6$  &c.  $- ly - myy - ny^2 - py^3 - qy^4 - ry^5$  &c.  $= 0$ .

Pour trouver la valeur de  $x$ , 1°. il faut supposer  $x = Ay + Byy + Cy^3 + Dy^4 + Ey^5 + Fy^6$  &c. les coefficients  $A, B, C$ , &c. sont indéterminez.

On substituera cette valeur de  $x$ , & les puissances de cette valeur à la place de  $x$  & de ses puissances dans la proposée, & l'on aura l'équation changée suivante,

$$\begin{array}{rcl}
 ax & = & aAy + aByy + aCy^3 + aDy^4 + aEy^5 + aFy^6 \quad \&c. \\
 + bxx & = & + bAAy + 2bABy^2 + bBBy^3 + 2bADy^4 + 2bAEy^5 + bCCy^6 \quad \&c. \\
 + cx^3 & = & + cA^3y^3 + 3cA^2By^4 + 3cABBy^5 + 3cAACy^6 + 6cABCy^7 + 3cAADy^8 \quad \&c. \\
 + dx^4 & = & + dA^4y^4 + 4dA^3By^5 + 6dAABBy^6 + 4dA^2Cy^7 + 4dA^2Ey^8 \quad \&c. \\
 + ex^5 & = & + eA^5y^5 + 5eA^4By^6 + 5eA^4Cy^7 + 5eA^4Ey^8 \quad \&c. \\
 + fx^6 & = & + fA^6y^6 + fA^6y^6 \quad \&c. \\
 - ly - myy - ny^2 - py^3 - qy^4 - ry^5 & = & - ly - myy - ny^2 - py^3 - qy^4 - ry^5 \quad \&c.
 \end{array}$$

Il faut supposer chaque terme de l'équation changée égal à zero.

3°. Il faut déterminer par ces équations particulières les coefficients indéterminez  $A, B, C$ , & l'on trouvera  $A = \frac{1}{a}$ ,

$$B = \frac{n - bAA}{a}, C = \frac{n - 2bAB - cA^3}{a}, D = \frac{p - 5bER - 2bAC - 3cABB - dA^4}{a}$$

On trouvera de même la valeur des autres;

Pour abréger le calcul, on laisse les capitales  $A, B, C, D$ , &c. qui sont les coefficients indéterminez, au lieu de leurs valeurs qui les précèdent, & ces capitales les représentent.

4°. Il faut substituer ces valeurs de  $A, B, C, D$ , &c. dans

$$x = Ay + Byy + Cy^3 + Dy^4 \quad \&c.$$



$$+ \frac{p - bbb - 2bAC - 3cABB - dA^3}{a} y^4 \text{ \&c.}$$

C'est la valeur de  $x$  que l'on cherchoit.

## R E M A R Q U E S.

### I.

139. C'EST la valeur de  $x$  peut servir de formule pour trouver tout d'un coup la valeur de  $x$  dans les cas où les exposans des puissances des  $x$  & des  $y$  sont dans une autre progression arithmétique que celle des nombres naturels 1, 2, 3, &c.

Dans les cas, par exemple, où les exposans des puissances des  $x$  & des  $y$  sont impairs, comme 1, 3, 5, 7, &c. il faudra supposer, 1<sup>o</sup>. dans l'équation  $ax + bxx + cx^3 + dx^5 + ex^7 + fx^9$  &c.  $= ly + myy + ny^3 + py^5 + qy^7 + ry^9$  &c. les coefficients  $b, d, f$ , &c.  $m, p, r$ , &c. des puissances paires des  $x$  & des  $y$ , égaux à zero : Et, 2<sup>o</sup>. retrancher de la formule  $x = \frac{1}{2}y + \frac{m - bAA}{a}yy$  &c. tous les termes où les puissances de  $y$  sont paires, sçavoir le 2<sup>e</sup>, le 4<sup>e</sup>, le 6<sup>e</sup>, &c. comme étant égaux à zero.

S'il étoit proposé, par exemple, de trouver par le moyen de la formule précédente, la valeur de  $x$  dans l'équation  $x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{40}x^5 + \frac{1}{112}x^7 + \frac{1}{112}x^9$  &c.  $= ty + \frac{1}{2}y^3 + \frac{1}{40}y^5 + \frac{1}{112}y^7 + \frac{1}{112}y^9$  &c. il faudroit supposer, afin que cette équation fût représentée par  $ax + bxx + cx^3 + dx^5 + ex^7 + fx^9$  &c.  $= ly + myy + ny^3 + py^5 + qy^7 + ry^9$  &c. que  $a = 1$ ,  $b = 0$ ,  $c = \frac{1}{2}$ ,  $d = 0$ ,  $e = \frac{1}{40}$ ,  $f = 0$ , &c.  $l = t$ ,  $m = 0$ ,  $n = \frac{1}{2}$ ,  $p = 0$ ,  $q = \frac{1}{40}$ ,  $r = 0$ ,  $s = \frac{1}{112}$ , &c. Il faudroit encore supposer que les termes des puissances paires de  $y$ , sçavoir le 2<sup>e</sup>, le 4<sup>e</sup>, le 6<sup>e</sup> &c. de la formule  $x = \frac{1}{2}y + \frac{m - bAA}{a}yy$  &c. en sont retranchez, étant égaux à zero ; & substituer ensuite les valeurs de  $a, b, c, d$ , &c. dans la formule, & l'on auroit la valeur de  $x$  dans l'équation proposée exprimée par une suite infinie où il n'y a que des  $y$  ; ce qui est facile.

### I I.

140. Ce second Corollaire contient le premier ; c'est-à-dire, la formule que fait trouver ce second Corollaire, contient la

formule ou la valeur de  $x$  du premier Corollaire, il n'y a qu'à mettre dans l'équation  $ly + my^2 + ny^3 + \&c. = ax + bx^2 + cx^3 + \&c.$   $x$  au lieu de  $y$  dans le premier membre, &  $y$  au lieu de  $x$  dans le second membre, & supposer dans le premier membre  $l = 1$ , &  $m = 0$ ,  $n = 0$ , c'est-à-dire, supposer que le premier membre ne contient que le premier terme, & cette équation deviendra  $1x = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5 + \&c.$  qui est l'équation du premier Corollaire. Ce qui fait voir que la formule du second Corollaire deviendra la formule du premier, en supposant dans cette formule du second Corollaire  $x$  à la place de  $y$ , &  $y$  à la place de  $x$ , &  $l = 1$ ,  $m = 0$ ,  $n = 0$ ,  $p = 0$ ,  $q = 0$ , &c.

## COROLLAIRE III.

241. ON peut par la même méthode trouver la valeur de  $x$  dans l'équation  $ly + myy + ny^2 + py^3 + qy^4 \&c. = ax + Cxx + yyyx + dy^2x + ey^3x \&c. + bxx + Cyxx + yyyx + dy^2x + ey^3x \&c. + cx^3 + \lambda yx^3 + \mu yyyx^2 + \nu y^2x^2 + py^4x^2 \&c. + dx^4 + \tau yx^4 + \upsilon yyyx^2 + \phi y^2x^4 + \chi y^4x^4 \&c.$  dont tous les coefficients sont supposés représenter des grandeurs connues, & où les deux inconnues  $x$  &  $y$  sont mêlées ensemble; on peut, dis-je, trouver la valeur de  $x$  par une suite infinie qui ne contient que les puissances de  $y$  avec des coefficients connus.

Pour trouver la valeur de  $x$ , après avoir mis par transposition le premier membre dans le second, il faut, 1°. supposer  $x = Ay + Byy + Cy^3 + Dy^4 \&c.$  les coefficients  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , &c. sont indéterminés.

Il faut ensuite substituer les valeurs de  $x$ ,  $xx$ ,  $y^2$ , &c. qui se déduisent de cette supposition, dans l'équation proposée, & l'on aura l'équation changée qui suit,

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 + ax = aAy + aByy + aCy^3 + aDy^4 \quad \&c. \\
 + byx = + bAAy + bAByy + bACy^3 + bADy^4 \quad \&c. \\
 + yyyx = + \gamma Ay^3 + \gamma By^4 \quad \&c. \\
 + dy^2x = + dAy^4 + dBy^5 \quad \&c. \\
 + bxx = + bAAyy + bAByy^2 + bBByy^2 + bACy^4 \quad \&c. \\
 + Cyxx = + cAAy^3 + cAByy^2 + cBByy^2 \quad \&c. \\
 + yyyx = + \gamma Ay^3 + \gamma AByy^2 + \gamma ABy^4 \quad \&c. \\
 + cx^3 = + cA^3y^3 + cAABy^4 \quad \&c. \\
 + \lambda yx^3 = + \lambda A^3y^4 + \lambda A^2By^5 \quad \&c. \\
 + dx^4 = + dA^4y^4 + dA^3By^5 \quad \&c.
 \end{array} \right\} = -ly - myy - ny^2 - py^3 - qy^4 \quad \&c.
 \end{array}$$

égale à zéro.

3°. Il faut trouver les valeurs des coefficients indéterminés  $A, B, C, \&c.$  par le moyen de ces équations particulières.

4°. Il faut substituer ces valeurs de  $A, B, C, \&c.$  à leur place dans  $x = Ay + By^2 + Cy^3 \&c.$  & l'on trouvera

$$x = \frac{1}{2}y + \frac{m - Ad - bAd}{2}yy + \frac{n - 2B - \lambda d - 2bAd - 2cAd - cA^2}{2}y^3 + \frac{p - 2C - 2B - 2\lambda d - 2bAd - 2cAd - 2cAdB - \lambda d^2 - dA^2}{2}y^4 \&c.$$

C'est la valeur de  $x$  que l'on cherchoit.

On a laissé pour abréger, les lettres capitales à la place de leurs valeurs.

Cette valeur de  $x$  peut servir de formule pour résoudre toutes les équations qui peuvent être représentées par la proposée.

#### R E M A R Q U E.

242. **C**E troisième Corollaire contient le second Corollaire, & par conséquent il contient aussi le premier Corollaire; c'est-à-dire, la formule de ce troisième Corollaire deviendra celle du second Corollaire, en supposant dans cette formule du troisième Corollaire,  $\beta = 0, \gamma = 0, \delta = 0, \epsilon = 0, \zeta = 0, \eta = 0, \theta = 0, \kappa = 0, \lambda = 0, \mu = 0, \nu = 0, \rho = 0, \tau = 0, \upsilon = 0, \phi = 0, \chi = 0, \&c.$

#### C O R O L L A I R E I V.

243. **P**OUR trouver les formules des Corollaires précédents, on peut se servir de la méthode de prendre les chiffres d'une manière indéterminée de *M. de Leibnitz*, qui est dans les Actes de Lipsic\*. Par exemple, pour avoir la formule du second Corollaire qui sert à trouver la valeur de  $x$  dans toutes les équations représentées par  $ax + bxx + cx^3 + dx^4 \&c. = ly + myy + ny^3 + py^4 \&c.$  qui est l'équation du second Corollaire; où l'on suppose que les coefficients  $a, b, c, \&c. l, m, n,$  représentent des grandeurs connues, on supposera toutes les mêmes équations représentées par  $10x + 20xx + 30x^3 + 40x^4 + 50x^5, \&c. = 01y + 02yy + 03y^3 + 04y^4 + 05y^5, \&c.$

Le premier chiffre du rang le plus à gauche dans chaque terme représente le coefficient de la puissance de  $x$  dans ce

Kkk ij

terme, par exemple dans le terme  $30x^3$ , le chiffre 3 du rang à gauche représente le coefficient du terme où est  $x^3$ , dans le terme  $40x^4$ , le chiffre 4 représente le coefficient du terme où est  $x^4$ , & ainsi des autres: Et comme il n'y a point de  $x$  dans le second membre, il n'y a que des zéros dans le rang à gauche de chaque terme de ce second membre.

Les chiffres du premier rang, c'est-à-dire du rang le plus à droite dans chaque terme, représente les coefficients des termes où sont les puissances de  $y$ . Par exemple, dans le terme  $03y^3$ , le chiffre 3 représente le coefficient du terme de l'équation où est  $y^3$ , dans le terme  $04y^4$ , le chiffre 4 représente le coefficient du terme où est  $y^4$ , & ainsi des autres.

Par exemple, l'équation  $10x + 20xx + 30x^3 + 40x^4 + 50x^5$  &c.  $= 01y + 02yy + 03y^3 + 04y^4 + 05y^5$  &c. représentant l'équation  $ax + bxx + cx^3 + dx^4 + ex^5$ , &c.  $= ly + myy + ny^3 + py^4 + qy^5$  &c. le chiffre 1 du terme  $10x$  représente le coefficient  $a$  du terme  $ax$  représenté par  $10x$ . Le chiffre 2 du terme  $20xx$  représente le coefficient  $b$  du terme  $bxx$  représenté par  $20xx$ , & ainsi des autres. Dans le second membre le chiffre 1 du terme  $01y$ , représente le coefficient  $l$  du terme  $ly$  représenté par  $01y$ ; le chiffre 2 du terme  $02yy$ , représente le coefficient  $m$  du terme  $myy$  représenté par  $02yy$ ; & ainsi des autres.

Les valeurs de 2, 3, 4, &c. des chiffres de l'équation  $10x + 20xx + 30x^3$ , &c.  $= 01y + 02yy + 03y^3$ , &c. servent seulement à faire reconnoître quels sont les coefficients qu'ils représentent, parceque 2, par exemple, dans  $20xx$ , étant égal à l'exposant de la puissance  $xx$  dans  $20xx$ , quand dans la résolution on aura 20, cela fera connoître que 20 représente le coefficient du terme où est  $xx$ .

De même dans  $03y^3$ , le chiffre étant égal à l'exposant de la puissance  $y^3$ , fera connoître dans la résolution que 03 représente le coefficient du terme où est  $y^3$ , & ainsi des autres.

Pour trouver une formule qui représente la valeur de  $x$  dans les équations représentées par  $10x + 20xx + 30x^3$  &c.  $= 01y + 02yy + 03y^3$  &c.

1<sup>o</sup>. Il faut supposer  $x = 101y + 102yy + 103y^3 + 104y^4$  &c. les coefficients 101, 102, &c. sont indéterminez, & ils ont trois rangs pour faire reconnoître que ce sont les coefficients indéterminez.

Les chiffres 1, 2, 3, 4, &c. du premier rang à droite, servent à faire connoître les termes & à les distinguer, le chiffre 1 marquant le premier terme où est  $y$ , le chiffre 2 marquant le second terme où est  $yy$ , le chiffre 3 marquant le troisieme terme où est  $y^3$ , &c.

Il faut substituer dans la proposée  $10x + 20xx + 30x^3$  &c. —  $01y - 02yy - 03y^3 = 0$ , à la place de  $x, xx, x^3$ , &c. leurs valeurs prises dans l'équation supposée indéterminée  $x = 101y + 102yy + 103y^3$  &c. & l'on aura l'équation changée qui suit,

$$\begin{aligned}
 10 \times x &= 10 \times 101y + 10 \times 102yy + 10 \times 103y^3 & + 10 \times 104y^4 &\&c. \\
 + 20 \times xx &= + 20 \times 101yy + (2) \times 10 \times 101 \times 102y^3 & + 20 \times 102y^4 &\&c. \\
 + 30 \times x^3 &= + 30 \times 101y^3 & + (3) \times 10 \times 101 \times 102y^4 &\&c. \\
 + 40 \times x^4 &= + 40 \times 101y^4 & + 40 \times 102y^5 &\&c. \\
 - 01y - 02yy - 03y^3 - 04y^4 &= - 01y & - 02yy & - 0y^3 & - 04y^4 &\&c.
 \end{aligned}$$

2°. Il faut supposer chaque terme de l'équation changée égal à zero, ce qui donnera les équations particulieres qui servent à trouver les valeurs des coëfficiens indéterminés 101, 102, 103,

3°. Par la premiere de ces équations  $10 \times 101 = 01$ , on trouvera  $101 = \frac{01}{10}$ ; par la seconde  $10 \times 102 + 20 \times 101 = 02$ , on aura  $102 = \frac{02 - 20 \times 101}{10}$ ; par la troisieme  $10 \times 103 + (2) \times 20 \times 101 \times 102 + 30 \times 101 = 03$ , on trouvera  $103 = \frac{03 - (2) \times 10 \times 101 \times 102 - 30 \times 101}{10}$ ; par la quatrième  $10 \times 104 + 20 \times 102 + (2) \times 20 \times 101 \times 103 + (3) \times 30 \times 101 \times 102 + 40 \times 101 = 04$ , on aura  $104 = \frac{04 - 20 \times 102 - (2) \times 20 \times 101 \times 103 - 30 \times 101 \times 102 - 40 \times 101}{10}$ . On laisse dans ces valeurs, pour abreger le calcul, les coëfficiens indéterminés 101, 102, &c. à la place de leurs valeurs déjà trouvées.

4°. Il faut substituer ces valeurs des coëfficiens indéterminés 101, 102, &c. à leur place dans l'équation supposée  $x = 101y + 102yy + 103y^3$  &c. & l'on aura

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{01}{10}y + \frac{02 - 20 \times 101}{10}yy + \frac{03 - (2) \times 10 \times 101 \times 102 - 30 \times 101}{10}y^3 \\
 &+ \frac{04 - 20 \times 102 - (2) \times 20 \times 101 \times 103 - 30 \times 101 \times 102 - 40 \times 101}{10}y^4 &\&c.
 \end{aligned}$$

C'est la valeur de  $x$  que l'on cherchoit, ou plutôt c'est la

formule générale qui sert à trouver la valeur de  $x$  dans toutes les équations représentées par  $10x + 20xx + 30x^3$ , &c.  $= 01y + 02yy + 03y^3$ , &c. Il n'y aura plus qu'à substituer dans cette formule les coefficients des équations qu'on voudra résoudre, à la place des coefficients de la formule qui les représentent, & l'on aura la valeur de  $x$  que l'on cherche exprimée par une suite où il n'y aura que des  $y$ .

#### AVERTISSEMENT.

LES chiffres 2 & 3 renfermez par des parenthèses, ne sont pas représentatifs comme les autres, mais véritables; par exemple dans la grandeur  $— (2) \times 20 \times 101 \times 102$ , le chiffre 2 marque qu'il faut prendre le produit  $20 \times 101 \times 102$  deux fois; de même 3 dans  $— (3) \times 30 \times 101 \times 102$ , marque qu'il faut prendre trois fois le produit représenté par  $30 \times 101 \times 102$ , & ainsi des autres.

#### COROLLAIRE V.

244. **P**OUR avoir une semblable formule qui serve à trouver la valeur de  $x$  dans les équations représentées par celle du troisième Corollaire, où les  $x$  sont mêlez avec les  $y$ , on supposera que ces équations sont représentées par l'équation  $10x + 11yx + 12yyx + 13y^3x + 14y^4x$ , &c.  $+ 20xx + 21yxx + 22yyxx + 23y^3xx + 24y^4xx$ , &c.  $+ 30x^3 + 31yx^3 + 32yyx^3 + 33y^3x^3 + 34y^4x^3$ , &c.  $+ 40x^4 + 41yx^4 + 42yyx^4 + 43y^3x^4 + 44y^4x^4$ , &c.  $= 01y + 02yy + 03y^3 + 04y^4 + 05y^5$ , &c. Les coefficients de chaque terme représentent les coefficients donnés des termes de chaque équation donnée, qui est représentée par celle-ci. Pour les distinguer & les reconnoître, il y a deux chiffres dans le coefficient de chaque terme, celui qui est le plus à gauche est égal à l'exposant de la puissance de  $x$ , & celui qui est le plus à droite est égal à l'exposant de la puissance de  $y$  par laquelle la puissance de  $x$  est multipliée. Par exemple, dans  $34y^4x^3$ , le chiffre 3 est égal à l'exposant de la puissance  $x^3$ , & le chiffre 4 est égal à l'exposant de la puissance  $y^4$ , mais les deux ensemble 34 marquent simplement, ou représentent le coefficient donné du terme de l'équation donnée où se trouve le produit  $y^4x^3$ , & ainsi des autres.

Pour trouver la formule qui représente la valeur de  $x$ , exprimée par les seules puissances de  $y$ , & par les coefficients donnez représentez par ceux de l'équation précédente,

1°. Après avoir mis le second membre dans le premier par transposition, on supposera  $x = 101y + 102yy + 103y^2 + 104y^3$  &c. les coefficients 101, 102, &c. sont indéterminés, & ils ont trois rangs pour les faire reconnoître. Les chiffres 1, 2, 3, &c. du rang le plus à droite, servent à en distinguer les termes, le chiffre 1 marquant le premier terme où est  $y$ , 2 marquant le second où est  $yy$ , 3 marquant le troisième où est  $y^2$  &c.

On substituera ensuite dans la proposée  $10x + 11yx + 12yyx$  &c. à la place de  $x$ ,  $xx$ ,  $x^2$ , &c. leurs valeurs prises dans l'équation indéterminée  $x = 101y + 102yy + 103y^2$ , &c. & l'on aura l'équation changée qui suit,

$$\begin{array}{l}
 10x = 10 \times 101y + 10 \times 102yy + 10 \times 103y^2 + 10 \times 104y^3 \text{ \&c.} \\
 + 11yx = 11 \times 101y^2 + 11 \times 102y^3 + 11 \times 103y^4 \text{ \&c.} \\
 + 12yyx = 12 \times 101y^3 + 12 \times 102y^4 + 12 \times 103y^5 \text{ \&c.} \\
 + 13y^2x = 13 \times 101y^4 + 13 \times 102y^5 + 13 \times 103y^6 \text{ \&c.} \\
 \text{\&c.} \\
 + 20xx = 20 \times 101^2y^2 + (2) \times 20 \times 101 \times 102y^3 + 20 \times 102^2y^4 \text{ \&c.} \\
 + 21yxx = 21 \times 101y^3 + (2) \times 21 \times 101 \times 102y^4 + 21 \times 102^2y^5 \text{ \&c.} \\
 + 22yyxx = 22 \times 101^2y^4 + 22 \times 101 \times 102^2y^5 \text{ \&c.} \\
 \text{\&c.} \\
 + 30x^2 = 30 \times 101^2y^2 + (5) \times 30 \times 101 \times 102y^3 + 30 \times 102^2y^4 \text{ \&c.} \\
 + 31yx^2 = 31 \times 101^2y^3 + 31 \times 101 \times 102^2y^4 \text{ \&c.} \\
 \text{\&c.} \\
 + 40x^3 = 40 \times 101^3y^3 + 40 \times 101^2 \times 102y^4 \text{ \&c.} \\
 - 01y - 02yy - 03y^2 - 04y^3 \text{ \&c.} = - 019
 \end{array}$$

2°. On supposera chaque terme de cette équation changée égal à zero, ce qui donnera les équations particulières propres à déterminer les coefficients indéterminés 101, 102, &c.

3°. Par la première de ces équations particulières, qui est  $10x - 101 = 01$ , on trouvera  $101 = \frac{01}{10}$ ; par la 2<sup>e</sup>  $10x + 11 \times 101 + 20 \times 101 = 02$ , on aura  $102 = \frac{02 - 11 \times 101 + 20 \times 101}{10}$ , par la 3<sup>e</sup>  $10x + 103 + 11 \times 102 + 12 \times 101 + (2) \times 20 \times 101 \times 102 + 21 \times 101^2 = 03$ , on aura  $103 = \frac{03 - 11 \times 102 - 12 \times 101 - (2) \times 20 \times 101 \times 102 - 21 \times 101^2 - 10 \times 101}{10}$ , par la 4<sup>e</sup>  $10x + 104 + 11 \times 103 + 12 \times 102 + 13 \times 101$

$$\begin{aligned}
& + 20 \times \frac{102}{10} + (2) \times 20 \times \frac{101}{10} \times \frac{103}{10} + (2) \times 21 \times \frac{101}{10} \times \frac{102}{10} \\
& + 22 \times \frac{101}{10} + (3) \times 30 \times \frac{101}{10} \times \frac{102}{10} + 31 \times \frac{101}{10} + 40 \times \frac{101}{10} \\
& = 04, \text{ on trouvera } 104 = \frac{04 - 11 \times \frac{101}{10} - 12 \times \frac{102}{10} - 13 \times \frac{101}{10} - 20 \times \frac{102}{10}}{10} \\
& - \frac{(2) \times 30 \times \frac{101}{10} \times \frac{103}{10} - (2) \times 21 \times \frac{101}{10} \times \frac{102}{10} - 21 \times \frac{101}{10} - (3) \times 30 \times \frac{101}{10} \times \frac{102}{10} - 31 \times \frac{101}{10} - 40 \times \frac{101}{10}}{10}
\end{aligned}$$

4°. On substituera ces valeurs des coefficients indéterminés 101, 102, &c. à leur place dans  $x = 101y + 102yy$

$$\begin{aligned}
& + 103y^2 \text{ \&c. \& l'on aura } x = \frac{01}{10}y + \frac{02 - 11 \times \frac{101}{10} - 20 \times \frac{101}{10}}{10}yy \\
& + \frac{01 - 11 \times \frac{102}{10} - 12 \times \frac{101}{10} - (2) \times 20 \times \frac{101}{10} \times \frac{102}{10} - 21 \times \frac{101}{10} - 30 \times \frac{101}{10}}{10}y^2 \\
& + \frac{04 - 11 \times \frac{103}{10} - 12 \times \frac{102}{10} - 13 \times \frac{101}{10} - 20 \times \frac{102}{10} - (2) \times 20 \times \frac{101}{10} \times \frac{103}{10}}{10}y^3 \\
& - \frac{(2) \times 21 \times \frac{101}{10} \times \frac{102}{10} - 21 \times \frac{101}{10} - (3) \times 30 \times \frac{101}{10} \times \frac{102}{10} - 31 \times \frac{101}{10} - 40 \times \frac{101}{10}}{10}y^4 \text{ \&c.}
\end{aligned}$$

C'est la valeur de  $x$  que l'on cherchoit, ou plutôt c'est la formule générale qui sert à trouver la valeur de  $x$  dans toutes les équations représentées par l'équation proposée  $10x + 11yx + 12yyx + 13y^2x \text{ \&c.}$

Il n'y aura qu'à substituer dans cette formule les coefficients des équations qu'on voudra résoudre, à la place des coefficients de la formule qui les représentent, & l'on aura la valeur de  $x$  que l'on cherche exprimée par une suite où il n'y aura que des  $y$ .

Il faut faire ici la même remarque sur les chiffres 2, 3, &c. renfermez par des parenthèses, qu'on a faite dans l'avertissement. On a laissé dans la formule les grandeurs indéterminées 101, 102, &c. à la place de leurs valeurs, pour abréger le calcul.

#### COROLLAIRE VI.

245. ON peut rendre plus généraux les Corollaires précédens, 246. par le moyen des formules générales \* pour élever deux grandeurs & une suite infinie de grandeurs à une puissance quelconque; on prendra ici pour exemple le second Corollaire: car au lieu de l'équation du second Corollaire  $ax + bxx + cx^2 \text{ \&c.} = ly + myy + ny^2 \text{ \&c.}$  on peut proposer l'équation générale  $ax + bx^{n+1} + cx^{n+2} + dx^{n+3} \text{ \&c.} = ly + my^{n+1} + ny^{n+2} + py^{n+3} \text{ \&c.}$  les coefficients  $a, b, c, d, l, m, \text{ \&c.}$  sont donnés, ou représentent des coefficients donnés, &  $n$  représente en général une puissance quelconque de  $x$  & de  $y$ .

Pour



Pour trouver la valeur de  $x$  dans cette équation generale, ou la formule generale qui représente cette valeur.

1°. Il faut supposer  $x = Ay + Byy + Cy^3 + Dy^4$  &c. les coefficients  $A, B, C$ , sont indéterminez.

2°. Il faut trouver par le moyen de la formule generale \* les valeurs de  $x^t, x^{t+1}, x^{t+2}, x^{t+3}$  &c. dans l'équation  $x = Ay + Byy + Cy^3$  &c. en substituant dans la formule generale  $t, t+1, &c.$  à la place de  $n$ .

Il faut ensuite substituer ces valeurs de  $x^t, x^{t+1}, x^{t+2}$  &c. à la place de  $x^t, x^{t+1}$  &c. dans l'équation proposée, & l'on aura l'équation changée suivante,

$$\begin{aligned} ax^t &= aA^t y^t + \frac{t}{1} aA^{t-1} B y^{t+1} + \frac{t}{1} \times \frac{t-1}{2} \times aA^{t-2} B B y^{t+2} \\ &+ \frac{t}{1} aA^{t-1} C y^{t+3} \text{ &c.} \\ + bx^{t+1} &= + bA^{t+1} y^{t+1} + \frac{t+1}{1} bA^{t+2} B y^{t+2} \text{ &c.} \\ + cx^{t+2} &= + cA^{t+2} y^{t+2} \text{ &c.} \\ &\text{&c.} \\ -ly^t - my^{t+1} - ny^{t+2} \text{ &c.} &= -ly^t - my^{t+1} - ny^{t+2} \text{ &c.} \end{aligned}$$

3°. Il faut supposer chaque terme de cette équation changée égal à zero, ce qui donnera les équations particulieres dont on a besoin pour trouver les valeurs des coefficients indéterminez : On trouvera par la premiere  $A^t = \frac{1}{a}$ , &

$A = \frac{1}{a^{\frac{1}{t}}}$ ; par la seconde,  $B = \frac{m - bA^{t+1}}{t a A^{t-1}}$ , par la troisié-

me,  $C = \frac{n - cA^{t+2} - \frac{t+1}{1} bA^{t+2} - \frac{t}{1} \times \frac{t-1}{2} \times aA^{t-2} B B}{t a A^{t-1}}$ .

On laisse, pour abreger le calcul, les lettres  $A, B, C$ , &c. à la place de leurs valeurs déjà trouvées.

4°. Il faut substituer ces valeurs de  $A, B, C$ , &c. à la place de  $A, B, C$ , &c. dans  $x = Ay + Byy + Cy^3$ , &c.

& l'on aura  $x = \frac{1}{a^{\frac{1}{t}}} y + \frac{m - bA^{t+1}}{t a A^{t-1}} yy +$

$\frac{n - cA^{t+2} - \frac{t+1}{1} bA^{t+2} - \frac{t}{1} \times \frac{t-1}{2} \times aA^{t-2} B B}{t a A^{t-1}} y^3$  &c.

C'est la valeur de  $x$  que l'on cherchoit, ou plutôt c'est la formule generale qui la représente, & qui sert à la trouver.

Il n'y aura plus, pour la trouver, qu'à substituer dans cette formule les coefficients, & les exposans des puissances de  $x$  & de  $y$  marquez par  $t$  des équations qu'on voudra résoudre, représentez par ceux de l'équation générale  $ax^t + bx^{t+1} + cx^{t+2}$  &c.  $= ly^t + my^{t+1} + ny^{t+2}$  &c.

*Remarques où l'on explique la maniere de connoître les exposans des puissances de la quantité  $y$  qui doit distinguer les termes de la suite qui est la valeur de  $x$ .*

## I.

246. 1<sup>o</sup>. IL faut que toutes les grandeurs de l'équation proposée dans lesquelles l'inconnue  $x$ , dont on cherche la valeur, ne se trouve point, soient employées dans l'équation changée; c'est-à-dire, il faut que dans les équations particulières que l'on trouve en supposant chaque terme de l'équation changée égal à zero, chacune des grandeurs de l'équation proposée où  $x$  n'est point, serve à déterminer la valeur des indéterminées; d'où il suit que si quelqu'une de ces grandeurs ne peut servir à déterminer ces valeurs, ce qui arrive lorsqu'elle fait seule un terme de l'équation changée, il est certain que les exposans des puissances de  $y$  ne font pas dans la progression arithmétique qu'il faut, dans la valeur de  $x$  que l'on a supposée; c'est-à-dire, que l'équation proposée ne peut pas être résolue par cette valeur de  $x$  qu'on a supposée; ou bien que l'équation proposée a besoin de préparation pour être résolue par cette méthode du second Problème, & qu'elle ne le peut pas être dans l'état où elle est.

2<sup>o</sup>. Il faut que dans l'équation changée on puisse faire une équation de chaque terme, qui serve à déterminer les valeurs des indéterminées qu'on a supposées; & si cela n'arrivoit pas, on en concluroit les mêmes choses que dans l'article précédent; ainsi il faut que dans chaque terme de l'équation changée il y ait au moins deux grandeurs différentes.

3<sup>o</sup>. Les exposans des puissances de la quantité qui distingue les termes sont, comme on l'a vu dans les exemples, en progression arithmétique; & cette progression arithmétique va en augmentant quand ces exposans sont positifs, & en

augmentant pour ainsi dire en négation, quand ils sont tous négatifs : mais quand les premiers exposans des mêmes puissances sont positifs & deviennent au second terme, ou aux autres termes, négatifs; les positifs vont en diminuant, & les négatifs en augmentant dans leur négation.

4°. On voit par là qu'il suffit de trouver les exposans des puissances de la quantité qui distingue les termes de la valeur de  $x$  dans les deux premiers termes, pour avoir tous les autres.

## I I.

*Pour les équations qui n'ont pas de différences.*

1°. QUAND il y a une quantité toute connue dans l'équation proposée, comme  $2n$  dans le premier exemple, & qu'on veut chercher la valeur de  $x$  par une suite dont les termes sont distingués par les puissances de  $y$  qui ont leurs exposans positifs; il faut que le premier terme de la suite indéterminée qu'on doit supposer pour la valeur de  $x$ , n'ait qu'une grandeur indéterminée sans aucun  $y$ ; ou, ce qui est la même chose, l'exposant de  $y$  doit être zero au premier terme; ainsi on supposera dans ce cas  $x = ay^0 + \&c.$

Pour trouver dans ce cas l'exposant de  $y$  dans le second terme, il n'y a qu'à considérer attentivement quel exposant doit avoir  $y$  dans le second terme de la valeur indéterminée de  $x = a + by + \&c.$  afin qu'on puisse avoir par la substitution des deux termes  $a + by$  considerez comme la valeur de  $x$ , à la place de  $x$  dans l'équation proposée, un second terme de l'équation changée, qui étant supposé égal à zero, donne une équation par laquelle on puisse déterminer la valeur de  $b$ ; & l'on verra dans le premier exemple qu'il faut supposer  $y^1$  dans le second terme de la valeur indéterminée de  $x$ . Ainsi l'on voit dans le premier exemple qu'il faut supposer  $x = a + by + cy^2 + \&c.$  En appliquant le même raisonnement aux cas semblables, on trouvera la suite des exposans de  $y$  qu'il faut supposer dans la valeur indéterminée de  $x$ .

3°. Quand il n'y a aucun terme qui soit tout connu dans l'équation proposée, comme dans le huitième exemple  $x^6$

$$-\frac{5x^{\frac{3}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}}x^5 + \frac{y^3}{n}x^4 - 7nnyyx + ppy^4 + 6n^3y^3 = 0;$$

& qu'on veut trouver la valeur de  $x$  par une suite où les exposans de  $y$  soient positifs, dans ce cas,  $y$  doit être dans le premier terme de la valeur indéterminée de  $x$ . Pour avoir l'exposant de  $y$  dans le premier terme de cette valeur indéterminée de  $x = ay^{\frac{1}{2}} + \&c.$  Il faut avoir égard à la grandeur  $+ 6n'y$ , dans laquelle  $y$  est au moindre degré sans qu'il y ait de  $x$ , & voir quel est l'exposant qu'il faut donner à  $y$  dans le premier terme de  $x = ay^{\frac{1}{2}} + \&c.$  afin qu'en élevant l'équation indéterminée  $x = ay^{\frac{1}{2}} + \&c.$  à la sixième puissance,  $x^6 = a^6y^3 + \&c.$  l'on puisse avoir la quantité  $a^6y^3$  qui fasse avec la quantité  $6n'y$  de la proposée le premier terme de l'équation changée, de manière qu'en supposant ce premier terme égal à zero, on puisse déterminer la valeur de la première indéterminée  $a$ . Or il est évident dans le huitième exemple, qu'il faut supposer  $x = ay^{\frac{1}{2}} + \&c.$  L'on a donc déjà le premier exposant de  $y$ , il ne faut plus trouver que le second.

4°. Pour trouver ce second exposant de  $y$  dans la valeur indéterminée de  $x = ay^{\frac{1}{2}} + by^{1+\frac{1}{2}} + \&c.$  il faut voir quel est celui qu'on peut supposer pour avoir ces deux choses : la première, que la grandeur  $+ ppy$  de l'équation proposée dans laquelle  $x$  n'est point, se puisse trouver dans un des termes de l'équation changée avec quelqu'autre grandeur qui contienne quelques-unes des indéterminées, car sans cela  $ppy$  ne pourroit être employée dans la résolution de l'équation : La seconde, qu'en faisant la substitution de  $ay^{\frac{1}{2}} + by^{1+\frac{1}{2}} + \&c. = x$ , à la place de  $x$  dans la proposée, on trouve un second terme dans l'équation changée, qui étant supposé égal à zero, donne une équation particulière par laquelle on puisse déterminer la valeur de la seconde indéterminée  $b$ . Or l'on découvre aisément qu'en supposant  $x = ay^{\frac{1}{2}} + by^{1+\frac{1}{2}} + \&c.$  l'on aura ces deux choses ; ainsi  $1 + \frac{1}{2}$  est le second exposant de  $y$  dans l'équation indéterminée  $x = ay^{\frac{1}{2}} + by^{1+\frac{1}{2}} + \&c.$  ce qui donne tous les autres suivans.

Ces Remarques suffisent pour apprendre aux Lecteurs celles qu'il faut faire dans tous les cas semblables, pour découvrir les exposans qu'il faut donner aux  $y$ , dans la valeur indéterminée de  $x$ , qu'il faut supposer pour en découvrir la véritable valeur par cette méthode, & après s'être rendu cette méthode bien familière en l'appliquant à beaucoup d'exemples, ils découvriront aisément les exposans qu'il faut donner aux  $y$ , dans la valeur indéterminée de  $x$ , lorsqu'on veut chercher cette valeur par des  $y$  dont les exposans soient négatifs, & ils pourront facilement l'appliquer à toutes les équations qui auront deux ou plusieurs inconnues, sans qu'il soit nécessaire d'en grossir ce Traité.

## F I I.

*Pour les équations qui ont des différences.*

**L**ES Regles que l'on a données dans les articles de la première remarque pour prendre les exposans des  $y$ , tels qu'il faut dans la suite indéterminée que l'on doit supposer pour la valeur de  $x$ , conviennent aussi aux équations qui ont des différences; c'est-à-dire que pour résoudre les équations différentielles, il faut supposer une suite indéterminée égale à  $x$ , où les exposans des  $y$  soient en progression arithmétique, & aillent en augmentant, quand ils sont positifs, & en augmentant, pour ainsi dire, en négation, quand ils sont négatifs; & que s'ils commencent par être positifs, ils aillent d'abord en diminuant, & ensuite en augmentant en négation dès qu'ils deviennent négatifs; que ces exposans des  $y$  dans la suite indéterminée qu'on suppose, soient tels; 1°. que toutes les grandeurs de l'équation proposée se trouvent employées dans l'équation changée; & y servent à déterminer les valeurs des indéterminées, 2°. qu'on puisse faire de chaque terme de l'équation changée une équation particulière en le supposant égal à zero; laquelle serve à trouver la valeur de quelque indéterminée, & qu'ainsi chaque terme de l'équation changée ait au moins deux grandeurs différentes, 3°. & qu'enfin si on ne peut trouver de progression arithmétique des  $y$ , soit positive, soit négative, propre à remplir ces deux conditions, on soit assuré que l'équation proposée ne peut pas être résolue telle qu'elle est, du moins si l'on n'y fait quelque préparation.

Mais c'est une chose particulière aux équations différentielles, qu'en prenant la différence de la suite indéterminée  $x = ay + by^2 + cy^3 + \&c.$  ou  $x = a + by + cy^2 + cy^3 + \&c.$  ou  $x = ay^1 + by^0 + cy^{-1} + cy^{-2} + \&c.$  & la divisant ensuite par la différence  $dy$ , l'exposant de chaque  $y$  diminue d'une unité dans la suite des exposans positifs, & augmente d'une unité négative dans la suite des exposans négatifs; & que si l'on suppose pour un terme une grandeur indéterminée sans  $y$ , elle ne se trouve plus dans la différence: Cela est causé que la grandeur, où  $y$  a pour exposant l'unité, se trouve sans  $y$  dans la différence, & que celle où il n'y auroit aucun  $y$ , ne s'y trouve plus, & est devenue zero: C'est pourquoi quand il y a une grandeur toute connue sans  $y$  dans l'équation proposée, il n'est pas toujours nécessaire de supposer dans la suite indéterminée, qui est la valeur de  $x$ , une grandeur indéterminée sans  $y$ , comme dans les exemples 9<sup>e</sup>, 10<sup>e</sup>, 11<sup>e</sup>, 12<sup>e</sup> & 13<sup>e</sup>. Mais dans le 14<sup>e</sup> exemple on a supposé un terme qui contenoit une indéterminée sans  $y$ , parceque sans cela on n'auroit pas pû employer dans l'équation changée les grandeurs  $+ny - mn$  de la proposée.

Ces remarques suffisent à ceux qui se sont rendu la méthode bien familière, pour découvrir toujours certainement quels doivent être les exposans des  $y$  dans la suite indéterminée, qu'on doit supposer pour la valeur de  $x$ , dans les équations qui n'ont pas de différences, & dans celles qui ont des différences.

## SECTION V.

*Où l'on explique la seconde méthode du second Problème par le moyen de la transformation qui sert à diminuer & à augmenter les racines d'une équation.*

### AVERTISSEMENT.

247. LA seconde méthode qu'on va expliquer, fait aussi trouver pour la valeur de  $x$  une suite infinie, c'est-à-dire, qui a une infinité de termes qui sont distinguez les uns des autres par les puissances différentes de la seconde inconnue  $y$ , dont les

exposans font en progression arithmétique qui va en augmentant quand ils sont positifs, qui va en augmentant, pour ainsi dire, en négation, quand ils sont négatifs, & qui va d'abord en diminuant quand ils sont au commencement positifs, & qu'ils deviennent ensuite négatifs, & elle augmente après en négation.

On donnera une méthode uniforme pour trouver chaque terme de la valeur de  $x$ , c'est-à-dire, la manière de trouver le premier terme de cette valeur, sera aussi celle qu'on emploiera à trouver le second terme, le troisième, & tous les autres. Cela rendra la méthode plus facile à concevoir & à pratiquer; cependant on enseignera dans les Remarques comment après avoir trouvé le premier terme de la valeur de  $x$ , on peut trouver le second, le troisième, & tous les autres suivans par la quatrième & par la cinquième méthode d'approximation du sixième Livre, art. 159. & 166. Voici en quoi consiste cette seconde méthode.

## S E C O N D E M É T H O D E.

248. **P**OUR trouver le premier terme de la valeur de  $x$ ; 1°. il faut supposer une indéterminée  $z$  pour le coefficient de ce premier terme; on supposera cette indéterminée seule, ou, ce qui est la même chose, multipliée par  $y^0$ , s'il y a quelque grandeur toute connue sans  $y$  dans l'équation proposée, & qu'on veuille que les exposans des puissances de  $y$ , qui doivent distinguer les termes de la suite qui est la valeur de  $x$ , soient positifs, & aillent en augmentant. S'il n'y a aucune grandeur toute connue sans  $y$  dans la proposée, on supposera l'indéterminée  $z$  multipliée par une puissance de  $y$ , qui soit telle, qu'en substituant le produit de  $z$  par cette puissance de  $y$  à la place de  $x$  dans la proposée, l'on puisse trouver après la substitution au moins deux grandeurs différentes dans lesquelles la seconde inconnue  $y$  soit au même moindre degré; pour en faire une équation propre à déterminer la valeur de l'indéterminée  $z$ . Cette grandeur indéterminée  $z$  seule ou multipliée par une puissance de  $y$ , représentera le premier terme de la suite qu'on cherche, qui doit être la valeur de  $x$ .

2°. Il faut substituer cette grandeur indéterminée qui représente le premier terme de la valeur de  $x$ , à la place de  $x$ .

dans l'équation proposée; supposer toutes les grandeurs dans lesquelles  $y$  ne se trouve point, après la substitution, égales à zero; & si  $y$  se trouve en toutes, supposer égales à zero celles où  $y$  est au même moindre degré; & trouver la valeur de l'indéterminée  $a$  par l'équation que donne cette supposition, & ce sera le premier terme de la valeur de  $x$  que l'on cherche, si on a supposé l'indéterminée  $a$  seule sans  $y$ ; & si on a multiplié l'indéterminée  $a$  par  $y$ , multipliant cette valeur de  $a$  par la même puissance de  $y$  par laquelle on avoit multiplié l'indéterminée  $a$ , le produit sera le premier terme de la valeur de  $x$ .

3°. Il faut supposer le premier terme de la valeur de  $x$  qu'on vient de trouver plus une inconnue  $f$ , égale à  $x$ , & substituer cette valeur de  $x$  à sa place dans l'équation proposée, & l'équation qui en viendra sera la première transformée, qui servira à trouver le 2<sup>e</sup> terme de la valeur de  $x$ .

Pour trouver ce second terme de la valeur de  $x$ , 1°. il faut prendre une indéterminée  $b$ , & la multiplier par une puissance de  $y$ , qui soit telle, qu'en substituant le produit de  $b$  par cette puissance de  $y$ , à la place de  $f$  dans la première transformée, on ait au moins deux grandeurs différentes dans lesquelles  $y$  soit au même moindre degré. Ce produit de  $b$  par cette puissance de  $y$ , représentera le second terme de la valeur de  $x$  que l'on cherche. 2°. Il faut substituer ce produit qui représente le second terme de la valeur de  $x$ , à la place de  $f$  dans la première transformée; faire une équation des grandeurs dans lesquelles  $y$  est au même moindre degré, trouver par cette équation la valeur de l'indéterminée  $b$ , & multiplier cette valeur par la même puissance de  $y$  par laquelle  $b$  est multipliée; & le produit sera le second terme de la valeur de  $x$ . 3°. Il faut supposer ce second terme plus une nouvelle inconnue  $g$ , égale à l'inconnue  $f$  de la première transformée, & substituer cette valeur de  $f$  à sa place dans la première transformée, & l'équation qui viendra de la substitution sera la seconde transformée; on trouvera par son moyen le troisième terme de la valeur de  $x$ , de la même manière qu'on a trouvé le premier & le second; & ce troisième terme servira à faire une troisième transformée, qui fera de même découvrir le quatrième terme de la valeur de  $x$ ; & ainsi de suite à l'infini.

Quand



Quand les exposans des puissances de  $y$  qui doivent distinguer les termes de la valeur de  $x$ , commencent par être positifs, & deviennent ensuite négatifs; pour trouver le premier terme de la valeur de  $x$ , il faut multiplier la première indéterminée  $a$  par une puissance de  $y$ , qui soit telle, qu'en substituant le produit de  $a$  par cette puissance de  $y$ , à la place de  $x$  dans l'équation proposée, on puisse avoir au moins deux grandeurs différentes dans lesquelles  $y$  soit à la même puissance la plus élevée: & pour trouver le second terme, il faut multiplier la seconde indéterminée  $b$  par une puissance de  $y$ , qui soit telle, qu'en substituant le produit de  $b$  par cette puissance de  $y$  à la place de l'inconnue  $f$  de la première transformée, dans la première transformée, on ait au moins deux grandeurs dans lesquelles  $y$  soit à la puissance la plus élevée; & faire le reste comme on l'a marqué pour la recherche des deux premiers termes de la valeur de  $x$ , quand les exposans des  $y$  de cette valeur sont positifs.

Les exposans des puissances de  $y$  qui distinguent les termes de la valeur de  $x$ , devant être en progression arithmétique, il suffit d'avoir les exposans de  $y$  dans les deux premiers termes de cette valeur, pour avoir tous les autres: C'est pourquoi quand on a découvert ces deux premiers exposans, il faut supposer  $x$  égale à une suite indéterminée dont chaque terme contienne une indéterminée multipliée par la puissance de  $y$  qui convient à ce terme. Par exemple, pour trouver la valeur de  $x$  dans l'équation  $x^2 + nyx - y^2 = 0$ , après

$$+ nmx - 2n^2$$

avoir trouvé que la puissance de  $y$  qui doit multiplier le premier terme de la valeur de  $x$ , doit être  $y^0$ , celle qui doit multiplier le second terme, doit être  $y^1$ , on supposera  $x = ay^0 + by^1 + cy^2 + dy^3 + ey^4 + \&c.$   $a, b, c, \&c.$  sont indéterminées. Si  $n$  est moindre que  $y$ , il faudra que les exposans des  $y$  commencent par être positifs à cause de  $y^1$ , & deviennent ensuite négatifs; & après avoir trouvé que les exposans de  $y$  dans les deux premiers termes de la valeur de  $x$ , doivent être  $ay^1 + by^0$ , on supposera  $x = ay^1 + by^0 + cy^{-1} + dy^{-2} + \&c.$   $a, b, c$ , sont indéterminées.

De même pour avoir la valeur de  $x$  dans l'équation  $x^6 - 5yx^5 + \frac{2x^4}{y} - 7nnyxx + ppy^4 + 6n^2y^3 = 0$ , quand on aura trouvé que les exposans de  $y$  dans le premier & le second

terme de la valeur de  $x$ , sont  $y^{\frac{1}{2}}$ ,  $y^1$ , on supposera que  $x = ay^{\frac{1}{2}} + by^1 + cy^1 + \frac{1}{2} + dy^2 + ey^2 + \frac{1}{2} + \&c.$   $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $\&c.$  sont indéterminées. Il en est de même des autres exemples.

On aura par ce moyen la suite indéterminée qui représente la valeur de  $x$ ; il ne faudra plus pour avoir la valeur déterminée de  $x$ , que trouver la valeur de chacune des indéterminées, ou de chaque terme indéterminé; on la trouvera cette valeur déterminée, 1°. en substituant ce terme indéterminé dans la proposée, à la place de  $x$ , si c'est le premier terme, ou dans la transformée qui convient à ce terme, si ce n'est pas le premier, à la place de l'inconnue de cette transformée; 2°. faisant une équation des grandeurs dans lesquelles  $y$  se trouve au même degré le moindre de tous, si les exposans des  $y$  sont tous positifs ou tous négatifs; & le plus élevé, si les exposans doivent commencer par être positifs, & devenir ensuite négatifs, & qu'on fasse la recherche des premiers: 3°. déterminant par cette équation la valeur de l'indéterminée du terme que l'on cherche, après quoi ce terme sera connu; & enfin, 4°. en supposant ce terme qu'on vient de connoître plus une nouvelle inconnue égal à l'inconnue de la transformée qui a fait trouver ce terme; & substituant cette valeur à la place de l'inconnue dans cette transformée, on aura la transformée suivante, par le moyen de laquelle on trouvera le terme suivant de la valeur de  $x$ .

On ne fera la recherche des deux premiers termes que dans le premier exemple, pour apprendre la manière de trouver les exposans de  $y$  dans les deux premiers termes, & pour abréger dans les autres exemples, on supposera la suite indéterminée de la valeur de  $x$ , & on déterminera les valeurs des indéterminées de cette suite de la manière qu'on vient d'expliquer. •

*Application de la seconde méthode aux exemples.*

#### EXEMPLE I.

249. **S**OIT proposé de trouver, par cette seconde méthode la valeur de  $x$  dans l'équation  $x^3 + n y x - y^3 = 0$ .  
 $+ n n x - x n^3$

1°. Pour avoir le premier terme de cette valeur, il faut le supposer représenté par l'indéterminée  $a$  multipliée par  $y^0$ ,

c'est-à-dire, multipliée par l'unité, ou seule sans  $y$ , à cause de la grandeur toute connue  $2n^3$ .

2°. Il faut substituer  $a$  dans la proposée à la place de  $x$ , & l'on aura l'équation changée  $a^3 + nya - y^3 = 0$ . Il faut  
 $+ nna - 2n^3$

faire une équation de toutes les grandeurs dans lesquelles la seconde inconnue  $y$  ne se trouve point, & trouver par cette équation, qui est  $a^3 + nna - 2n^3 = 0$ , la valeur de  $a$ , qui est  $+n$ . C'est le premier terme de la valeur de  $x$  qu'on cherche: & l'on a déjà  $x = +ny^0$ , ou  $x = 1n$ .

3°. Il faut supposer  $n + f = x$ , & substituer cette valeur de  $x$  à sa place dans la proposée, & l'on aura la première transformée  $-y^3 + nyf + 3nff + f^3 = 0$ , qui servira à  
 $+ nny + 4nnf$

trouver le second terme de la valeur de  $x$ .

Pour trouver ce second terme de la valeur de  $x$ , 1°. on le supposera représenté par l'indéterminée  $b$  multipliée par  $y^1$ , parceque substituant  $by^1$  à la place de  $f$  dans la première transformée, on aura les deux grandeurs  $+nny + 4nnby$  dans lesquelles  $y$  est au même moindre degré. 2°. On substituera  $by$  à la place de  $f$  dans la première transformée, & faisant une équation des deux grandeurs  $+nny + 4nnby = 0$ , dans lesquelles  $y$  est au même moindre degré après la substitution, on trouvera par cette équation  $b = -\frac{1}{4}$ ; mettant cette valeur de  $b$  dans le second terme indéterminé  $by^1$  de la valeur de  $x$ , on aura pour le second terme de cette valeur  $-\frac{1}{4}y^1$ ; l'on a donc déjà  $x = +n - \frac{1}{4}y^1$ . 3°. On supposera  $-\frac{1}{4}y + g = f$ ; & substituant cette valeur de  $f$  à sa place dans la première transformée, on aura la seconde transformée suivante,  $-\frac{61}{64}y^3 + \frac{1}{16}y^2g - \frac{1}{4}ygg + g^3 = 0$ ,

$$-\frac{1}{16}ny^2 - \frac{1}{2}nyg + 3nngg + 4nng$$

qui servira à trouver le troisième terme de la valeur de  $x$ .

A présent qu'on a trouvé les exposans 0 & 1 de  $y$  dans les deux premiers termes de la suite qui doit être la valeur de  $x$ , on a tous les autres; & pour abréger, on supposera que la valeur indéterminée de  $x$  est  $x = ay^0 + by^1 + cy^2 + dy^3 + \&c.$  les valeurs de  $a$  & de  $b$  sont déjà trouvées; il faut trouver les valeurs des indéterminées suivantes, qui sont  $c, d, e, \&c.$

Pour déterminer le troisième terme  $cy^2$  de la valeur indéterminée de  $x$ , il faut substituer  $cy^2$  à la place de  $g$  dans la seconde transformée (il suffit de concevoir  $cy^2$  substitué à la place de  $g$ , sans qu'il soit nécessaire de le substituer actuellement, ce qu'il faut remarquer pour la suite) & faire une équation des grandeurs  $-\frac{1}{16}ny^2 + 4nncy^2 = 0$ , dans lesquelles  $y$  est au même moindre degré, & l'on trouvera par cette équation  $c = +\frac{1}{64n}$ ; ainsi le troisième terme de la suite qui est la valeur de  $x$ , est  $+\frac{1}{64n}y^2$ , & l'on a déjà  $x = n - \frac{1}{4}y + \frac{1}{64n}y^2$ .

Il faut supposer  $+\frac{1}{64n}y^2 + b = g$ , & substituer cette valeur de  $g$  à sa place dans la seconde transformée, & l'équation qui en viendra sera la troisième transformée, qui servira à déterminer le quatrième terme  $+dy^3$  de la valeur indéterminée de  $x$ .

Il est évident qu'on peut continuer à l'infini l'approximation de la valeur de  $x$  par cette seconde méthode, les opérations qu'on vient de faire suffisent pour la faire concevoir clairement.

*Seconde maniere de résoudre le même exemple.*

250. **S**I la grandeur  $n$  étoit moindre que  $y$ , il faudroit trouver une valeur de  $x$  qui fût telle, que les  $y$  se trouvassent dans les dénominateurs des termes de cette valeur, afin que ces termes fussent des fractions, & allassent en diminuant de valeur; ou, ce qui est la même chose, il faudroit que les exposans des  $y$  qui distinguent les termes de la valeur de  $x$ , fussent négatifs. Voici la maniere de trouver cette valeur par cette seconde méthode.

Pour trouver le premier terme, il le faut supposer représenté par l'indéterminée  $a$  multipliée par  $y^1$ ; c'est-à-dire, par  $ay^1$ ; parcequ'en substituant  $ay$  à la place de  $x$  dans la proposée  $x^3 + nxy - y^3 = 0$ , on aura dans l'équation chan-

$$+ nnx - 2n^3$$

gée  $ay^3 + nay^2 - y^3 = 0$ , les deux grandeurs  $ay^3 - 1y^3$ ,  
 $+ nny - 2n^3$ .

dans lesquelles  $y$  est au même degré le plus élevé. Il faut en faire l'équation  $ay^3 = 1y^3$ , d'où l'on déduira  $a = 1$ , ainsi le premier terme de la valeur de  $x$  est  $1y$ .

Il faut supposer  $y + f = x$ , & substituer cette valeur de  $x$  à sa place dans la proposée, & l'on trouvera la première transformée suivante  $+ny^2 + 3y^2f + 3yff + f^3 = 0$ ,

$$+n'y + nyf \\ - 2n^3 + n^2f$$

qui servira à trouver le second terme de la valeur de  $x$ .

Pour trouver ce second terme, il le faut supposer représenté par l'indéterminée  $b$  multipliée par  $y^0$ , c'est-à-dire sans  $y$ ; parcequ'en concevant  $b$  substituée à la place de  $f$  dans la première transformée, on aura les deux grandeurs  $+ny^2 + 3by^2$ , dans lesquelles  $y$  est au même degré le plus élevé; dont faisant l'équation  $3by^2 = -ny^2$ , on trouvera  $b = -\frac{1}{3}n$ . L'on a donc déjà  $x = 1y - \frac{1}{3}n$ .

Il faut supposer  $-\frac{1}{3}n + g = f$ , & substituer cette valeur de  $f$  à sa place dans la 1<sup>re</sup> transformée, & l'on trouvera la 2<sup>e</sup> transformée

$$+n'y + 3y^2g + 3ygg + g^3 = 0, \\ -\frac{2}{3}n^3 - nyg - n^2g \\ + \frac{4}{3}n^2g$$

qui servira à trouver le troisième terme de la valeur de  $x$ .

Les exposans de  $y$  dans le premier & le second terme de la valeur de  $x$  étant connus, on peut supposer pour la valeur de  $x$  la suite indéterminée  $x = ay + by^0 + cy^{-1} + dy^{-2}$ ,  $+ ey^{-1} + \&c.$  dont les deux premiers termes sont connus. Pour déterminer le troisième terme représenté par  $cy^{-1}$ , il faut concevoir  $cy^{-1}$  substitué à la place de  $g$  dans la seconde transformée, & supposer égales à zero les deux grandeurs  $+n'y + 3cy = 0$ , dans lesquelles  $y$  est au même degré le plus élevé, d'où l'on déduira  $c = -\frac{1}{3}n^2$ ; ainsi le troisième terme de la valeur de  $x$  est  $-\frac{1}{3}n^2y^{-1}$ .

Il faut supposer  $-\frac{1}{3}n^2y^{-1} + h = g$ , & substituer cette valeur de  $g$  à sa place dans la seconde transformée, & l'on trouvera la troisième transformée qui suit,

$$-\frac{1}{27}n^6y^{-3} + \frac{1}{3}n^4y^{-2}h - n^2y^{-1}h^2 + h^3 = 0 \\ -\frac{1}{9}n^5y^{-2} + \frac{2}{3}n^3y^{-1}h - nh^2 \\ -\frac{1}{9}n^4y^{-1} - \frac{2}{3}n^2h + 3yh^2 \\ -\frac{5}{27}n^3 - nyh \\ + 3y^2h$$

qui servira à trouver le quatrième terme de la valeur de  $x$ .

Pour trouver ce quatrième terme de la valeur de  $x$ , il faut concevoir  $dy^{-2}$  substituée dans la troisième transformée à la place de  $b$ , & supposer égales à zero les grandeurs  $-\frac{1}{2}n^2 + 3d = 0$ , dans lesquelles  $y$  ne se trouve point, ou bien dans lesquelles l'exposant de  $y$  est zero, & l'on aura  $d = \frac{1}{8}n^2$ . Ainsi le quatrième terme de la valeur de  $x$  est  $+\frac{1}{8}n^2y^{-2}$ , & l'on a déjà  $x = 1y - \frac{1}{2}ny^0 - \frac{1}{2}n^2y^{-1} + \frac{1}{8}n^3y^{-2}$ .

On peut continuer l'approximation à l'infini, en supposant  $+\frac{1}{8}n^3y^{-2} + i = b$ ; & substituant cette valeur de  $b$  à sa place dans la troisième transformée, il en viendra une quatrième transformée, dans laquelle concevant  $ey^{-3}$  substituée à la place de  $i$ , & faisant une équation des grandeurs dans lesquelles  $y$  aura pour exposant  $-1$ , c'est-à-dire, dans lesquelles il y aura  $y^{-1}$ , on déterminera par cette équation le cinquième terme de la valeur de  $x$ , & ainsi à l'infini. Les opérations que l'on a faites suffisent pour faire clairement concevoir la seconde méthode.

## REMARQUES.

## I.

251. ON peut abréger de beaucoup le calcul de cette méthode, 1<sup>o</sup>. en n'écrivant point les équations changées, mais en concevant seulement que le terme de la suite indéterminée qui représente la partie de la valeur de  $x$  que l'on cherche, est substitué à la place de l'inconnue; car on remarquera aisément quelles sont les grandeurs dans lesquelles, après cette substitution conçue, l'inconnue  $y$  ne se trouvera point, ou bien celles où  $y$  se trouvera au moindre degré; & les supposant égales à zero, on aura l'équation propre à trouver la partie de la racine que l'on cherche.

2<sup>o</sup>. On peut même remarquer qu'il n'est pas nécessaire d'écrire le terme indéterminé dans les grandeurs qui étant supposées égales à zero, servent à faire trouver la partie de la racine que ce terme indéterminé représente.

Par exemple, au lieu d'écrire  $a^3 + nna - 2n^2 = 0$ , dans la première résolution, on auroit pu former l'équation particulière qui sert à trouver la première partie de la valeur représentée par  $a$ , en supposant les termes  $x^3 + nnx - 2n^2 = 0$ , sans mettre  $a$  au lieu de  $x$ ; car l'on auroit également

trouvé par cette équation, que la première partie de la valeur de  $x$  que l'on cherche, représentée par  $a$ , est  $n$ , puisqu'il est évident que  $x - n = 0$  est un diviseur exact de  $x^3 + mn^2x - 2n^3 = 0$ , ainsi  $x = n$ , c'est-à-dire,  $n$  est la première partie de la valeur de  $x$ .

3°. Dans chaque transformée il suffit de diviser la grandeur du dernier terme, dans laquelle  $y$  est au moindre degré, par la grandeur du pénultième terme où  $y$  est aussi au moindre degré; car le quotient, après en avoir changé le signe, sera la partie de la valeur de  $x$  que l'on cherche.

Ainsi dans la première transformée de la première résolution, en divisant  $+nny$  par  $+4nn$ , on a pour quotient  $+\frac{1}{4}y$ ; & changeant le signe  $+$ , on aura  $-\frac{1}{4}y$  pour la seconde partie de la valeur de  $x$  que l'on cherche.

De même dans la seconde transformée de la première résolution, en divisant  $-\frac{1}{16}nyy$  par  $+4nn$ , on aura  $-\frac{1}{64n}yy$ ; & changeant le signe, on aura  $+\frac{1}{64n}yy$  pour la troisième partie de la valeur de  $x$  que l'on cherche; & ainsi des autres transformées. La raison de cet abrégé est évidente par l'opération même.

Quand on se sera rendu cette méthode bien familière, on verra qu'on peut négliger dans le calcul beaucoup de grandeurs dans les transformées, ce qu'un peu d'usage apprendra mieux qu'un long discours.

## I I.

252. Ce qu'on a dit dans le troisième article de la Remarque précédente, fait voir que la manière de trouver la seconde partie, la troisième, & toutes les autres parties de la valeur de  $x$  par cette seconde méthode, revient à la quatrième méthode d'approximation du sixième Livre, art. 159. c'est-à-dire, qu'après avoir trouvé la première partie de la valeur de  $x$  qu'on nommera  $a$ , par le premier article de la seconde méthode, pour trouver la seconde partie, qu'on nommera  $b$ , il faut faire la première transformée, en substituant  $a + f = x$  à la place de  $x$  dans la proposée, diviser le premier terme par le coefficient du second terme de cette transformée, & le quotient, après en avoir changé le signe, sera la seconde partie  $b$  de la valeur de  $x$ . (On nomme ici le premier terme de chaque transformée celui où n'est point l'in-

connue  $f$  de la transformée; le second celui où l'inconnue  $f$  est lineaire; & ainsi des autres.) Pour avoir la troisième partie de la valeur de  $x$ , qu'on nommera  $c$ , il faut faire la seconde transformée, en substituant  $b+g=f$  à la place de  $f$  dans la première transformée, diviser le premier terme par le coefficient du second terme de cette seconde transformée, & le quotient, après en avoir changé le signe, sera la troisième partie  $c$  de la valeur de  $x$ . On peut continuer cette approximation à l'infini, comme on l'a expliqué dans la quatrième méthode 159. On peut même rendre chaque partie de la valeur de  $x$  plus approchante, comme on l'a enseigné dans cette quatrième méthode d'approximation.

## I I I.

253. Après avoir trouvé la première partie de la valeur de  $x$  par le premier article de la seconde méthode, on peut aussi trouver la seconde partie, la troisième, & toutes les parties suivantes de la valeur de  $x$ , par la cinquième méthode d'approximation 166. Par exemple, ayant trouvé que la première partie de la valeur de  $x$  dans l'équation  $x^3 + nyx - y^3$

$$+ nnx - zn^3$$

$= 0$ , est  $+n$ , pour trouver les autres parties, il faut partager l'inconnue  $x$  en deux parties  $e$  &  $z$ , & supposant  $e+z=x$ ; il faut substituer cette valeur de  $x$  à sa place dans la proposée, & l'on aura l'équation  $e^3 + 3ez^2 + 3ez^2 + z^3 = 0$ .

$$+ ney + nyz$$

$$+ nne + nnz$$

$$- y^3$$

$$- zn^3$$

Ce sera la transformée indéterminée qui fera trouver, la première partie étant supposée connue, toutes les autres parties de la valeur de  $x$  les unes après les autres:  $e$  représentera toutes les parties déjà découvertes, &  $z$  ce qui reste à en découvrir, & à mesure qu'on découvrira ces parties, pour trouver la suivante, il n'y aura qu'à substituer la somme de toutes les parties déjà découvertes à la place de  $e$ , & après la substitution, diviser le premier terme par le coefficient du second terme; le quotient, après en avoir changé le signe, sera la partie suivante que l'on cherche.

Ainsi pour trouver la seconde partie de la valeur de  $x$ ,  
il



il faut substituer la premiere partie  $n$  connue par le premier article de la seconde methode, à la place de  $e$ , & l'on aura  $+my + 4nnz + 3nzx + z^2 = 0$ ; il faut diviser le premier  $-y^3 + nyx$  terme  $+nny - y^3$  par le coefficient  $+4nn + ny$  du second terme (il suffit de diviser  $+nny$  par  $+4nn$ ) & le quotient  $+\frac{1}{4}y$ , après en avoir changé le signe, sera la seconde partie  $-\frac{1}{4}y$  de la valeur de  $x$  que l'on cherche. Pour trouver la troisième partie de cette valeur de  $x$ , il faut substituer la somme des parties  $+n - \frac{1}{4}y$  déjà découvertes, à la place de  $e$  dans la transformée indéterminée; & après la substitution, on trouvera cette troisième partie comme l'on a trouvé la seconde partie, & ainsi à l'infini.

## L V.

254. S'il arrivoit dans la pratique de cette seconde methode, que le premier terme de quelque transformée, c'est-à-dire, le terme dans lequel l'inconnue de cette transformée ne se trouve point, fût égal à zero, toutes les grandeurs dont ce premier terme est composé se détruisant par des signes contraires, il est évident \* que toutes les parties de la valeur \* 163 de  $x$  déjà découvertes, en seroient la valeur exacte.

## A V E R T I S S E M E N T.

A P R È S avoir enseigné dans l'énoncé de la seconde methode, la maniere de trouver les exposans de  $y$  dans les termes de la suite qui doit être la valeur de  $x$ , pour abréger, dans les exemples suivans, on supposera d'abord la suite indéterminée qui représente la valeur de  $x$ .

## E X E M P L E I I.

255. T R O U V E R la valeur de  $x$  dans l'équation  $xx + yy = rr = 0$ ; c'est l'équation du second exemple de la premiere methode, art. 184. où l'on a changé  $zz$  en  $xx$ , &  $xx$  en  $yy$ .

1°. Il faut supposer  $x = a + byy + cy^4 + dy^6 + ey^8$  &c. les grandeurs  $a, b, c, d$ , &c. sont indéterminées, & elles représentent avec les puissances de  $y$ , les parties de la valeur de  $x$  que l'on cherche, & elles serviront à les faire trouver:  $a$  est

Donc L.

Nnn.

sans  $y$  dans le premier terme, parcequ'il y a  $rr$  dans la proposée, qui est une grandeur toute connue sans  $y$ .

2°. Pour trouver la première partie de  $x$  représentée par  $a$ , il faut concevoir  $a$  substituée au lieu de  $x$  dans la proposée, & supposer  $aa = rr$ , qui sont les grandeurs où  $y$  n'est point, égales à zero; & l'équation  $aa = rr = 0$ , donnera  $a = r$ , ainsi  $r$  est la première partie de la valeur de  $x$  qu'on cherche.

On supposera  $r + f = x$ ,  $f$  est une inconnue; & substituant  $r + f$  dans la proposée, on aura la première transformée

$$\begin{array}{r|l} r + f = x & \begin{array}{l} xx = rr + 2rf + ff \\ + yy = + yy \\ - rr = - rr \end{array} \\ \hline \text{1}^{\text{re}} \text{ trans-} & + yy + 2rf + ff = 0. \\ \text{formée.} & \end{array}$$

3°. Pour trouver la seconde partie de la valeur de  $x$  par cette première transformée, laquelle partie est représentée par  $b$ , il faut concevoir  $+ byy$  à la place de  $f$  dans cette transformée, & faire l'équation  $+ yy + 2rbyy = 0$  des grandeurs  $+ yy + 2rbyy$ , dans lesquelles  $y$  est au même moindre degré, d'où l'on aura  $+ 2rbyy = -1yy$ ; & divisant chaque membre par  $2ryy$ , l'on aura  $b = -\frac{1}{2r}$ , & la seconde partie  $b$  sera  $-\frac{1}{2r}$ . Il faut supposer  $-\frac{1}{2r}yy + g = f$ , & substituant  $-\frac{1}{2r}yy + g$  à la place de  $f$  dans la transformée, on aura la seconde transformée,

$$\begin{array}{r|l} -\frac{1}{2r}yy + g = f & \begin{array}{l} ff = \frac{y^4}{4r^2} - \frac{2y}{r}g + gg \\ + 2rf = -yy + 2rg \\ + yy = + yy \end{array} \\ \hline \text{2}^{\text{e}} \text{ trans-} & \frac{y^4}{4r^2} - \frac{2y}{r}g + gg = 0. \\ \text{formée.} & + 2rg \end{array}$$

4°. Pour trouver la troisième partie représentée par  $c$ , on concevra  $cy^4$  à la place de  $g$  dans cette seconde transformée, & faisant une équation  $+ \frac{y^4}{4r^2} + 2rcy^4 = 0$ , ou bien  $+ 2rcy^4 = -\frac{1}{4r^2}y^4$ , des grandeurs dans lesquelles  $y$  est au même moindre degré, on divisera chaque membre par  $2ry^4$ , & l'on aura  $c = -\frac{1}{8r^2}$ ; par conséquent la troisième partie que l'on cherche est  $cy^4 = -\frac{1}{8r^2}y^4$ .

Il faut supposer  $-\frac{1}{8r}y^4 + b = g$ ,  $b$  est une inconnue, & substituant  $-\frac{1}{8r}y^4 + b$  à la place de  $g$  dans la seconde transformée, on aura la troisième transformée.

$$\begin{array}{r|l}
 -\frac{1}{8r}y^4 + b = g & \begin{array}{l} gg = + \frac{1}{64r^2}y^8 - \frac{1}{4r}y^4b + bb \\ -\frac{1}{r}yyg = + \frac{1}{8r^2}y^6 - \frac{1}{r}yyb \\ + 2rg = -\frac{1}{4r^2}y^4 + 2rb \\ + \frac{1}{4r}y^4 = + \frac{1}{4r}y^4 \end{array} \\
 \hline
 3^e \text{ trans-} & + \frac{1}{64r^2}y^8 - \frac{1}{4r}y^4b + bb = 0 \\
 \text{formée.} & + \frac{1}{8r^2}y^6 - \frac{1}{r}yyb \\
 & + 2rb
 \end{array}$$

5°. Pour trouver la quatrième partie de la valeur de  $x$ , représentée par  $dy^6$ , il faut concevoir  $dy^6$  à la place de  $b$  dans cette troisième transformée, & faire l'équation  $+\frac{1}{8r^2}y^6 + 2r dy^6 = 0$ , des grandeurs où  $y$  est au moindre degré; & divisant chaque membre de  $+\frac{1}{8r^2}y^6 + 2r dy^6 = 0$  par  $2r y^6$ , on aura  $d = -\frac{1}{16r}$ , &  $dy^6 = -\frac{1}{16r}y^6$  est la quatrième partie de la valeur de  $x$  que l'on cherche.

Prenant la somme des parties de la valeur de  $x$  que l'on a trouvées, on aura  $x = r - \frac{1}{1r}yy - \frac{1}{8r}y^4 - \frac{1}{16r}y^6$ , &c. On en peut continuer l'approximation tant qu'on voudra.

## E X E M P L E I I I.

276. **T**R O U V E R la valeur de  $x$  dans l'équation  $0 = xx - a - by - cyy - dy^3 - ey^4$  &c. c'est le troisième exemple de la première méthode, art. 185.

1°. Il faut supposer  $x = p + qy + ryy + sy^3 + ty^4$  &c. les grandeurs  $p, q, r, s, t$ , &c. sont indéterminées; elles représentent, avec les puissances de  $y$ , les parties de la valeur de  $x$  que l'on cherche, & elles serviront à les faire trouver.

2°. Pour trouver la première partie de  $x$  représentée par  $p$ , il faut concevoir  $p$  substituée à la place de  $x$  dans la proposée, & faire une équation des grandeurs  $pp = a$ , dans lesquelles  $y$  ne se trouve point, & l'on aura  $pp = a$ ; par conséquent  $p = a^{\frac{1}{2}}$ .

On supposera  $a^{\frac{1}{2}} + f = x$ , & en substituant  $a^{\frac{1}{2}} + f$  dans l'équation

Non ij.

la place de  $x$  dans la proposée, on aura la première trans-

formée  $a^{\frac{1}{2}} + f = x$

$xx$	$=$	$a + 2a^{\frac{1}{2}}f + ff$
$-a$	$=$	$-a$
$-by$	$=$	$-by$
$-cyy$	$=$	$-cyy$
$\&c.$	$=$	$\&c.$

---

Première transformée.

$-by + 2a^{\frac{1}{2}}f + ff$
$-cyy$
$\&c.$

3°. Pour trouver la seconde partie de la valeur de  $x$ , représentée par  $qy$ , il faut concevoir  $qy$  substituée à la place de  $f$ , & faire une équation  $2a^{\frac{1}{2}}qy = by$  des deux grandeurs dans lesquelles  $y$  est au même moindre degré, & divisant chaque membre par  $2a^{\frac{1}{2}}y$ , on aura  $q = \frac{b}{2a^{\frac{1}{2}}}$ , par conséquent  $qy = \frac{b}{2a^{\frac{1}{2}}}y$  est la seconde partie de la valeur de  $x$ .

Il faut supposer  $\frac{b}{2a^{\frac{1}{2}}}y + g = f$ , & substituant  $\frac{b}{2a^{\frac{1}{2}}}y + g$  à la place de  $f$  dans la première transformée, on aura la seconde transformée,

$\frac{b}{2a^{\frac{1}{2}}}y + g = f$	$ff =$	$= + \frac{bb}{4a}yy + \frac{b}{a^{\frac{1}{2}}}yg + gg$
$+ 2a^{\frac{1}{2}}f$	$= +$	$by + 2a^{\frac{1}{2}}g$
$-by$	$=$	$-by$
$-cyy$	$=$	$-cyy$
$-dy^3$	$=$	$-dy^3$
$\&c.$	$=$	$\&c.$

---

Seconde transformée.

$+ \frac{bb}{4a}yy + \frac{b}{a^{\frac{1}{2}}}yg + gg$
$-by + 2a^{\frac{1}{2}}g$
$-cyy$
$-dy^3$
$\&c.$

4°. Pour trouver la troisième partie de la valeur de  $x$ , représentée par  $ryy$ , il faut concevoir  $ryy$  substituée à la place de  $g$  dans la seconde transformée, & supposer les grandeurs  $+\frac{bb}{4a}yy - cyy + 2a^{\frac{1}{2}}ryy$ , dans lesquelles  $y$  est au même moindre degré, égales à zero, ce qui donnera l'équation  $2a^{\frac{1}{2}}ryy = -\frac{bb}{4a}yy + cyy$ ; & divisant chaque membre par  $2a^{\frac{1}{2}}yy$ , on aura  $r = -\frac{bb}{8a^{\frac{3}{2}}} + \frac{c}{2a^{\frac{1}{2}}}$ ; par conséquent  $ryy = -\frac{bb}{8a^{\frac{3}{2}}}yy + \frac{c}{2a^{\frac{1}{2}}}yy$  est la troisième partie de la valeur de  $x$ .

Pour continuer l'approximation, on supposera  $-\frac{bb}{8a^{\frac{3}{2}}}yy + \frac{c}{2a^{\frac{1}{2}}}yy + b = g$ ; & en substituant  $-\frac{bb}{8a^{\frac{3}{2}}}yy + \frac{c}{2a^{\frac{1}{2}}}yy + b$  à la place de  $g$  dans la seconde transformée, on aura la troisième transformée, &c.

## E X E M P L E I V.

257. **T**ROUVER la valeur de  $x$  dans l'équation  $0 = x^n - ay - byy - cy^3 - dy^4 - ey^5$  &c. c'est le septième exemple de la première méthode, art. 222. On va y appliquer la seconde méthode pour faire voir qu'elle peut s'appliquer à toutes les équations qu'on peut résoudre par la première méthode, cet exemple contenant une difficulté particulière.

1°. Il faut supposer  $x = py + qyy + ry^3 + sy^4 + ty^5$  &c.  $p, q, r, s$ , &c. sont des grandeurs indéterminées, qui représentent avec les puissances de  $y$  dont elles sont les coefficients, les parties de la valeur de  $x$ , & servent à les trouver.

2°. Pour trouver la première partie de la valeur de  $x$ , représentée par  $py$ , il faut concevoir  $py$  substituée à la place de  $x$  dans la proposée, & l'on aura  $p^n y^n - ay - byy$  &c.  $= 0$ .

Afin que l'inconnue  $y$  soit au même degré linéaire dans  $p^n y^n$  & dans  $-ay$ , il faut mettre au lieu de  $p^n y^n$ , la grandeur  $y^{n-1} p^n y$  qui lui est égale, & supposer les deux grandeurs

$y^{n-1}p^n y - ay$ , dans lesquelles  $y$  est au même moindre degré, égales à zero; ce qui donnera l'équation  $y^{n-1}p^n y = ay$ , d'où l'on déduira  $p = a^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{n}-1}$ , & par conséquent  $py = a^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{n}}$  est la première partie de la valeur de  $x$  que l'on cherchoit.

Il faut supposer  $a^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{n}} + f = x$ , & substituer  $a^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{n}} + f$  à la place de  $x$  dans la proposée, & l'on aura la première transformée,

$$\begin{aligned} x^n &= x ay + \frac{n-1}{1} a^{\frac{n-1}{n}} y^{\frac{n-1}{n}} f + \frac{n-1}{1} x^{\frac{n-1}{n}} a^{\frac{n-1}{n}} y^{\frac{n-1}{n}} ff + \frac{n-1}{1} x^{\frac{n-2}{n}} x^{\frac{n-2}{n}} a^{\frac{n-1}{n}} y^{\frac{n-1}{n}} f^2 & \&c. \\ - ay &= - x ay \\ - byy &= - byy \\ - cy^3 &= - cy^3 \\ &\&c. = &c. \end{aligned}$$

$x$  Signifie  
que la gran-  
deur que cette  
marque pré-  
cede, est effa-  
cée.

Plus on prendra de termes de la puissance  $a^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{n}} + f = x^n$ , & plus on trouvera de parties de la valeur de  $x$  que l'on cherche. Les quatre termes qu'on en a pris dans cette transformée, suffisent pour faire concevoir l'application de la seconde méthode à cet exemple.

3°. Pour trouver la seconde partie de la valeur de  $x$ , représentée par  $qyy$ , il faut concevoir  $qyy$  substituée à la place de  $f$  dans la première transformée, & supposer les grandeurs

$$\begin{aligned} &+ \frac{n-1}{1} a^{\frac{n-1}{n}} y^{\frac{n-1}{n}} qyy - byy, \text{ dans lesquelles } y \text{ est au même} \\ &\text{moindre degré, égales à zero; ce qui donnera l'équation} \\ &\frac{n-1}{1} a^{\frac{n-1}{n}} y^{\frac{n-1}{n}} qyy = byy; \text{ \& divisant chaque membre par} \\ &\frac{n-1}{1} a^{\frac{n-1}{n}} y^{\frac{n-1}{n}} xyy, \text{ l'on aura } q = \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} y^{\frac{1-n}{n}} b; \text{ par conséquent} \\ &qyy = \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} y^{\frac{1-n}{n}} byy = \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} by^{\frac{1+n}{n}} \text{ est la seconde partie de} \\ &\text{la valeur de } x \text{ que l'on cherchoit.} \end{aligned}$$

Pour avoir la seconde transformée, il faut remarquer que la seconde partie de la valeur de  $x$  qu'on vient de trouver,

$$\begin{aligned} &\text{peut s'exprimer de ces trois manières } \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} y^{\frac{1-n}{n}} byy = \\ &\frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} by^{\frac{1+n}{n}} = \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} y^{\frac{1}{n}} by. \text{ Cette dernière est la plus com-} \\ &\text{mode pour trouver la seconde transformée. Ainsi on suppo-} \\ &\text{sera } \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} y^{\frac{1}{n}} by + g = f, \text{ \& on substituera cette valeur de } f \end{aligned}$$

à la place de  $f$  dans la première transformée, & l'on trouvera la seconde transformée,

$$\begin{aligned}
 & (+\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} a^{\frac{n-3}{n}} y^{\frac{n-1}{n}} g \\
 & +\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} a^{\frac{n-3}{n}} y^{\frac{n-1}{n}} f = +\frac{1}{n} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} a^{-1} b^3 y^3 + \frac{1}{n} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} a^{-\frac{1}{n}-1} y^{-\frac{1}{n}} b b y^3 g + \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} a^{-\frac{2}{n}} y^{-\frac{2}{n}} b y y g g \\
 & +\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} a^{\frac{n-2}{n}} y^{\frac{n-1}{n}} f f = +\frac{1}{n} \times \frac{n-1}{2} a^{-1} b b y^3 + \frac{n-1}{2} a^{-\frac{1}{n}} y^{-\frac{1}{n}} b y y g + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} a^{\frac{n-2}{n}} y^{\frac{n-1}{n}} g g \\
 & +\frac{n}{1} a^{\frac{n-1}{n}} y^{\frac{n-1}{n}} f = +2 b y y + \frac{n}{1} a^{\frac{n-1}{n}} y^{\frac{n-1}{n}} g \\
 & - b y y = -2 b y y \\
 & - c y^3 = -c y^3 \\
 & - d y^4 = -d y^4 \\
 & \&c. = \&c.
 \end{aligned}$$

\* Signifie que la grandeur que cette marque précède, est effacée.

4°. Pour trouver la troisième partie de la valeur de  $x$ , représentée par  $ry^3$ , il faut concevoir  $ry^3$  substituée à la place de  $g$  dans la seconde transformée, & supposer égales à zero

les grandeurs  $+\frac{1}{n} \times \frac{n-1}{2} a^{-1} b b y^3 + \frac{n}{1} a^{\frac{n-1}{n}} y^{\frac{n-1}{n}} ry^3 - cy^3$ , dans lesquelles  $y$  est au même moindre degré; ce qui donnera l'équation  $\frac{n}{1} a^{\frac{n-1}{n}} y^{\frac{n-1}{n}} ry^3 = -\frac{1}{n} \times \frac{n-1}{2} a^{-1} b b y^3 + cy^3$ ; & divisant chaque membre par  $\frac{n}{1} a^{\frac{n-1}{n}} y^{\frac{n-1}{n}} \times y^3$ , on trouvera  $r = -\frac{1}{n} \times \frac{n-1}{2} a^{\frac{1-2n}{n}} b b y^{\frac{1-n}{n}} + \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} cy^{\frac{1-n}{n}}$ ; par conséquent  $ry^3 = -\frac{1}{n} \times \frac{n-1}{2} a^{\frac{1-2n}{n}} b b y^{\frac{1-n}{n}} + \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} cy^{\frac{1-n}{n}} = -\frac{1}{n} \times \frac{n-1}{2} a^{\frac{1-2n}{n}} y^{\frac{1}{n}} b y y + \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} y^{\frac{1}{n}} c y y$ , est la troisième partie de la valeur de  $x$  que l'on cherchoit.

Pour avoir la troisième transformée, il faut supposer  $-\frac{1}{n} \times \frac{n-1}{2} a^{\frac{1-2n}{n}} y^{\frac{1}{n}} b y y + \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} y^{\frac{1}{n}} c y y + h = g$ , & substituer cette valeur de  $g$  à la place de  $g$  dans la seconde transformée, & l'on trouvera la troisième transformée.

Mais comme il n'y a plus d'autre difficulté dans le reste de l'opération, que celle qui vient de la peine du calcul, il est inutile de la continuer ici, les opérations précédentes suffisant pour faire concevoir l'application de la seconde méthode à cet exemple.

*Remarques où l'on donne la démonstration de la 2<sup>e</sup> méthode.*

258. ON peut appliquer cette seconde méthode à tous les exemples de la première; & après s'être rendu l'une & l'autre

bien familières, on verra clairement qu'elles reviennent l'une à l'autre; ainsi la première étant démontrée, la seconde est aussi démontrée.

\* 252. On a aussi vu dans la seconde & troisième remarque, \* que  
253. cette seconde méthode, la quatrième méthode d'approximation art. 159, & la cinquième méthode d'approximation art. 166, reviennent à une même méthode; ainsi la démonstration de ces deux dernières démontre aussi la seconde méthode.

Enfin les parties ou les termes de la valeur de  $x$  que l'on trouve par cette seconde méthode, deviennent des fractions qui vont toujours en diminuant à mesure qu'on continue l'approximation de la valeur de  $x$ ; d'où l'on voit qu'après des approximations infinies, le dernier terme ou le terme infinitième, pour ainsi parler, doit être zéro, comme dans une progression géométrique qui va en diminuant, on regarde le dernier terme comme devenant zéro. L'on conçoit donc qu'après des approximations infinies l'on arriveroit à la racine véritable que l'on cherche; par conséquent plus on continuera l'approximation, & plus on approchera de cette véritable valeur de  $x$ .

La même méthode peut s'appliquer aux équations qui ont plus de deux inconnues.

#### A V E R T I S S E M E N T.

COMME l'on pourroit trouver de la difficulté à résoudre par cette seconde méthode les équations qui contiennent des différences, on va faire l'application de cette seconde méthode à ces équations, & l'on verra qu'elle peut leur être appliquée avec la même facilité que la première méthode.

#### E X E M P L E V.

259. TROUVER la valeur approchée de  $x$  dans l'équation différentielle  $1 - \frac{dx^2}{dy^2} + \frac{y^2 dx^2}{dy^2} = 0$ ; c'est l'onzième exemple de la première méthode art. 229.

1°. Il faut supposer  $x = ay + by^2 + cy^3 + ey^4$  &c. les grandeurs  $a, b, c, e$ , &c. sont indéterminées, & elles représentent avec les puissances de  $y$ , les parties de la valeur de  $x$  que l'on cherche, & elles serviront à les trouver.

2°. Pour trouver la première partie de la valeur de  $x$ , représentée



représentée par  $ay$ , il faut concevoir  $ay$  substituée à la place de  $x$  dans la proposée de cette manière ; il faut supposer  $x = ay$  ; en prenant les différences de chaque membre on aura  $dx = a dy$ , &  $\frac{dx}{dy} = a$ , &  $\frac{dx^2}{dy^2} = aa$ .

Il faut concevoir  $aa$  substituée à la place de  $\frac{dx^2}{dy^2}$ , les deux grandeurs où  $y$  ne se trouve point sont  $1 - aa$ , il faut les supposer égales à zero, & l'on aura l'équation  $aa = 1$  ; par conséquent  $a = 1$  ; ainsi  $ay = y$  est la première partie de la valeur de  $x$  que l'on cherchoit.

Pour avoir la première transformée, il faut supposer  $1y + f = x$ ,  $f$  est une inconnue ou variable ; en prenant les différences de chaque membre, on aura  $rdy + df = dx$  ; & divisant par  $dy$ , on aura  $1 + \frac{df}{dy} = \frac{dx}{dy}$  ; & quarrant chaque membre, on aura  $1 + \frac{2df}{dy} + \frac{df^2}{dy^2} = \frac{dx^2}{dy^2}$ . Il faut substituer dans la proposée  $1 - \frac{dx^2}{dy^2} + \frac{2y dx^2}{dy^2} = 0$ , les valeurs de  $\frac{dx^2}{dy^2}$  à la place de  $\frac{dx^2}{dy^2}$ , on aura la première transformée,

$$\begin{aligned} + \frac{yy dx^2}{dy^2} &= 1yy + \frac{2yy df}{dy} + \frac{yy df^2}{dy^2} \\ - \frac{dx^2}{dy^2} &= - 1 - \frac{2 df}{dy} - \frac{df^2}{dy^2} \\ + 1 &= + 1 \end{aligned}$$

3°. Pour trouver la seconde partie de la valeur de  $x$ , représentée par  $by^3$ , il faut concevoir  $by^3$  substituée à la place de  $f$  dans la première transformée.

Pour faire cette substitution, on supposera  $by^3 = f$  ; prenant les différences de chaque membre, on aura  $3byy dy = df$ , &  $3byy = \frac{df}{dy}$  ; & quarrant chaque membre, on aura  $9bby^4 = \frac{df^2}{dy^2}$ .

Concevant à présent  $3byy$  substituée à la place de  $\frac{df}{dy}$  dans la première transformée, &  $9bby^4$  à la place de  $\frac{df^2}{dy^2}$ , les grandeurs dans lesquelles  $y$  est au même moindre degré, sont  $+ 1yy - 2 \times 3byy$  ; il faut les supposer égales à zero, & l'on aura l'équation  $6byy = 1yy$  ; divisant chaque membre par  $6yy$ , on aura  $b = \frac{1}{6}$  ; par conséquent  $by^3 = \frac{1}{6}y^3$  est la seconde partie de la valeur de  $x$  que l'on cherchoit.

Pour avoir la seconde transformée, il faut supposer  $\frac{1}{6}y^3 + g = f$ ,  $g$  est une inconnue ; en prenant les différences de chaque membre on aura  $\frac{1}{2}yy dy + dg = df$ , & divisant

par  $dy$ ,  $\frac{1}{2}yy + \frac{dy}{2} = \frac{df}{2}$ ; quarrant chaque membre, on aura  $\frac{1}{4}y^2 + \frac{yy}{2} \frac{dy}{dy} = \frac{df}{2}$ . Il faut à present substituer les valeurs de  $\frac{df}{2}$  & de  $\frac{dy}{2}$  dans la premiere transformée, & l'on aura la seconde transformée,

$$+ \frac{yydf}{dy^2} = + \frac{1}{4}y^2 + \frac{y'dg}{dy} + \frac{yydg}{dy^2}$$

$$- \frac{df}{dy^2} = - \frac{1}{4}y^2 - \frac{yydg}{dy} - \frac{dg}{dy^2}$$

$$+ \frac{2yydf}{dy} = + y^2 + \frac{2yydg}{dy}$$

$$- \frac{2df}{dy} = - 2yy - \frac{2dg}{dy}$$

$$+ yy = + 2yy$$

2 Signifie  
que la gran-  
deur que cette  
marque pré-  
cede est effa-  
cée.

4°. Pour avoir la troisieme partie de la racine représentée par  $cy^2$ , il faut concevoir  $cy^2$  substituée à la place de  $g$  dans la seconde transformée: mais pour faire cette substitution, il faut supposer  $cy^2 = g$ ; par consequent  $scy^2 dy = dy$ , &  $scy^2 = \frac{dy}{2}$ , &  $2scy^2 = \frac{dy}{2}$ .

Il faut à present concevoir  $scy^2$  substituée à la place de  $\frac{df}{2}$  dans la seconde transformée, & si l'on veut  $2scy^2$  à la place de  $\frac{df}{2}$ , &  $+y^2 - \frac{1}{4}y^2 - 10cy^2$ , ou bien  $\frac{1}{4}y^2 - 10cy^2$ , seront les grandeurs dans lesquelles  $y$  est au même moindre degré; il faut les supposer égales à zero, ce qui donnera l'équation  $10cy^2 = \frac{1}{4}y^2$ , divisant chaque membre par  $10y^2$ , on aura  $c = \frac{1}{40}$ ; par consequent  $cy^2 = \frac{1}{40}y^2$  est la troisieme partie de la valeur de  $x$  que l'on cherche; l'on a donc déjà  $x = 1y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{40}y^3$  &c. & l'on peut continuer l'approximation tant qu'on voudra; il n'y a plus de difficulté dans le reste de l'operation que celle qui vient de la peine du calcul.

On résoudra de la même maniere toutes les équations différentielles.

#### EXEMPLE VI.

260. **P**OUR trouver la valeur de  $x$  dans l'équation différentielle  $xxdy^2 - yydydx - nady^2 + nydy^2 = 0$ , il faut d'abord diviser chaque terme par  $dy^2$ , & l'on aura l'équation préparée  $xx - \frac{yydx}{dy} - n + ny = 0$ , dans laquelle la différence  $dy$  est dans le dénominateur. Après cette préparation,

1°. Il faut supposer  $x = a + by + cyy + cy^3$  &c.  $a, b, c, e$ , &c. sont indéterminées, & représentent avec les puissances de  $y$ , les parties de la valeur de  $x$ , & elles servent à les trouver.

20. Pour trouver la premiere partie représentée par  $a$ , il faut concevoir  $a$  substituée à la place de  $x$  dans la proposée, & supposer  $aa - nn = 0$ , d'où l'on aura  $a = n$ ; ainsi  $n$  est la premiere partie de la valeur de  $x$ .

Pour avoir la premiere transformée, il faut supposer  $n + f = x$ , d'où l'on déduira  $df = dx$ ; & substituant les valeurs de  $x$  & de  $dx$  dans la proposée, on aura la premiere transformée.

Premiere transformée.

30. Pour trouver la seconde partie de la valeur de  $x$ , représentée par  $by$ , il faut concevoir  $by$  substituée à la place de  $f$ , & supposer ensuite  $2nby - ny = 0$ , d'où l'on déduira

$$\begin{aligned} xx &= + 2 nn + 2nf + ff \\ - nn &= - 2 nn \\ + ny &= + ny \\ - \frac{22dx}{dy} &= - \frac{22df}{dy} \end{aligned}$$

2 Signifie que la grandeur que cette marque précède est effacée.

$b = -\frac{1}{2}$ , &  $by = -\frac{1}{2}y$  sera la seconde partie de la valeur de  $x$  que l'on cherche.

Pour avoir la seconde transformée, il faut supposer  $-\frac{1}{2}y + g = f$ , d'où l'on déduira  $-\frac{1}{2}dy + dg = df$ , &  $-\frac{1}{2} + \frac{dg}{df} = \frac{df}{dy}$ . Il faut ensuite substituer les valeurs de  $f$  & de  $\frac{df}{dy}$  à la place de ces grandeurs dans la premiere transformée, & l'on aura la seconde transformée.

Seconde transformée.

40. Pour trouver la troisième partie de la valeur de  $x$ , représentée par  $cyy$ , il faut concevoir  $cyy$  substituée à la place de  $g$  dans la seconde transformée, & supposer  $2ncyy$

$$\begin{aligned} + ff &= + \frac{1}{4}yy - yg + gg \\ + 2nf &= - 2 ny + 2ng \\ + ny &= + 2 ny \\ - \frac{22df}{dy} &= + \frac{1}{2}yy - \frac{22dg}{dy} \end{aligned}$$

$+ \frac{1}{4}yy + \frac{1}{2}yy = 0$ , d'où l'on déduira  $c = -\frac{3}{8}$ , &  $cyy = -\frac{3}{8}yy$  sera la 3<sup>e</sup> partie de la valeur de  $x$  que l'on cherche.

Pour avoir la troisième transformée, il faut supposer  $-\frac{3}{8}yy + h = g$ , d'où l'on déduira  $-\frac{3}{4}ydy + dh = dg$ , &  $-\frac{3}{4}y + \frac{dh}{dg} = \frac{dg}{dy}$ ; il faut substituer dans la seconde transformée les valeurs de  $g$  & de  $\frac{dg}{dy}$ , & l'on aura la troisième transformée.

Troisième transformée.

50. Pour trouver la 4<sup>e</sup> partie de la valeur de  $x$ , représentée par  $ey^3$ , il faut concevoir  $ey^3$  substituée à la place de  $h$ , & supposer  $+ 2ney^3 + \frac{3}{8}y^3 + \frac{1}{4}y^3$

$$\begin{aligned} + gg &= + \frac{9}{64}y^4 - \frac{3}{4}yyh + hh \\ - yg &= + \frac{3}{8}y^3 - yh \\ + 2ng &= - 2 \frac{3}{4}yy + 2nh \\ + \frac{1}{4}yy &= + 2 \frac{1}{4}yy \\ - \frac{22dg}{dy} &= + \frac{1}{4}y^3 - \frac{22gh}{dy} \end{aligned}$$

O o o ij

$= 0$ , d'où l'on déduira  $e = -\frac{9}{16nn}$ , &  $cy^3 = -\frac{7}{16nn}y^3$  fera la 4<sup>e</sup> partie de la valeur de  $x$ .

On a donc  $x = n - \frac{1}{2}y - \frac{3}{8}yy - \frac{9}{16nn}y^3$ , &c.

On peut continuer l'approximation autant qu'on voudra.

*Seconde maniere de résoudre le sixième exemple.*

261. **S**I  $n$  est moindre que  $y$  dans l'équation  $xx - \frac{22dx}{25} - nn + ny = 0$ , il faut que les exposans des  $y$  qui doivent distinguer les termes de la valeur de  $x$ , deviennent négatifs; c'est-à-dire, que les  $y$  se trouvent dans les dénominateurs des termes de la valeur de  $x$ , afin que ces termes aillent en diminuant de valeur. Voici la maniere de le faire par la seconde méthode.

Il faut supposer que la valeur indéterminée de  $x$  est  $x = ay + by^0 + cy^{-1} + ey^{-2} + fy^{-3} + \&c.$   $a, b, c, \&c.$  sont des indéterminées. Pour en trouver les valeurs, 1<sup>o</sup>. il faut concevoir le premier terme indéterminé  $+ ay$  substitué à la place de  $x$  dans la proposée, & la différence de  $ay$ , qui est  $ady$ , substituée à la place de  $dx$ ; & faire une équation des grandeurs  $aa y^2 - ay^2 = 0$ , dans lesquelles  $y$  est au degré le plus élevé; l'on en déduira  $a = 1$ , ainsi le premier terme de la valeur de  $x$  est  $1y$ , & l'on a déjà  $x = 1y$ .

Il faut pour faire la première transformée, supposer  $y + f = x$ , d'où l'on déduira  $dy + df = dx$ , &  $1 + \frac{df}{dy} = \frac{dx}{dy}$ , & substituer dans la proposée ces valeurs de  $x$  & de  $\frac{dx}{dy}$  à leur place, & l'on aura la première transformée  $+ ny - \frac{22df}{25} - nn + 2yf + ff = 0$ .

Pour trouver le second terme de la valeur de  $x$ , représenté par  $by^0$ , il faut concevoir  $by^0$  substituée à la place de  $f$  dans la première transformée, & la différence de  $by^0$ , qui est zero, à la place de  $dx$ ; & faire une équation des grandeurs  $+ ny + 2by = 0$ , dans lesquelles  $y$  est au même degré le plus élevé; on trouvera par cette équation  $b = -\frac{1}{2}n$ ; ainsi le second terme de la valeur de  $x$  est  $-\frac{1}{2}ny^0$ .

Pour faire la seconde transformée, il faut supposer  $-\frac{1}{2}ny^0 + g = f$ , d'où l'on déduira  $+ dg = df$ ; & substituer les valeurs de  $f$  & de  $df$  à leur place dans la première transformée, & l'on aura la seconde transformée  $-\frac{1}{4}nn - \frac{22dg}{25} + 2yg + gg = 0$ .

Pour trouver le troisième terme de la valeur de  $x$ , représenté par  $cy^{-1}$ , il faut concevoir  $+cy^{-1}$  substitué à la place de  $g$  dans la seconde transformée, & la différence de  $+cy^{-1}$ , qui est  $-cy^{-2}dy$ , substituée à la place de  $dg$ ; & faire une équation des grandeurs  $-\frac{1}{4}nn + 3c = 0$ , dans lesquelles  $y$  ne se trouve point, & l'on en déduira  $c = +\frac{1}{4}nn$ ; ainsi le troisième terme de la valeur de  $x$  est  $+\frac{1}{4}nny^{-1}$ .

Pour faire la troisième transformée, il faut supposer  $+\frac{1}{4}nny^{-1} + b = g$ , d'où l'on déduira  $-\frac{1}{4}nny^{-2} + \frac{dh}{dy} = \frac{dh}{dy}$ ; & substituer ces valeurs de  $g$  & de  $\frac{dh}{dy}$  à leur place dans la seconde transformée, & l'on trouvera la troisième transformée  $-\frac{1}{4}n^3y^{-1} - \frac{32dh}{dx} + 2yb + bb = 0$ .

$$\begin{array}{rcl}
 +\frac{1}{16}n^4y^{-2} & - & nh \\
 & & +\frac{1}{2}nny^{-1}b
 \end{array}$$

Pour trouver le quatrième terme de la valeur de  $x$ , représenté par  $+cy^{-2}$ , il faut concevoir  $+cy^{-2}$  substitué dans la troisième transformée à la place de  $b$ , & la différence de  $+cy^{-2}$ , qui est  $-2cy^{-3}$ , substituée à la place de  $db$ , & faire une équation des grandeurs  $-\frac{1}{4}n^3y^{-1} + 4cy^{-1} = 0$ , dans lesquelles  $y$  est au même moindre degré négatif; & l'on en déduira  $c = +\frac{1}{16}n^3y^{-2}$ ; ainsi le quatrième terme de la valeur de  $x$  est  $+\frac{1}{16}n^3y^{-2}$ , & l'on a déjà  $x = +y - \frac{1}{2}ny + \frac{1}{4}n^2y^{-1} + \frac{1}{16}n^3y^{-2}$ . On peut continuer l'approximation par cette seconde méthode tant qu'on voudra, & les opérations qu'on vient de faire suffisent pour faire clairement concevoir la manière d'appliquer la seconde méthode aux équations qui contiennent des différences, quand les exposans des  $y$  dans la suite qui est la valeur de  $x$ , doivent être positifs, & quand ils doivent être négatifs.

On peut facilement appliquer la même méthode aux équations qui contiendront des secondes différences, des troisièmes différences, &c.

*Remarques pour les équations différentielles.*  
I.

262. LA seconde méthode fait trouver, pour les équations différentielles la suite des exposans des  $y$  qui doivent distinguer les termes de la valeur de  $x$ , avec la même facilité & la même certitude qu'elle les fait découvrir pour les équations qui

n'ont point de différences; & voici ce qu'on doit considérer pour les avoir. 1°. Les exposans des  $y$  dans la valeur de  $x$  doivent être en progression arithmétique, & aller en augmentant quand ils sont tous positifs, & en augmentant, pour ainsi dire, en négation, quand ils sont tous négatifs; & commencer par diminuer quand ils commencent par être positifs, & augmenter ensuite en négation, dès qu'ils deviennent négatifs. 2°. Le premier & le second  $y$ , & même tous les suivans, la méthode étant uniforme, doivent être pris tels que les quantitez où l'inconnue  $x$  ne se trouve point, viennent à être détruites par d'autres semblables qui ayent des signes contraires dans la suite de l'opération, & qu'elles servent à former les équations qui doivent déterminer les termes de la valeur de  $x$  les uns après les autres, de manière qu'il ne reste pas de ces quantitez qui soient inutiles à la résolution. 3°. Il faut avoir égard à la propriété particulière des différences, qui est que la différence d'une quantité constante est zero; ainsi étant substituée, elle rend égale à zero la quantité où elle est substituée; que la différence d'un produit qui contient une puissance de  $y$ , divisée par  $dy$ , est ce produit même où l'exposant de  $y$  est diminué d'une unité s'il est positif, & augmenté d'une unité s'il est négatif; d'où il suit que la différence de  $ay$ , divisée par  $dy$ , est la seule constante  $a$  sans  $y$ .

## I I.

Après ces considérations on n'aura aucune difficulté à trouver les exposans des  $y$  dans la valeur de  $x$ ; par exemple si les exposans des  $y$  doivent être positifs, qu'il y ait une quantité toute connue sans  $y$  dans une équation proposée, & que la quantité où est  $\frac{dx}{dy}$ , n'ait que des constantes, le premier terme de la valeur de  $x$  doit avoir  $y$ , & il le faut supposer représenté par  $ay$ , car la différence de  $ay$  divisée par  $dy$  étant  $a$ , on pourra faire une équation de  $a$  & de la quantité de la proposée qui est sans  $y$ , laquelle servira à déterminer  $a$ . Mais si les mêmes choses étant supposées, l'inconnue  $y$  se trouve dans la quantité où est  $\frac{dx}{dy}$ , comme dans le sixième exemple, où l'on a  $\frac{xy^2}{dy}$ , il faut que le premier terme de  $x$  soit représenté par la seule constante  $a$  sans  $y$ .

Dans le même cas des exposans positifs de  $y$  dans la valeur

de  $x$ , pour avoir l'exposant de  $y$  dans le second terme de la valeur indéterminée de  $x$ , dont le coefficient est représenté par  $b$ , il faut le supposer tel cet exposant de  $y$  dans  $by$ , qu'en substituant  $by$  à la place de l'inconnue  $f$  dans la première transformée, on puisse avoir au moins deux quantitez dans lesquelles  $y$  soit au même moindre degré. On trouvera de même les exposans des  $y$  dans les termes suivans: mais comme ils sont en progression arithmétique, dont on a les deux premiers termes, on les a tous sans les chercher.

Ces remarques suffisent à ceux qui se sont rendu la seconde méthode familière, pour trouver les exposans des  $y$  dans la valeur de  $x$ , dans tous les cas qui peuvent se présenter.

Quand en suivant les règles qu'on a prescrites, on ne peut pas trouver de valeur de  $x$ , c'est une marque que l'équation ne peut pas être résolue, du moins sans préparation.

EXEMPLE VII. dans lequel il y a trois inconnues.

263. **P**OUR trouver par la seconde méthode la valeur de  $x$  dans l'équation  $\frac{dx}{dy} - x - n = 0$ , où  $\frac{dx}{dy} = 1 + x^{-1}y$ ; il faut supposer que la valeur indéterminée de  $x$  est  $x = ax^{-1}y + bx^{-2}y^2 + cx^{-3}y^3 + ex^{-4}y^4 + \&c.$   $a, b, c, \&c.$  sont indéterminées.

Pour avoir le premier terme de cette valeur représenté par  $ax^{-1}y$ , il faut substituer dans la proposée  $ax^{-1}y$ , à la place de  $x$ , & la différence de  $ax^{-1}y$  divisée par  $dy$ , (qui est  $+ ax^{-1}$

$- \frac{ax^{-2}ydz}{dy}$ , & qui, en substituant au lieu de  $\frac{dz}{dy}$  sa valeur

$1 + x^{-1}y$ , devient  $+ ax^{-1} - ax^{-2}y - ax^{-1}y^2$ ,) à la place de  $\frac{dx}{dy}$ ; & faire une équation des grandeurs  $+ a - n = 0$ ,

dans lesquelles, après la substitution,  $y$  ne se trouve point; & l'on déduira de cette équation  $a = +n$ ; ainsi le premier terme de la valeur de  $x$  est  $+ nx^{-1}y$ , & l'on a déjà  $x = + nx^{-1}y$ . Pour avoir la première transformée, il faut supposer  $+ nx^{-1}y + f = x$ ; & prenant les différences, & divi-

sant par  $dy$ , on aura  $+ nx^{-1} - \frac{nx^{-2}ydz}{dy} + \frac{df}{dy} = \frac{dx}{dy}$ , où

mettant au lieu de  $\frac{dz}{dy}$  sa valeur  $1 + x^{-1}y$ , l'on aura  $\frac{dx}{dy} =$

$+ nx^{-1} - nx^{-2}y - nx^{-1}y^2 + \frac{df}{dy}$ ; il faut substituer dans la

proposée les valeurs de  $x$  & de  $\frac{dx}{dy}$ , & l'on aura la première transformée —  $2n\zeta^{-1}y + \frac{2df}{dy} + f = 0$ .  
—  $n\zeta^{-2}y^2$

Pour trouver le second terme de la valeur de  $x$ , représenté par  $+b\zeta^{-2}y^2$ , il faut substituer  $+b\zeta^{-2}y^2$  dans la première transformée, à la place de  $f$ , & la différence de  $b\zeta^{-2}y^2$  divisée par  $dy$ , (qui est  $2b\zeta^{-2}y - \frac{2b\zeta^{-3}y^2 d\zeta}{dy}$ , & qui, en substituant la valeur de  $\frac{d\zeta}{dy}$ , devient  $+2b\zeta^{-2}y - 2b\zeta^{-3}y^2 - 2b\zeta^{-4}y^3$ ,) à la place de  $\frac{df}{dy}$ ; & faire une équation des grandeurs —  $2n\zeta^{-1}y + 2b\zeta^{-1}y = 0$ , dans lesquelles  $y$  est au même moindre degré, & l'on en déduira  $b = +n$ ; ainsi le second terme de la valeur de  $x$  est  $+n\zeta^{-2}y^2$ , & l'on a déjà  $x = +n\zeta^{-1}y + n\zeta^{-2}y^2$ .

Pour avoir la seconde transformée, il faut supposer  $+n\zeta^{-2}y^2 + g = f$ ; on en prendra la différence, qu'on divisera par  $dy$ , & l'on aura  $2n\zeta^{-2}y - \frac{2n\zeta^{-3}y^2 d\zeta}{dy} + \frac{dg}{dy} = \frac{df}{dy}$ ; & en y mettant la valeur de  $\frac{d\zeta}{dy}$ , on aura  $2n\zeta^{-2}y - 2n\zeta^{-3}y^2 - 2n\zeta^{-4}y^3 + \frac{dg}{dy} = \frac{df}{dy}$ ; il faut substituer ces valeurs de  $f$  & de  $\frac{df}{dy}$  dans la première transformée, & l'on trouvera la seconde transformée —  $4n\zeta^{-2}y^2 + \frac{2dg}{dy} + g = 0$ .  
—  $2n\zeta^{-3}y^3$

Pour trouver le troisième terme de la valeur de  $x$ , représenté par  $+c\zeta^{-3}y^3$ , il faut substituer dans la seconde transformée  $+c\zeta^{-3}y^3$  au lieu de  $g$ , & la différence de  $c\zeta^{-3}y^3$  divisée par  $dy$ , (qui est  $+3c\zeta^{-3}y^2 - \frac{3c\zeta^{-4}y^3 d\zeta}{dy}$ , & qui, en y mettant la valeur de  $\frac{d\zeta}{dy}$ , devient  $+3c\zeta^{-3}y^2 - 3c\zeta^{-4}y^3 - 3c\zeta^{-5}y^4$ ,) à la place de  $\frac{dg}{dy}$ ; & faire une équation des grandeurs —  $4n\zeta^{-2}y^2 + 3c\zeta^{-2}y^2 = 0$ , dans lesquelles  $y$  est au même moindre degré; & l'on en déduira  $c = \frac{4}{3}n$ ; ainsi le troisième terme de la valeur de  $x$  est  $+\frac{4}{3}n\zeta^{-3}y^3$ .

Pour avoir la troisième transformée, il faut supposer  $+\frac{4}{3}n\zeta^{-3}y^3 + b = g$ ; on en déduira, en prenant les différences



rences & divisant par  $dy$ ,  $+ 4nx^{-3}y^2 - \frac{4nx^{-4}y^3 dx}{dy} + \frac{dz}{dy}$   
 $= \frac{dg}{dy}$ ; & mettant au lieu de  $\frac{dz}{dy}$  la valeur  $1 + x^{-1}y$ , l'on  
aura  $\frac{dg}{dy} = + 4nx^{-3}y^2 - 4nx^{-4}y^3 - 4nx^{-3}y^4 + \frac{dh}{dy}$ . Il faut  
substituer dans la 2<sup>e</sup> transformée les valeurs de  $g$  & de  $\frac{dg}{dy}$ ,  
& l'on trouvera la 3<sup>e</sup> transformée  $-\frac{22}{3}nx^{-3}y^3 + \frac{2dh}{dy} + b = 0$ .  
 $- 4nx^{-4}y^4$

On trouvera le 4<sup>e</sup> terme de la valeur de  $x$ , représenté  
par  $ex^{-4}y^4$ , en substituant dans cette 3<sup>e</sup> transformée  $+ ex^{-4}y^4$   
à la place de  $b$ , & la différence de  $+ ex^{-4}y^4$ , divisée par  $dy$ ,  
( qui est  $+ 4ex^{-4}y^3 - \frac{4ex^{-5}y^4 dx}{dy}$ , & qui, en mettant la  
valeur de  $\frac{dx}{dy}$ , devient  $+ 4ex^{-4}y^3 - 4ex^{-5}y^4 - 4ex^{-6}y^5$ , )  
à la place de  $\frac{dh}{dy}$ ; & en faisant une équation des grandeurs  
 $-\frac{22}{3}nx^{-3}y^3 + 4ex^{-4}y^3 = 0$ , dans lesquelles  $y$  est au même  
moindre degré, on en déduira  $e = + \frac{22}{11}n = + \frac{11}{2}n$ ; ainsi  
le 4<sup>e</sup> terme de la valeur de  $x$  est  $+ \frac{11}{2}nx^{-4}y^4$ , & l'on a déjà  
 $x = nx^{-1}y + nx^{-2}y^2 + \frac{4}{3}nx^{-3}y^3 + \frac{11}{2}nx^{-4}y^4$ .

On peut continuer l'approximation de la valeur de  $x$  tant  
qu'on voudra; les opérations qu'on vient de faire suffisent  
pour faire clairement concevoir la manière d'y appliquer la  
seconde méthode.

## SECTION VI.

*Application des méthodes du second Problème aux équations déterminées, c'est-à-dire aux équations qui n'ont qu'une seule inconnue.*

### AVERTISSEMENT.

**L**ES méthodes du second Problème peuvent s'appliquer aux équations qui n'ont qu'une seule inconnue, en prenant une des lettres connues de l'équation pour tenir lieu de la seconde inconnue  $y$ ; & quand les lettres connues de la proposée n'ont pas les dispositions qu'il faut pour ces méthodes, il faut la leur donner, & préparer l'équation comme on le verra dans le second exemple.

## EXEMPLE I.

264. **T**ROUVER la valeur approchée de  $x$  dans l'équation  $x^3 + np^3 - p^3 = 0$ , & continuer l'approximation à l'infini.

On prendra la lettre connue  $p$  pour tenir lieu de la seconde inconnue  $y$ , & ensuite on trouvera la valeur approchée de  $x$  par laquelle on voudra des deux méthodes du second Problème.

## PREMIERE METHODE.

1°. **O**N supposera  $x = a + bp + cpp + dp^3 + ep^4$  &c.  $a, b, c, d$ , &c. sont des grandeurs indéterminées.

On prendra les valeurs de  $x$  par le moyen de cette équation indéterminée, on les substituera dans la proposée à la place de  $x$ , & on aura l'équation changée suivante,

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{aligned} x^3 &= +a^3 + 3aabp + 3abbpp + b^3p^3 \text{ &c.} \\ &+ 3aacpp + 6abcp^3 \\ &+ 3aadp^3 \\ 0 &= +np^3 = +nap + nbpp + nc p^3 \text{ &c.} \\ &+ nnx = +nna + nnbp + nncpp + nndp^3 \text{ &c.} \\ &- p^3 = - p^3 \\ &- 2n^3 = - 2n^3 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

2°. On supposera chaque terme de cette équation changée égal à zéro, ce qui donnera les équations particulières dont on a besoin pour trouver les valeurs des indéterminées  $a, b, c$ , &c.

3°. Par la première de ces équations  $a^3 + nna - 2n^3 = 0$ , on trouvera  $a = n$ , car  $a - n = 0$ , est un diviseur exact de cette équation.

En substituant  $n$  à la place de  $a$  dans la seconde  $3aab + nnb = -na$ , on trouvera  $b = -\frac{1}{4}$ , &  $bp = -\frac{1}{4}p$ .

En substituant les valeurs de  $a$  & de  $b$  dans la troisième  $3aac + nnc = -3abb - nb$ , on trouvera  $c = +\frac{1}{64n}$ .

En substituant les valeurs de  $a, b, c$ , dans la quatrième  $3aad + nnd = -b^3 - 6abc - nc + 1$ , on trouvera  $d = +\frac{111}{128n^2}$ .

4°. On substituera les valeurs de  $a, b, c, d$ , &c. dans  $x = a + bp + cpp + dp^3$  &c. & l'on aura  $x = n - \frac{1}{4}p + \frac{1}{64n}pp + \frac{111}{128n^2}p^3$  &c. On peut continuer l'approximation autant qu'on voudra.

## SECONDE METHODE.

POUR trouver par la seconde methode la valeur approchée de  $x$  dans l'équation  $x^3 + np^2x - p^3 = 0$ ,

$$+ nnx - 2n^3$$

1°. On supposera  $x = a + bp + cpp + dp^3$  &c. les grandeurs  $a, b, c, d$ , &c. sont indéterminées, & elles représentent avec les puissances de  $p$ , les parties de la valeur de  $x$  que l'on cherche, & elles servent à les trouver.

2°. Pour avoir la premiere partie de la valeur de  $x$ , représentée par  $a$ , il faut concevoir  $a$  substituée à la place de  $x$  dans la proposée, & supposer les grandeurs  $a + nna - 2n^3$ , dans lesquelles  $p$  ne se trouve point, égales à zero, & l'on aura l'équation  $a + nna - 2n^3 = 0$ , dont  $a - n = 0$  est un diviseur exact; ainsi  $a = n$  est la premiere partie de la valeur de  $x$  que l'on cherchoit.

Pour avoir la premiere transformée, on supposera  $n + f = x$ ; on substituera  $n + f$  à la place de  $x$  dans la proposée, & l'on aura la premiere transformée,

$$\begin{aligned} n + f &= x & x^3 &= x^3 + 3nxf + 3nff + f^3 \\ & & + np^2x &= + np^2 + np^2f \\ & & + nnx &= + n^3 + nnf \\ & & - p^3 &= - p^3 \\ & & - 2n^3 &= - 2n^3 \end{aligned}$$

$x$  Signifie  
que la gran-  
deur que cette  
marque pré-  
cede, est effa-  
cée.

3°. Pour trouver la seconde partie de la valeur de  $x$  représentée par  $bp$ , il faut concevoir  $bp$  substituée à la place de  $f$  dans la premiere transformée, & supposer égales à zero les grandeurs  $4nmbp + nnp = 0$ ; ce qui donnera  $b = -\frac{1}{4}$ , &  $bp = -\frac{1}{4}p$  est la seconde partie de la valeur de  $x$  que l'on cherchoit.

Pour avoir la seconde transformée, on supposera  $-\frac{1}{4}p + g = f$ ; on substituera  $-\frac{1}{4}p + g$  à la place de  $f$  dans la premiere transformée, & on aura la seconde transformée,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}p + g &= f, & f^3 &= -\frac{1}{64}p^3 + \frac{3}{16}ppg - \frac{1}{4}pgg + g^3 \\ & & + 3nff &= + \frac{3}{16}npp - \frac{1}{4}npg + 3ngg \\ & & + npf &= -\frac{1}{8}npp + npg \\ & & + 4nnf &= -\frac{1}{2}nnp + 4nng \\ & & + nnp &= + nnp \\ & & - p^3 &= - p^3 \end{aligned}$$

# 484 ANALYSE DÉMONSTRÉE.

4°. Pour trouver la troisième partie de la valeur de  $x$ , représentée par  $c p p$ , il faut concevoir  $c p p$  substituée à la place de  $g$  dans la seconde transformée, & supposer égales à zero les grandeurs  $4 n n c p p - \frac{1}{12} n p p = 0$ ; ce qui donnera  $c = + \frac{1}{24 n}$ , &  $c p p = \frac{1}{24 n} p p$  fera la troisième partie de la valeur de  $x$  que l'on cherchoit.

Pour avoir la troisième transformée, on supposera  $\frac{1}{24 n} p p + b = g$ ; & on substituera  $\frac{1}{24 n} p p + b$  à la place de  $g$  dans la seconde transformée, & l'on aura la troisième transformée,

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{262144 n^3} p^6 + \frac{3}{4096 n^2} p^4 b + \frac{3}{24 n} p p h b + b^3 = 0. \\ &- \frac{3}{12384 n} p^5 - \frac{3}{112 n} p^3 b - \frac{1}{4} p h b \\ &+ \frac{15}{4096 n} p^4 + \frac{3}{32} p p b + 3 n h b \\ &- \frac{131}{128} p^3 - \frac{1}{2} n p b \\ &+ 4 n n b. \end{aligned}$$

5°. Pour trouver la quatrième partie de la valeur de  $x$ , représentée par  $d p^3$ , il faut concevoir  $d p^3$  substituée à la place de  $b$ , & supposer égales à zero les grandeurs  $4 n n d p^3 - \frac{131}{128} p^3 = 0$ , d'où l'on déduira  $d = + \frac{131}{512 n}$ ; par conséquent  $d p^3 = + \frac{131}{512 n} p^3$  est la quatrième partie de la valeur de  $x$  que l'on cherchoit.

L'on a donc  $x = + n - \frac{r}{4} p + \frac{r}{24 n} p p + \frac{131}{512 n} p^3$  &c.

On peut continuer l'approximation autant qu'on voudra.

## A V E R T I S S E M E N T.

**S** I  $n$  étoit moindre que  $p$ , il faudroit trouver une valeur de  $x$  dans laquelle les  $p$  fussent au dénominateur; c'est-à-dire, il faudroit que les exposans des  $p$  dans la suite qui est la valeur de  $x$ , fussent négatifs; ce qui est si facile à faire par la première & par la seconde méthode du second Problème, après tous les exemples auxquels on les a appliquées, qu'il est inutile de s'y arrêter.

Cet exemple suffit pour faire entièrement concevoir la manière d'appliquer les deux méthodes du second Problème aux équations qui n'ont qu'une seule inconnue, lorsque la lettre connue qui tient lieu de la seconde inconnue  $y$ , se trouve disposée comme il faut dans l'équation proposée.

Voici un second exemple où il faut préparer l'équation proposée, où l'on apprendra la manière de la préparer.

## E X E M P L E I I.

265. **T**ROUVER la valeur approchée de  $x$  dans l'équation  $x^3 - 3nnx + n^3 = 0$ .

On ne sçauroit appliquer les méthodes du second Problème à cette équation, dont les racines sont incommensurables. Il faut la préparer, c'est-à-dire, il faut la changer en une équation qui soit la même, de manière que les coefficients ou produits connus de la proposée conservent toujours la même valeur dans ce changement, & que cependant les grandeurs de ces produits connus soient tels qu'on y puisse appliquer les méthodes du second Problème. Par exemple, on pourra changer la proposée  $x^3 - 3nnx + n^3 = 0$ , en cette équation  $x^3 - 3pqx + ppr = 0$ , qui sera la même que la proposée en supposant  $-3pq = -3nn$ , &  $+ppr = +n^3$ . Ce changement se fera dans cet exemple, en prenant une grandeur connue arbitraire  $p$  tant petite qu'on voudra, & faisant cette proportion  $p. n :: n. q$ , on aura  $-3pq = -3nn$ ; mettant  $pq$  au lieu de  $nn$  dans  $n^3$ , on aura  $n^3 = npq$ ; & faisant  $p. n :: q. r$ , on aura  $pr = nq$ , & par conséquent  $ppr = n^3$ .

Pour trouver à présent la valeur approchée de  $x$  dans l'équation préparée  $x^3 - 3pqx + ppr = 0$ , on prendra  $p$  pour tenir lieu de la seconde inconnue  $y$ , & on se servira de celle qu'on voudra des deux méthodes du second Problème. On emploiera ici la seconde.

1°. On supposera  $x = ap + bpp + cp^3$  &c.  $a, b, c$ , sont des grandeurs indéterminées, & elles représentent les parties de la valeur de  $x$  que l'on cherche.

2°. Pour trouver la première partie représentée par  $ap$ , il faut concevoir  $ap$  substituée à la place de  $x$  dans l'équation préparée, & supposer  $-3appq + ppr = 0$ , d'où l'on déduira  $a = \frac{1}{3}r$ ; & par conséquent  $ap = \frac{1}{3}p$  est la première partie de la valeur de  $x$  que l'on cherchoit.

Pour avoir la première transformée, on supposera  $\frac{1}{3}p + f = x$ , & on substituera  $\frac{1}{3}p + f$  à la place de  $x$ , & l'on aura la première transformée;

$$\frac{1}{27}p^3 + \frac{11}{27}ppf + \frac{1}{3}pff + f^3 = 0.$$

$$- 3pqf$$

3°. Pour trouver la seconde partie de la valeur de  $x$  représentée par  $bpp$ , il faut concevoir  $bpp$  substituée à la place de  $f$ , & supposer  $\frac{p^3}{819} - 3bp'q = 0$ , d'où l'on déduira  $b = + \frac{p^3}{819}$ , par conséquent  $\frac{p^3}{819} pp$  est la seconde partie de la valeur de  $x$  que l'on cherchoit. Le reste de l'opération est facile, & il est inutile d'en grossir ce traité.

## R E M A R Q U E.

266. LORSQU'EN cherchant la première partie de la valeur de  $x$  dans les équations qui ont deux inconnues  $x$  &  $y$ , on trouve qu'il faut résoudre une équation composée dont la racine est incommensurable, on pourra préparer l'équation comme dans l'exemple précédent, & ensuite on trouvera la valeur approchée de la première partie de la valeur de  $x$  que l'on cherchoit, par la même méthode, ou bien on la trouvera cette valeur approchée par le premier Problème.

*Fin du premier Volume.*



## A P P R O B A T I O N.

**N**ous avons lu par l'ordre de Monseigneur le Garde des Sceaux, les deux Ouvrages de Mathématique du Pere REYNEAU, Prêtre de l'Oratoire, intitulés : l'un, *La Science du Calcul*, &c. & l'autre *l'Analyse Démontrée*, &c. Nous avons déjà approuvé avec éloge ces deux Ouvrages dans une première édition, & nous avons eu le plaisir de voir notre Approbation suivie de celle du Public; l'estime des Sçavans & cette nouvelle lecture nous ont confirmé de plus en plus dans le jugement avantageux que nous en avons porté. Fait à Paris le 4 Decembre 1726. *Signé*, SAURIN.

## P R I V I L E G E D U R O Y.

**L**OUIS PAR LA GRACE DE DIEU, ROY DE FRANCE, ET DE NAVARRE; à nos amez & feaux Conseillers les Gens tenants nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conseil, Prevôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra, S A L U T. Notre bien amé GABRIEL-FRANÇOIS QUILLAU Fils, Imprimeur & Libraire-Juré de l'Université à Paris. Nous ayant fait remontrer qu'il souhaiteroit imprimer ou faire imprimer & donner au Public *La Science du Calcul des Grands ou les Elémens des Mathématiques & l'Analyse démontrée*, s'il Nous plaisoit lui accorder nos Lettres de Privilège sur ce nécessaires, offrant pour cet effet de le faire imprimer en bon papier & beaux caracteres suivant la feuille imprimée & attachée pour modele sous le contre-Scel des Presentes. A CES CAUSES, voulant traiter favorablement ledit Exposant, Nous lui avons permis & permettons par ces Presentes de faire imprimer ledit Ouvrage ci-dessus spécifié en un ou plusieurs volumes conjointement ou séparément, & autant de fois que bon lui semblera sur papier & caracteres conformes à ladite feuille imprimée & attachée pour modele sous notre dit contre-Scel, & de le vendre, faire vendre & débiter par tout notre Royaume pendant le tems de dix années consécutives; à compter du jour de la date desdites Presentes: Faisons défenses à toutes sortes de personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient d'en introduire d'impression étrangère dans aucun lieu de notre obéissance, comme aussi à tous Libraires-Imprimeurs & autres, d'imprimer, faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter ni contrefaire ledit Ouvrage ci-dessus exposé en tout ni en partie, ni d'en faire aucuns Extraits sous quelque prétexte que ce soit, d'augmentation, correction, changement de titre ou autrement, sans la permission expresse & par écrit dudit Exposant ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiscation des exemplaires contrefaits, de quinze cens livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, l'autre tiers audit Exposant, & de tous dépens, dommages & intérêts, à la charge que ces Presentes seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, & ce dans trois mois de la date d'icelles, que l'impression de ce Livre sera faite dans notre Royaume & non ailleurs; & que l'Impétrant se conformera en tout aux Reglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10 Avril 1725; & qu'avant que de l'exposer en vente le Manuscrit ou Imprimé qui aura servi de copie à l'impression dudit Livre, sera remis dans le même état où l'Approbation y aura été donnée es mains de notre très-cher & féal Chevalier Garde des Sceaux de France, le Sieur FLEURIAU D'ARMONVILLE Commandeur de nos Ordres; & qu'il en sera ensuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliothèque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notre très-cher &

MAR 17 1921

ſeul Chevalier Garde des Sceaux de France le Sieur FLAURIAN D'ARMINOVILLE, Commandeur de nos Ordres, le tout à peine de nullité des Préſentes, du contenu deſquelles Vous mandons & enjoignons de faire jouir l'Expoſant ou ſes ayans cauſe pleinement & paſſiblement, ſans ſouffrir qu'il leur ſoit fait aucun trouble ou empêchement; Voulons que la copie deſdites Préſentes qui ſera imprimée tout au long au commencement ou à la fin dudit Livre, ſoit tenue pour dûement ſignifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amez & feaux Conſeillers & Secrétaires ſoit ajoutée comme à l'Original; Commandons au premier notre Huiffier ou Sergent de faire pour l'exécution d'icelles tous Actes requis & néceſſaires ſans demander autre permiſſion, nonobſtant Clameur de Haro, Charte Normande & Lettres à ce contraires. Car tel eſt notre plaifir. DONNÉ à Paris le douzième jour de Decembre, l'An de grace mil ſept cens vingt ſix, & de notre Règne le douzième. Par le Roy en ſon Conſeil.

*Signé, DE S. HILAIRE, avec paraphe.*

*Regiſtré ſur le Regiſtre VI. de la Chambre Royale des Libraires Imprimeurs de Paris, N°. 544, fol. 434. conformément aux anciens Réglements, confirmés par celui du 28 Fevrier 1723. A Paris le dix-neuf Decembre mil ſept cens vingt-ſix.*  
*Signé, BRUNET, Syndic.*

---

**APPROBATION DU T. R. P. SUPERIEUR GENERAL**  
*de la Congregation de l'Oratoire.*

**JESUS ✱ MARIA.**

**N**OUS Pierre-François de la Tour, Prêtre & Superieur General de la Congregation de l'Oratoire de JESUS-CHRIST notre Seigneur, Vu par Nous le Privilege du Roy & l'Approbation des Examineurs, permettons à Jacques Quillau, Libraire & Imprimeur, d'imprimer un Livre intitulé, *l'Analyſe Démontrée*, compoſé par le Pere Charles RAYNEAU, Prêtre de notre Congregation, conformément au Privilege à nous accordé par les Lettres Patentés du Roy en date du 26 Mars 1689, enregistrées au Grand Conſeil le 25 Avril de la même année, par leſquelles il eſt défendu à tous Libraires & Imprimeurs d'imprimer & vendre aucuns Livres compoſés par ceux de notre Congregation, ſans notre permiſſion expreſſe, ſous les peines portées par ledit Privilege. Donné à Paris ce trentième Decembre mil ſept cens ſept.

*Signé, P. F. DE LA TOUR.*

De l'ordre de notre Reverend Pere General  
*Signé, G. F. DEMOUTEUL, Secrétaire.*

MAR 17 1921





